Játékelmélet[1]

(elektronikus jegyzet)

Forgó Ferenc – Pintér Miklós – Simonovits András – Solymosi Tamás

2005

[1]Ez a munka az OTKA T046194 pályázat támogatásával készült.

Előszó

Nagyon sok jó játékelmélet könyv van a világban nyomtatott és elektronikus formában is. Mindegyik valamilyen jól körülhatárolt olvasótábort, általában egyetemi hallgatóságot, céloz meg. Ennek a könyvnek a megírását is elsősorban az ösztönözte, hogy a Budapesti Corvinus Egyetemen nemrégen egy új szak, a gazdaságmatematika szak indult. A szak hallgatói számára a Játékelmélet kötelező tárgy. Természetesen ki lehetett volna választani egy könyvet, amelyik elég jól lefedi azokat a témaköröket, amelyeket fontosnak tartunk és mellé kiegészítésként egyéb irodalmat adni. Mi inkább azt választottuk, hogy mi magunk végezzük el ezt a válogatást a különböző forrásokból, és formáljuk egységes könyvvé.

A játékelmélet oktatásának hagyományai vannak a Corvinus Egyetemen illetve elődjén a Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetemen. A Gazdaságelméleti szakirányosoknak kötelező, másoknak választható tárgy volt a negyedik és ötödik évben. Ennek a kurzusnak az anyaga elég jól kikristályosodott az utóbbi 10 évben és tulajdonképpen ez adja ennek a könyvnek is a vázát. Elég jól lehet tagolni az anyagot és talán azt az alcímet is adhatnánk neki, hogy „14 előadás a játékelméletből".

A Corvinus Egyetemen nem ez az egyetlen tárgy, ahol játékelmélettel, vagy azzal közeli rokonságban álló tárggyal találkoznak a hallgatók. Elég csak a Mikroökonómia, a Piacszerkezetek és az Információ Közgazdaságtana tárgyakat említeni. Ez a könyv nem szeretne ezekkel a területekkel konkurálni, inkább ki szeretné szolgálni őket és a már tanult dolgokat új megvilágításba helyezni. Törekedtünk arra, hogy egyensúlyban legyen a matematikai megalapozás és precizitás az intuícióval, az elmélet a példákkal, és kellő számú gyakorló feladat is álljon rendelkezésre. A példák és feladatok zömmel közgazdasági eredetűek. Egyes fejezeteket (alfejezeteket) † jellel jelöltünk meg, jelezve azt, hogy ezek az alapkurzusba ugyan nem férnek bele, de további olvasmánynak, egyéni tanulásnak, vagy egy magasabb szintű kurzusban felhasználhatók. A † jeles részek kihagyása nem bontja meg a logikai egységet. A Függelékben néhány fontos matematikai eredményt gyűjtöttünk össze bizonyítás nélkül, valamint a játékelmélet rövid történetét írtuk le. A könyvben a kooperatív játékok elmélete egy kicsit alulreprezentált, aminek az a magyarázata, hogy az választható tárgyként önállóan is szerepel.

Az elektronikus formát azért választottuk, hogy az anyag javítását, fejlesztését folyamatosan, kis költséggel el tudjuk végezni és a könyv mindenki számára ingyen elérhető legyen. Az eredményes tanuláshoz az analízis, lineáris algebra és programozás valamint a valószínűségszámítás alapjai szükségesek, de leginkább a formális, kritikus gondolkodáshoz való affinitás és az ebben való jártasság segít a megértésben és a tanultak alkalmazásában.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Mivel is foglalkozik a játékelmélet? Egy rövid definíció: többszemélyes döntési problémákkal. Ez így elég tág, de nem elég precíz, mert nem szerepel benne a modern játékelmélet egyik legfőbb jellemzője: a matematikai modellek használata ezeknek a döntési problémáknak a tanulmányozására. Második kísérletre ezért jobb ez a definíció: a játékelmélet matematikai modellek olyan gyűjteménye, amelyeket többszereplős konfliktushelyzetek tanulmányozására használunk. Lazán fogalmazva, a játékelmélet egy játékban (a konfliktushelyzetet ezentúl ezen a néven illetjük) a játékosok (döntéshozók) cselekedeteit és az ennek a következményeként létrejövő helyzeteket elemzi a játékosok viselkedésére és a játékra tett különféle feltételezések mellett.

Alapvetően kétféle szempontból tekinthetünk egy játékra. Az egyikben, amit nevezhetünk úgy is, hogy „alulnézetből" nézzük a játékot, azonosítjuk magunkat az egyik játékossal és azt vizsgáljuk, hogy mi ezen játékos „optimális" viselkedése. A másik a „madártávlat" szemlélet. Ekkor mintegy felülről nézve azt vizsgáljuk, hogy a játékosok együttes cselekvéseként kialakuló helyzet milyen, elsősorban mennyire „stabil". Ez utóbbi megközelítés vezet el a játékelméletben szinte mindenhol jelenlévő „egyensúlyi szemlélethez". Mindkét esetben a vizsgálat módszere normatív. Nem azt vizsgáljuk elsősorban, hogy bizonyos szituációkban a játékosok a valóságban megfigyelhetően hogyan viselkednek, hanem azt, hogy „racionális" cselekvések eredményeképpen minek kell történnie, mit diktál a modellben rögzített konfliktushelyzet belső logikája. Természetesen sohasem szabad teljesen elszakadni a valóságtól, az intuícióval ellentétes megoldások nem lehetnek hosszú életűek.

