

Fázisátalakulások
evolúciós potenciáljátékokban

Ph.D. tézisfüzet

Király Balázs

Témavezető: Dr. Szabó György
Belső konzulens: Dr. Tőke Csaba

BME, MTA EK MFA

2019

Bevezetés

Számos tudományterület tárgyát képezik nagyszámú kölcsönható egységből felépülő komplex rendszerek. Az ilyen rendszerek vizsgálatában és modellezésében fellépő hasonló nehézségek következtében egyre gyakoribbak a komplex rendszerek viselkedésének megértésére irányuló interdiszciplináris kutatások, különös tekintettel a statisztikus fizika fogalmainak és módszereinek más tudományterületeken való alkalmazásaira, melyek nyomán az utóbbi években olyan új tudományágak jöttek létre, mint például a szociofizika [Galam, 2012], az ökonofizika [Mantegna és Stanley, 1999] vagy a hálózattudomány [Barabási és Pósfai, 2016].

Társadalmi jelenségek vizsgálata során a kölcsönhatások jellemzően valamiféle döntési helyzetekre vezethetők vissza, így ezek a vizsgálatok erősen kötődnek a játékelmélethez [Gintis, 2009]. A modellezésben kiemelt szerepet kapnak a párkölcsönhatások, illetve véges számú döntési lehetőség esetén a leírásukra szolgáló mátrixjátékok. Általában a mátrixjátékok tulajdonságainak feltérképezése, különösen nagyszámú választható stratégia esetén, már önmagában sem magától értetődő feladat, komplex rendszerekben pedig az elemzést tovább bonyolíthatja például a játékok ismétlődése, a játékosok stratégiaválasztását megadó dinamikai szabály vagy a játékosok kölcsönhatási viszonyainak topológiája.

A vektorok bázis szerinti felbontásának mintájára, a mátrixjátékokat definiáló nyereménymátrixok is előállíthatók elemi mátrixok szuperpozíciójaként, továbbá választható olyan felbontás, melyben az elemi mátrixok mindössze négy különböző kölcsönhatási alaphelyzetet írnak le [Sza-

bó és Borsos, 2016]. A négy kölcsönhatási osztályt az ön- és társfüggő, a koordinációs és a ciklikus dominanciát leíró játékok alkotják. Habár az egyes elemi játékok önmagukban könnyedén elemezhetők, az összjátékukra vonatkozó esetleges szabályszerűségek egyelőre nagyrészt tisztázatlanok. A felbontás előnyeinek egy már ismert példája, hogy az elemzéseket számos ponton megkönnyítő potenciál létezésére egyszerű feltételt ad: csak azon játékokhoz létezik potenciál, melyek nem tartalmaznak ciklikus dominanciát leíró komponenst.

Célkitűzések

Kutatásaink hosszútávú célja annak feltárása, hogy a mátrixjátékok fent említett anatómiája milyen tartalommal tölthető meg, kiváltképp a komplex rendszerek modellezésének területén. Ezt megalapozandó, először néhány egyszerű játék viselkedésének vizsgálatán keresztül tanulmányoztuk az elemi játékok társításának hatását olyan elrendezésekben, melyekre a statisztikus fizika jól ismert fogalmai és módszerei közvetlenül alkalmazhatók. Kiindulási pontnak a logicszabály által vezérelt, sok játékos által ismételtten játszott potenciáljátékokat választottuk, ugyanis ezek klasszikus spinmodelleknek feleltethetők meg. Az értekezés a négyzetrácson értelmezett elemi koordinációs játékot, annak önfüggő komponensekkel való kiterjesztését, valamint több elemi koordináció bizonyos szimmetrikus kombinációit tárgyalja, kiemelt figyelmet fordítva az ezekben megfigyelhető fázisátalakulások tulajdonságaira. Az elemi koordinációs játékban a két koordinált stratégia között Ising-típusú kölcsönhatás lép fel, mely azonos mértékben jutal-

mazza, illetve bünteti a játékosok azonos és ellentétes stratégiaválasztását, a további stratégiák pedig közömbösek, azaz választásuk esetén mindkét fél nyereménye zérus.

Vizsgálati módszerek

A vizsgált modellek általános tulajdonságainak kvalitatív felderítésére az átlagtér- és a párközelítés módszerét használtuk, a fázisátalakulások tulajdonságainak részletesebb kvantitatív elemzését pedig Monte-Carlo-szimulációk felhasználásával végeztük. Az így kapott eredményeket analitikus számításokkal, a szimulációk vizualizációjával és az ezekben megfigyelhető domének határfelületei mentén értelmezett inváziós sebességek becslésével egészítettük ki.