A különböző játékelméleti modelleket nagyon sok szempont szerint lehet osztályozni. A teljesség igénye nélkül felsorolunk néhányat:

- A játékosok száma szerint (kettő, véges, végtelen),
- A játékosok számára rendelkezésre álló lehetőségek száma (véges, végtelen),
- A szembenállás foka (antagonisztikus, nem antagonisztikus),

- A megengedett kooperáció foka (kooperatív, nem kooperatív),
- A játék információs struktúrája (teljes, nem teljes, tökéletes, nem tökéletes),
- Az idő szerepe (statikus, dinamikus),
- A véletlen szerepe (determinisztikus, sztochasztikus),
- A matematikai megfogalmazás specialitása (normál forma, extenzív forma, karakterisztikus függvény forma).

A könyv alapvetően két részre tagozódik: a nem kooperatív és a kooperatív játékokkal foglalkozó részekre. A kettő közötti lényeges különbség az, hogy a kooperatív játékok esetében a játékosok csoportokat (koalíciókat) alkothatnak, amelyeken belül az összehangolt cselekvést elkötelező szerződések garantálják, míg a nem kooperatív játékok esetében ilyen szerződéseket a játék szabályai nem engednek meg.

Helyénvalónak tartjuk, hogy itt a bevezetésben foglalkozzunk egy keveset két alapvető dologgal: a racionalitással és a köztudással. Ez a két téma egyenként is megérdemelne egy-egy teljes könyvet, de mi csak annyiban érintjük, amennyiben közvetlen játékelméleti következményük van. Egy játékost racionálisnak nevezünk, ha viselkedése leírható matematikai értelemben optimális döntésekként. Ebben a könyvben az egyszerűség kedvéért mindvégig feltesszük, hogy a játékosok preferenciáit hasznossági függvényekkel lehet kifejezni, amelyeket a játékelméleti kontextusban (a hagyománytisztelet miatt elsősorban) kifizetőfüggvényeknek fogunk nevezni. Bizonytalanság hiányában, egy racionális játékos így a lehetséges alternatívái halmazán a kifizetőfüggvényét maximalizálja a többi játékos cselekvéséről és az összes paraméterről alkotott vélekedéseket adottnak véve. Bizonytalanság esetén a racionális játékosról azt tesszük fel, hogy az általa nem befolyásolható paraméterek együtteséről van egy (szubjektív) valószínűségeloszlása, és az ennek segítségével képzett várható kifizetését maximalizálja a saját alternatívái halmazán.

Az általunk használt másik feltételezés, az ún. köztudás (common knowledge). Egy esemény köztudott, ha minden játékos tudja, hogy az esemény bekövetkezett, minden játékos tudja, hogy minden játékos tudja, hogy az esemény bekövetkezett, s.i.t. Ez nyilvánvalóan nem egy precíz definíció, de ez nem is volt célunk. Beszélhetünk köztudott racionalitásról is, ekkor minden játékos racionális, minden játékos tudja magáról, hogy racionális, minden játékos tudja, hogy minden játékos racionális s.i.t. Ebben a könyvben, ha csak külön nem jelezzük, feltesszük, hogy a racionalitás köztudott.

I. rész

Nem kooperatív játékok

1. fejezet

Játékok normál formában

A nem kooperatív játékok leírásának legtömörebb formája a stratégiai, vagy normál forma. Ebben az esetben a játékot a játékosok véges $N = \{1, \ldots, n\}$ halmazával, az egyes játékosok $S_1, \ldots, S_n$ nem üres stratégiahalmazaival és ezek $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ szorzathalmazán értelmezett $f_i : S \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$ kifizetőfüggvényekkel adjuk meg, vagy még tömörebben a

$$G = \{S_1, \ldots, S_n; f_1, \ldots, f_n\}$$

szimbólummal. Az S halmaz elemeit *stratégiaprofil*oknak nevezzük.

A játék lejátszását úgy képzeljük el, hogy a játékosok egymástól függetlenül választanak egy stratégiát a saját stratégiahalmazukból, majd az így kialakult stratégiaprofilhoz tartozó kifizetések megtörténnek. Sokszor szokták azt is mondani, hogy a játékosok egyidejűleg (szimultán) választanak stratégiát, ez azonban félrevezető is lehet, mivel itt az idődimenzió semmilyen formában nincs jelen. Akkor már jobb a szintén szokásos „statikus játék" elnevezés. A későbbiekben látni fogjuk, hogy olyan játékok is megadhatóak normál formában, amelyeknek eredetileg lényeges idődimenziójuk is volt és így a normál forma némileg általánosabbnak is tekinthető, noha ez nem az egyetlen forma, amelyet a játékelméleti modellek használnak. A megfogalmazás tömörsége és matematikai kezelhetősége mindenképpen vonzóvá teszi a normál formát.

1.1. definíció. Azokat a játékokat, ahol a stratégiahalmazok végesek, véges játékoknak nevezzük. A véges játékok esetében véges számú stratégiaprofil van, és minden játékos kifizetőfüggvénye megadható egy n-dimenziós tömbbel (polimátrixszal). Kétszemélyes játékok esetében ez két mátrixot jelent (innen a bimátrix-játék elnevezés).

Sokféle játékelméleti koncepciót fogunk a lehető legegyszerűbb bimátrix-játékokkal szemléltetni, ahol mindkét játékosnak csak két stratégiája van.

Ezek közül talán a legismertebb a *Fogolydilemma*.

1.2. példa (Fogolydilemma)**.** Két fogoly van vizsgálati fogságban külön cellákban úgy, hogy nem kommunikálhatnak egymással. Az ügyész egy nagyobb bűntényt szeretne rájuk bizonyítani, de csak a beismerő vallomásukra, illetve az egymás elleni tanúskodásukra számíthat. Mindkét fogolynak két lehetősége van: vall (V) vagy nem vall (N). A büntetéseket években a V és N kombinációjára (negatív előjellel) az 1.1. táblázat mutatja (a táblázat egyes pozícióiban az első szám az 1. fogoly, a második a 2. fogoly kifizetése).

		2. fogoly	
		N	V
1. fogoly	N	(-2,-2)	(-10,-1)
	V	(-1,-10)	(-5,-5)

1.1. táblázat. Fogolydilemma

Mielőtt még az általános elmélettel foglalkoznánk, vessünk egy pillantást a *Fogolydilemmára* és próbáljunk csak a játékosok racionalitására, ami amúgy is alapfeltevésünk, hivatkozni. Az 1. fogoly ugyan nem tudja, hogy mit fog csinálni a másik, de bármit is csinál a másik, a V stratégia választásával mindkét esetben jobban jár, mint az N választásával, így a minden esetben kedvezőtlenebb N stratégiát akár el is hagyhatja, hiszen racionális játékos számára ez sohasem lesz a legjobb válasz a másik játékos választására. A szimmetria miatt a 2. fogoly ugyanígy gondolkodik, és ő is kiküszöböli az N stratégiát, így marad a (V, V) stratégia profil, mint „megoldás”, és mindkét fogoly kap 5 évet. Amit itt tettünk, az nem volt más, mint az egyértelműen kedvezőtlen, *szigorúan domináló* stratégiák kiküszöbölése, és „szerencsére” ezzel a megoldás triviálissá vált. Felmerül a kérdés, lehet-e ezt általában is csinálni. Ezzel a kérdéssel egy kicsit később foglalkozunk.

A *Fogolydilemma* típusú játékok nemcsak ilyen „frivol” környezetben fordulhatnak elő. Gondoljunk az OPEC-re, és az egyszerűség kedvéért legyen az egyik játékos Szaud-Arábia, a másik pedig a többi tagország. Két stratégiapár van: visszafogják olajtermelésüket egy magasabb olajár elérésének reményében, vagy nem. Az igazi OPEC-optimum (Pareto-optimum) az lenne, ha mindketten visszafognák a termelésüket. Mivel nem bíznak meg egymásban, mindkét fél abban reménykedik, hogy a másik visszafogja a termelését és ő pedig kihasználja az így adódó kedvező lehetőséget és növeli termelését. Világos, hogy a helyzetet egy *Fogolydilemma* típusú játékkal lehet modellezni. A valódi helyzet sokkal bonyolultabb, de az elmélet mégis ad valamilyen magyarázatot a tényleges folyamatokra.

A *Fogolydilemma* esetében szerencsések voltunk, mert a szigorúan dominált stratégiák kiküszöbölése után csak egy stratégiaprofil maradt. A következő bimátrix-játékban ennek eléréséhez nem elegendő egy lépés.

1.3. példa. Tekintsük az 1.2. táblázattal megadott bimátrix-játékot. Az 1. játékos egyik stratégiája sem dominálja szigorúan a másikat, de a 2. játékos K stratégiája szigorúan dominálja J-t, így racionális játékos többé már nem számol J-vel és elhagyja mindkét mátrixból. A megmaradt játékban már F szigorúan dominálja L-et, az így megmaradt játékban K szigorúan dominálja B-t, tehát egy stratégiaprofilra, (F, K)-ra redukálódott a játék. Joggal tekinthetjük ezt a játék „megoldásának”, hiszen racionális játékosokat és a racionalitás köztudottságát feltéve ez lesz a kimenetel.

		2. játékos		
		B	K	J
1. játékos	F	(1,0)	(1,2)	(0,1)
	L	(0,3)	(0,1)	(2,0)

1.2. táblázat. Az 1.3. példa játéka

Amit a fenti példával demonstráltunk, az tulajdonképpen a *szigorúan dominált stratégiák iteratív kiküszöbölése*, ami véges játékok esetében egy jól definiált eljárás. Nincs azonban semmi garancia arra, hogy ezzel az eljárással mindig egy stratégiaprofilra tudnánk szűkíteni az eredeti játékot.

A következő példában egyik játékosnak sincs domináns stratégiája.

1.4. példa (Nemek harca)**.** Jancsi és Juliska együtt akarnak szombat este szórakozni menni. Kosárlabda mérkőzés (K) az egyik lehetőség, egy operaelőadás (O) a másik. Jancsi a kosármeccset, Juliska az operát szereti jobban, de mindketten azt szeretik legkevésbé, ha egyedül kell elmenni szórakozni. Egymástól függetlenül vásárolnak két-két jegyet valamelyik eseményre. Az 1.3. táblázat számai Jancsi és Juliska preferenciáit tükrözik.