Új tudományos eredmények

A fentiekben vázolt kutatómunka során elért főbb tudományos eredményeim az alábbi tézispontokban foglalhatók össze:

1. Megvizsgáltam a négyzetrácson értelmezett, logitszabály által vezérelt elemi koordinációs játék alapvető tulajdonságait. Megállapítottam, hogy a hőmérséklettel analóg zajparaméter megváltoztatásának hatására a rendszer egy olyan rend-rendezetlenségi fázisátalakuláson mehet keresztül, melynek rendje függ a modellt definiáló paramétertől, a választható közömbös stratégiák számától. Amíg ez a szám egy küszöbérték alatt marad, az átalakulás folytonos és a kétdimenziós Ising-modell univerzalitási osztályába esik;

ellenkező esetben pedig elsőrendű. Meghatároztam a küszöbértéket, és becslést adtam az átalakulás kritikus hőmérsékletére [P1].

2. Az 1. tézispontban említett modellt kibővítettem egy, a koordinált stratégiák szimmetriáját megőrző önfüggő komponenssel. Megállapítottam, hogy az így kapott modellben az eredeti fázisátalakulás kritikus pontja és rendje is megváltozhat, valamint az átalakulás el is tűnhet az önfüggő komponens erősségtől függően. A három jelenség tetszőleges számú közömbös stratégia jelenlétében egyaránt megfigyelhető [P2].
3. A közömbös stratégiák konzisztens összevonásával a 2. tézispontban szereplő bővített modellt leképeztem a Blume–Capel-modellre, és ezáltal igazoltam a modellre vonatkozó eredményeim helyességét. Megmutattam, hogy ugyanezen leképezés segítségével a reguláris hálózatokon értelmezett játékokban tetszőleges számú közömbös stratégia kiváltható egyetlen közömbös stratégiával és az így kapott játék egy, a hőmérséklettől függő erősségű önfüggő komponenssel való bővítésével.
4. Bevezettem a maximálisan nem átfedő koordinációs játékok fogalmát mint az adott páros stratégiaszám mellett a lehető legnagyobb számú, közös koordinált stratégiával nem rendelkező elemi koordinációból felépülő játékok családját, és megvizsgáltam ezek négyzet rácson értelmezett, logitzabály által vezérelt változatának tulajdonságait. Az átlagtér-közelítés szint-

jén az általános maximálisan nem átfedő koordinációs játék ekvivalens a megfelelő stratégiaszámú elemi koordinációs játékkal, így rendezett fázisában csak az egyik koordinált párjának szimmetriáját sérti. Ezt a tulajdonságot a modell négy- és hatstratégias változata esetén Monte-Carlo-szimulációkkal igazoltam. A modellek fázisátalakulásához két független rendparamétert rendeltem, és meghatároztam az ezeket jellemző kritikus exponenseket. Míg a négystratégias modell egyik rendparamétere az elemi koordinációs játékhoz hasonlóan Ising-osztályú kritikus viselkedést mutat, addig a hatstratégias esetben a stratégiapárok közötti eltérő permutációs szimmetria következtében más kritikus exponensek mérhetők. A négystratégias modellt az Ashkin–Teller-modell speciális eseteként, az óramodellként azonosítottam, ami alapján a tapasztalt Ising-osztályú viselkedés analitikusan alátámasztható, valamint egy dualitási reláción keresztül egzaktul kiszámítható az átalakulás kritikus hőmérséklete [P3].

5. Tanulmányoztam egy Ising- és Potts-típusú részjátékok közötti versengést leíró, négyzetrácson értelmezett, logitszabály által vezérelt modellt. Kimutattam, hogy bár általában a rendszerben mindössze egyetlen, rend–rendezetlenségi fázisátalakulás figyelhető meg, melynek közelében a kritikus viselkedés a magasabb nyereményt biztosító részjáték kritikus viselkedését követi, az Ising-típusú viselkedés entrópiahatások következtében mégis stabilizálódhat a kritikus pont közelében olyan esetekben is, amelyekben

a Potts-részjáték csupán kellően kis mértékben erősebb. Ekkor a két versengő rendezett fázis között egy újabb, elsőrendű fázisátalakulás is megfigyelhető [P4].

A tézispontokhoz kapcsolódó tudományos közlemények

- [P1] G. Szabó and B. Király, „Extension of a spatial evolutionary coordination game with neutral options,” *Phys. Rev. E* **93**, 052108 (2016).
- [P2] B. Király and G. Szabó, „Evolutionary games with coordination and self-dependent interactions,” *Phys. Rev. E* **95**, 012303 (2017).
- [P3] B. Király and G. Szabó, „Evolutionary games combining two or three pair coordinations on a square lattice,” *Phys. Rev. E* **96**, 042101 (2017).
- [P4] B. Király and G. Szabó, „Entropy affects the competition of ordered phases,” *Entropy* **20(2)**, 115 (2018).

Hivatkozások

- [1] S. Galam, *Sociophysics: A Physicist's Modeling of Psycho-political Phenomena*, Understanding Complex Systems (Springer, New York, NY, 2012).

- [2] R. N. Mantegna and H. E. Stanley, *Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1999).
- [3] A.-L. Barabási and M. Pósfai, *Network Science* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2016).
- [4] H. Gintis, *The Bounds of Reason: Game Theory and the Unification of the Behavioral Sciences* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009).
- [5] G. Szabó and I. Borsos, „Evolutionary potential games on lattices,” *Phys. Rep.* **624**, 1 (2016).