Könnyen látható, hogy most semmire sem megyünk a szigorúan dominált stratégiák iteratív kiküszöbölésével, hiszen el sem tudunk indulni.

Nézzünk most egy olyan példát, ahol a stratégiahalmazok nem végesek.

1.5. példa (Szimmetrikus Cournot-duopólium)**.** Egy iparágban két meghatározó vállalat van, amelyek egy homogén terméket állítanak elő. A vállalatok termelési volumeneikről döntenek. Adott az inverz keresleti függvény, amely az iparág össztermeléséhez rendeli hozzá azt a legmagasabb árat, amelyen a piac kiürül. Adott a vállalatok (azonos) költségfüggvénye. Definiáljuk most

		Juliska	
		K	O
Jancsi	K	(2,1)	(0,0)
	O	(0,0)	(1,2)

1.3. táblázat. Nemek harca

azt a játékot normál formában, amelyben a stratégiahalmazok a termelési volumenek, amelyet a nemnegatív valós számok halmazával reprezentálunk. A kifizetőfüggvények a bruttó nyereségek: a költségekkel csökkentett árbevétel. Vegyük a legegyszerűbb esetet, amikor az inverz keresleti függvény és a költségfüggvény lineáris. Ha q_1 és q_2 jelölik a két vállalat (nemnegatív) termelési volumenét, akkor az i játékos kifizetőfüggvénye:

$$f_i(q_1, q_2) = q_i p(q_1, q_2) - c(q_i),$$

ahol $p(q_1, q_2) = \max\{a - b(q_1 + q_2), 0\}$.

Legyenek $c(q_i) = cq_i$, $a, b, c > 0$, $a > c$, $i = 1, 2$. Ekkor látszik, hogy a 0 termelési volumen 0 nyereséget ad. A túl nagy termelési volumen veszteséget (negatív nyereséget) eredményez, függetlenül attól mekkora termelést választ a másik játékos. Az így szigorúan dominált stratégiákat el lehet hagyni, és a megoldást a $[0, \frac{a}{b}]$ intervallumban keresni.

Nézzük most a dominált stratégiák iteratív kiküszöbölését általánosabban. A későbbiekben is egyszerűsíteni fogja a dolgokat az alábbi jelölés. Vegyük az i játékost. Jelöljük S_{-i}-vel azoknak a stratégiaprofiloknak a halmazát, amelyek nem tartalmazzák az i játékos stratégiáját, ezeket *csonka stratégiaprofil*nak nevezzük, és ha $\mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}$, akkor annak az $\mathbf{s}$ stratégiaprofilnak a jelölésére, amelyben az i játékos az s_i stratégiáját, míg a többiek $\mathbf{s}_{-i}$-t játsszák az $\mathbf{s} = (s_i, \mathbf{s}_{-i})$ szimbólumot használjuk. Definiáljuk most a dominálás fogalmát.

1.6. definíció. A $G = \{S_1, \ldots, S_n; f_1, \ldots, f_n\}$ normál formában adott játékban legyen az $s_i, t_i \in S_i$ az i játékos két stratégiája. Azt mondjuk, hogy az s_i stratégia *szigorúan dominálja* a t_i stratégiát, ha

$$f_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}) > f_i(t_i, \mathbf{s}_{-i}) \tag{1.1}$$

minden $\mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}$-re.

Hasonlóan, az s_i stratégia *gyengén dominálja* a t_i stratégiát, ha

$$f_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}) \geq f_i(t_i, \mathbf{s}_{-i}) \tag{1.2}$$

minden $\mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}$-re.

Tekintsük most a véges játékokat, azokat a játékokat, ahol a játékosok stratégiahalmazai végesek. Tegyük fel, hogy a dominált stratégiákat egyenként küszöböltük ki mindaddig amíg ez megtehető. Mivel a stratégiahalmazok végesek, ezért véges számú lépésben eljutunk egy redukált játékhoz (ideális esetben egyetlen stratégiaprofilhoz), amelyet már nem tudunk tovább szűkíteni. Mivel a kiküszöbölés sorrendje esetleges, zavaró lenne, ha a végeredmény függne a kiküszöbölés sorrendjétől. Szerencsére, ha csak szigorúan dominált stratégiákat hagyunk el, akkor a végeredmény független a kiküszöbölés sorrendjétől. Ennek bizonyítását (véges esetben) gyakorló feladatként az olvasóra bízzuk (lásd az 1.1. feladatot). Nem ilyen kedvező a helyzet akkor, ha a kiküszöbölés a gyengén dominálás alapján történik. Ekkor a végeredmény függhet attól, hogy milyen sorrendben hagyjuk el a gyengén dominált stratégiákat. Nagyon könnyű ilyen példát adni, ezt is az olvasóra bízzuk (lásd az 1.2. feladatot).

A szigorúan dominált stratégiák kiküszöbölésével olyan „megoldásokhoz" jutunk, melyek stabilitást mutatnak. Stabilitást abban az értelemben, hogy ha a játék egy olyan „megoldáshoz" jut, amely „túlélte" a szigorúan dominált stratégiák kiküszöbölését, akkor nem racionális egyik játékosnak sem olyan stratégiát választani, amely nem élte túl a szigorúan dominált stratégiák iteratív kiküszöbölését.

Láttunk példákat arra, hogy sokszor vagy semmire sem megyünk a szigorúan dominált stratégiák iteratív kiküszöbölésével, (hiszen el sem tudunk indulni) vagy nem tudjuk kellőképpen szűkíteni a racionálisan szóba jöhető stratégiaprofilok halmazát. Olyan megoldási koncepcióra van szükségünk, ami sokkal szigorúbb, mint a szigorúan dominált stratégiák iteratív kiküszöbölése, vagyis jobban leszűkíti azoknak a stratégiaprofiloknak a halmazát, amelyek stabilitást mutatnak. Egy ilyen megoldás a Nash-egyensúlypont (NEP).

A szigorúan dominált stratégiák iteratív kiküszöbölésére a későbbiekben még visszatérünk.

1.1. Feladatok

1.1. feladat. Bizonyítsuk be, hogy véges játékok esetén a szigorúan dominált stratégiák iteratív kiküszöbölésének sorrendje nem befolyásolja a végeredményt (a kiküszöbölés után megmaradt stratégiaprofilok halmazát).

1.2. feladat. Adjunk példát olyan véges játékra, ahol a gyengén dominált stratégiák iteratív kiküszöbölésének sorrendje befolyásolja a végeredményt (a kiküszöbölés után megmaradt stratégiaprofilok halmazát).

1.3. feladat. Két játékos a következő osztozkodási játékot játssza. 100 Ft-ot kell elosztaniuk egymás között kerek forintokban. A két játékos egyszerre és egymástól függetlenül jelenti be igényét a bírónak. Ha az igények összege nagyobb, mint 100 Ft, akkor egyik fél sem kap semmit. Ha az igények összege legfeljebb 100 Ft, akkor mindkét fél megkapja azt, amit kért, és az esetleges maradékot a bíró jótékonysági célra fordítja, és ez közömbös a játékosok számára.

1. Mik ebben a játékban a szigorúan dominált stratégiák ?
2. Melyek ebben a játékban a gyengén dominált stratégiák?
3. Van-e domináns stratégia?

2. fejezet

A Nash-egyensúly

2.1. A Nash-egyensúly fogalma

Tegyük fel, hogy valamilyen megfontolás, elmélet, esetleg intuíció vagy konvenció alapján azt gondoljuk, hogy egy adott $\mathbf{s}$ stratégiaprofilt tekintünk egy $G = \{S_1, \ldots, S_n; f_1, \ldots, f_n\}$ játék megoldásának. Ezt a megoldást akkor tekinthetjük „stabilnak" vagy „önmegvalósítónak" (self enforcing), ha tetszőleges i játékos ($i = 1, 2, \ldots, n$) nem tudja a kifizetését növelni azzal, hogy a saját s_i komponensét $\mathbf{s}$-ből megváltoztatja, feltéve, hogy a többiek az $\mathbf{s}_{-i}$ csonka stratégiaprofilt játsszák. A Nash-egyensúly pontosan ezt a „stabilitást" testesíti meg.

2.1. definíció. Legyen $G = \{S_1, \ldots, S_n; f_1, \ldots, f_n\}$ egy n-személyes nem kooperatív játék normál formában. Egy $\mathbf{s}^*$ stratégiaprofilt *Nash-egyensúlypont*-nak (NEP) nevezünk, ha a következő egyenlőtlenség fennáll:

$$f_i(s_i^*, \mathbf{s}_{-i}^*) \geq f_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}^*)$$

minden $s_i \in S_i$ és minden $i = 1, \ldots, n$ esetén.

A definíció tovább erősíthető (szűkíti az egyensúlypontok halmazát), ha a (gyengén) dominálást is megköveteljük.

2.2. definíció. Az $\mathbf{s}^* \in S$ stratégiaprofilt *domináns Nash-egyensúlypont*nak ($DNEP$) nevezzük, ha

$$f_i(s_i^*, \mathbf{s}_{-i}) \geq f_i(s_i, \mathbf{s}_{-i})$$

minden $\mathbf{s} \in S$ stratégiaprofil és minden $i = 1, \ldots, n$ esetén.

Például a *Fogolydilemma* játékban (1.2. példa) a (V, V) stratégiapáros egy $DNEP$.

Általában nem elég, ha azt tesszük fel, hogy a játékosok csak Nash-egyensúlyhoz tartozó stratégiát játszanak. Lehetséges ugyanis, hogy a játékban több NEP is van, ilyenkor elképzelhető, hogy mindegyik játékos egy olyan stratégiát játszik, amely egy NEP része, de a választott stratégiák együttese (a kialakuló stratégiaprofil) nem alkot NEP-et (erre példa a *Nemek harca* játék (1.4. példa)).

2.3. definíció. Ha $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ és $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n)$ a $G = \{S_1, \ldots, S_n; f_1, \ldots, f_n\}$ játék két NEP-je, és

$$\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n),$$

ahol $u_i \in \{s_i, t_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, szintén NEP, akkor azt mondjuk, hogy $\mathbf{s}$ és $\mathbf{t}$ *felcserélhetőek*. Ha a G játéknak csak egyetlen NEP-je van, vagy bármely két NEP-je felcserélhető, akkor azt mondjuk, hogy G rendelkezik a *felcserélhetőségi tulajdonság*gal.

2.4. definíció. A $G = \{S_1, S_2; f_1, f_2\}$ kétszemélyes játékot *antagonisztikus*nak nevezzük, ha bármely $s_1, t_1 \in S_1$ és $s_2, t_2 \in S_2$ stratégiapárosra fennáll, hogy

$$f_1(s_1, s_2) \geq f_1(t_1, t_2) \Longleftrightarrow f_2(s_1, s_2) \leq f_2(t_1, t_2).$$

Az antagonisztikus játékokban a játékosok érdekei csakugyan ellentétesek. A konstans összegű játékok ($f_1 + f_2 = \ konstans$) antagonisztikusak, de nem minden antagonisztikus játék konstans összegű.

2.5. tétel. *Minden antagonisztikus játék rendelkezik a felcserélhetőségi tulajdonsággal és minden NEP-ben mindkét játékos kifizetőfüggvény-értéke azonos.*

Bizonyítás. A tétel bizonyítását gyakorlásképpen az olvasóra bízzuk (lásd a 2.2. feladatot). □

A kifizetőfüggvények értékét (bármely) egyensúlypontban a *játék értékeinek* nevezzük.

Jelöljük E-vel a $G = \{S_1, \ldots, S_n; f_1, \ldots, f_n\}$ játék NEP-jeinek halmazát. Definiáljunk egy $\sim$ bináris relációt az E halmazon a következőképpen: $\mathbf{e} \sim \mathbf{f}$ akkor és csak akkor, ha $\mathbf{e}$ és $\mathbf{f}$ felcserélhetőek, $\mathbf{e}, \mathbf{f} \in E$. Könnyű megmutatni, hogy a $\sim$ reláció reflexív, szimmetrikus, de nem tranzitív (lásd a 2.6. feladatot).

2.6. definíció. Az E egy olyan D részhalmazát, amelyre bármely $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2 \in D$ esetén $\mathbf{d}_1 \sim \mathbf{d}_2$, *Nash-halmaz*nak nevezzük. Ha egy Nash-halmaz nem valódi részhalmaza egyetlen Nash-halmaznak sem, akkor ezt *maximális Nash-halmaznak* hívjuk.

A NEP definíciójából (2.1. definíció) kiderül, hogy a játékosok kifizető-függvényei (hasznossági függvényei) „függetlenek" egymástól, minden játékos saját skálát alkalmazhat a mérésnél. Ez lehetővé teszi, hogy amennyiben ez szükséges, bizonyos transzformációkat végezzünk a kifizetőfüggvényeken anélkül, hogy ezzel a NEP-ek halmazát megváltoztatnánk.

2.7. definíció. Tekintsünk két játékot, amelyek csak a kifizetőfüggvényeikben különböznek:

$$\begin{aligned} G &= \{S_1, \ldots, S_n; f_1, \ldots, f_n\} \\ H &= \{S_1, \ldots, S_n; g_1, \ldots, g_n\}. \end{aligned}$$

A G és H játékokat *stratégiailag ekvivalensnek* nevezzük, ha NEP-jeik halmaza megegyezik.

2.8. tétel. *Tetszőleges $G = \{S_1, \ldots, S_n; f_1, \ldots, f_n\}$ játék esetén, ha $\varphi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton növő minden $i = 1, \ldots, n$-re, akkor a $H = \{S_1, \ldots, S_n; \varphi_1 \circ f_1, \ldots, \varphi_n \circ f_n\}$ játék stratégiailag ekvivalens G-vel (a $\circ$ szimbólum az összetett függvény képzést jelöli).*

Bizonyítás. A tétel bizonyítását az olvasóra bízzuk (lásd a 2.3. feladatot). $\square$

Ha a „kifizetés" pénzben történik, akkor a stratégia választás szempontjából közömbös, hogy milyen pénzegységet használunk és hogy vajon van-e (pozitív vagy negatív) részvételi díj a játékban, mivel a $\varphi_i(f_i) = a_i f_i + b_i$ affin transzformáció szigorúan monoton növekvő, ha $a_i > 0$ minden $i = 1, \ldots, n$-re.

Mivel nagyon súlyos intuitív érvek támogatják mind a szigorúan dominált stratégiák iteratív kiküszöbölésével nyert megoldást (már ha egyáltalán ezzel az eljárással eljutunk hozzá), mind pedig a NEP-et, jogosan vetődik fel a kérdés, hogy milyen kapcsolat létesíthető a kettő között.

2.9. tétel. *A $G = \{S_1, \ldots, S_n; f_1, \ldots, f_n\}$ játékban a szigorúan dominált stratégiák iteratív kiküszöbölésével egyetlen NEP-et sem vesztünk el.*

Bizonyítás. Az állítást indirekt módon igazoljuk. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy minden lépésben pontosan egy stratégiát küszöbölünk ki. Tegyük fel, hogy G egy NEP-jét, mondjuk az $\mathbf{s}^*$ stratégiaprofilt valamikor az eljárás során kiküszöböltük, és hogy s_i^* lett először kiküszöbölve $\mathbf{s}^*$ komponensei közül. Ekkor kell lenni egy $t_i \in S_i$ stratégiának, ami szigorúan dominálja s_i^*-ot, vagyis minden olyan $\mathbf{s}_{-i}$-re, amely a többi játékos még nem kiküszöbölt stratégiáiból állítható össze, a következő egyenlőtlenség fennáll:

$$f_i(t_i, \mathbf{s}_{-i}) > f_i(s_i^*, \mathbf{s}_{-i})$$

Minthogy s_i^* volt az első, amit kiküszöböltünk, $\mathbf{s}_{-i}^*$-re is fenn kell álljon a fenti egyenlőtlenség, ami viszont ellentmond annak, hogy $\mathbf{s}^*$ NEP G-ben. □

2.10. tétel. *Ha a G játék véges, és a szigorúan dominált stratégiák iteratív kiküszöbölésével egyetlen $\mathbf{s}^*$ stratégiaprofil marad, akkor $\mathbf{s}^*$ a G játék egyetlen NEP-je.*

Bizonyítás. Indirekten bizonyítunk. Tegyük fel, hogy $\mathbf{s}^*$ az egyetlen stratégiaprofil, amely túlélte a kiküszöbölési eljárást, és ez nem NEP. Mivel S_i véges, így létezik $t_i^* \in S_i$ $t_i^* \neq s_i^*$, hogy

$$f_i(t_i^*, \mathbf{s}_{-i}^*) \geq f_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}^*) \tag{2.1}$$

fennáll minden $s_i \in S_i$-re. Mivel t_i^* szigorúan dominált, így létezik $r_i \in S_i$, hogy

$$f_i(r_i, \mathbf{s}_{-i}) > f_i(t_i^*, \mathbf{s}_{-i})$$

minden még ki nem küszöbölt $\mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}$-re, így $\mathbf{s}_{-i}^*$-re is, ami ellentmond (2.1)-nek. □

A 2.10. tétel bizonyításából kitűnik, hogy a tétel feltételei túl erősek. Az is világos azonban, hogy általában, tetszőleges G véges játékban, a szigorúan dominált stratégiák kiküszöbölését túlélt stratégiaprofilok nem feltétlenül NEP-ek (lásd a 2.4. feladatot).

2.2. Létezés

A *Fogolydilemma* játékban (1.2. példa) a (V, V) stratégiapáros Nash-egyensúlypont. Ugyancsak NEP a (K, K) és az (O, O) stratégiaprofil a *Nemek harca* játékban (1.4. példa). Nagyon könnyű azonban olyan példát mutatni, ahol a játéknak nincs NEP-je.

2.11. példa (Érmepárosítás)**.** Két játékos azt a játékot játssza, hogy egymástól függetlenül, anélkül, hogy a másik látná, egy pénzérme írás (I) vagy fej (F) oldalát fordítja felfelé. Ha a két érme felül lévő oldala megegyezik, akkor az *1.* játékos nyer 1 egységet a *2.* játékostól, ha pedig különbözőek, akkor a *2.* játékos nyer egy egységet az 1. játékostól. Ez egy véges, kétszemélyes zérusösszegű játék, így elég az első játékos kifizetőmátrixát megadni (az első sor és oszlop I-t, a második F-et reprezentálja):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Könnyen látható, hogy ennek a játéknak nincs NEP-je.

Nagyon lényeges kérdés, hogy milyen feltételek mellett van egy játéknak NEP-je. A normál forma „matematikai tisztasága" és egyszerűsége lehetővé teszi, hogy a stratégiahalmazokra és a kifizetőfüggvényekre tett különböző feltételezések mellett mély, és a játékok széles osztályára vonatkozó egzisztenciatételeket bizonyítsunk. Noha ezek a tételek általánosabb terekben is bizonyíthatóak, mi mégis a gyakorlati szempontból kielégítő véges dimenzióban maradunk.

Induljunk ki a

$$G = \{S_1, \ldots, S_n; f_1, \ldots, f_n\}$$

normál formában adott játékból, ahol most feltesszük, hogy $S_i \subseteq \mathbb{R}^{k_i}$, $(i = 1, \ldots, n)$. A stratégiaprofilok ill. a csonka stratégiaprofilok halmazainak jelölésére továbbra is az S és az S_{-i}, ezek elemeire pedig az $\mathbf{s}$ és $\mathbf{s}_{-i}$ szimbólumokat használjuk. Idézzük fel, hogy az $\mathbf{s}^*$ stratégiaprofil NEP, ha

$$f_i(s_i^*, \mathbf{s}_{-i}^*) \geq f_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}^*)$$

minden $s_i \in S_i$ és minden $i = 1, \ldots, n$ esetén.

A NEP-et lehet jellemezni az ún. legjobbválasz-leképezéssel (best reply). Az i játékos $B_i : S \to S_i$ legjobbválasz-leképezése a következő:

$$B_i(\mathbf{s}) = \{t_i \in S_i \mid f_i(t_i, \mathbf{s}_{-i}) \geq f_i(r_i,\ \mathbf{s}_{-i}),\ \text{minden } r_i \in S_i\text{-re}\}.$$

$B_i(\mathbf{s})$ az i játékos legjobb stratégiáit tartalmazza, ha a többi játékos az $\mathbf{s}_{-i}$ csonka stratégiaprofilban szereplő stratégiákat játssza. Az eddigi feltevések mellett $B_i(\mathbf{s})$ akár üres is lehet.

2.12. definíció. Az egész játékra vonatkozó $B : S \to S$ legjobbválasz-leképezés legyen

$$B(\mathbf{s}) = B_1(\mathbf{s}) \times \cdots \times B_n(\mathbf{s}),$$

vagyis $\mathbf{t} \in B(\mathbf{s})$ akkor és csak akkor, ha $t_i \in B_i(\mathbf{s})$ minden $i = 1, \ldots, n$-re.

A következő megállapítás a NEP definíciójának egyenes következménye:

2.13. segédtétel. *Az* $\mathbf{s}^* \in S$ *stratégiaprofil akkor és csak akkor* NEP*-je a* G *játéknak, ha* $\mathbf{s}^*$ *fixpontja a* B *legjobbválasz-leképezésnek, vagyis ha* $\mathbf{s}^* \in B(\mathbf{s}^*)$.

Bizonyítás. A bizonyítást feladatként tűztük ki: 2.8. feladat. □

Ez a megállapítás egy általános módszert ad a kezünkbe az egzisztenciatételek bizonyításánál: olyan feltételeket kell keresni, amelyek mellett a legjobbválasz-leképezésre teljesülnek valamely fixponttétel feltételei. Kezdjük egy viszonylag egyszerű esettel.

2.14. tétel. *Legyen* $G = \{S_1, \ldots, S_n; f_1, \ldots, f_n\}$ *normál formában megadott játék, ahol a stratégiahalmazok véges dimenziós euklideszi terek nemüres, konvex, kompakt részhalmazai, és a kifizetőfüggvények folytonosak a stratégiaprofilok* S *halmazán. Ha a* G *játékra vonatkozó* B *legjobbválasz-leképezés egyértékű, akkor* G*-nek van legalább egy* NEP*-je.*

Bizonyítás. Mivel B_i egyértékű, f_i folytonos, S_i kompakt, ezért B_i az $\mathbf{s}_{-i}$ paramétervektor folytonos függvénye (lásd a 2.9. feladatot). Ekkor a B az S kompakt, konvex halmaz önmagára való folytonos leképezése. A Brouwer-fixponttétel szerint (lásd az B. függeléket) B-nek van fixpontja, ami a G játék NEP-je. □

Egyszerűbb esetekben a 2.14. tétel alapján ki is tudjuk számolni az egyensúlypontokat. Ehhez az kell, hogy a legjobbválasz-leképezés viszonylag egyszerű legyen, és a stratégia halmazok alacsony dimenziósak (lehetőleg egydimenziósak) legyenek.

2.15. példa. Visszatérünk az 1.5. példában leírt szimmetrikus Cournot-duopóliumhoz.

A dominált stratégiák elhagyása után a stratégiahalmazok korlátos, zárt intervallumok. A kifizetőfüggvények konkáv kvadratikus függvények. Ha a második vállalat kibocsátása q, akkor az első vállalatnak erre a legjobb válasza a

$$Q(x) = x(a - b(x + q)) - cx$$

kvadratikus függvényt maximalizáló $x = \frac{a-c}{2b} - \frac{q}{2}$ kibocsátás. A legjobb válasz az egyik játékos q kibocsátására $\max\{\frac{a-c}{2b} - \frac{q}{2}, 0\}$ és a legjobbválasz-leképezés egyértékű (vagyis egy függvény). Az (egyetlen) fixpontot a $q = \frac{a-c}{2b} - \frac{q}{2}$ egyenlet megoldásával kapjuk:

$$q = \frac{a-c}{3b}.$$

Az egész iparág kibocsátása (a szimmetria miatt) $\frac{2(a-c)}{3b}$, az ár pedig $\frac{a+2c}{3}$. Ugyancsak egyszerű számítással (a profitfüggvény maximalizálásával) kapjuk, hogy a monopol kibocsátás $\frac{a-c}{2b}$, a monopolár pedig $\frac{a+c}{2}$. A versenyzői egyensúlyi ár a c határköltség, az iparági kibocsátás pedig $\frac{a-c}{b}$. Az adott feltételek mellett kis számolással látjuk a korántsem meglepő eredményt: a duopolár nagyobb, mint a versenyzői egyensúlyi ár, de kisebb a monopolárnál, míg a duopólium összkibocsátása nagyobb, mint a monopóliumé, de kisebb, mint a versenyzői egyensúly esetén.

Nézzük most azt az esetet, amikor a legjobbválasz-leképezés többértékű (halmazértékű).

Azt már láttuk, hogy a legegyszerűbbnek tartott véges játékok esetében általában nem számíthatunk arra, hogy a NEP létezik (lásd a 2.11. példát). Kedvezőbb a helyzet akkor, ha megengedjük, hogy a játékosok véletlenszerűen válasszanak a (véges számú) stratégiáik közül. Ekkor stratégiahalmazaik az eredeti (ebben a kontextusban *tiszta stratégiák*nak nevezett) stratégiákon értelmezett valószínűségi vektorok összességei, míg kifizetőfüggvényeik a választott stratégiaprofilból származtatott valószínűségekkel vett várható kifizetések (a kifizetések várható értéke) lesznek. Ekkor egy új játékhoz jutunk, amelyet az eredeti véges játék *kevert bővítésének* nevezünk. Magát az n-személyes véges játékot és annak kevert bővítését is megadhatjuk n darab n-dimenziós tömbbel (polimátrixszal), amelyek az egyes játékosok kifizetéseit adják meg az összes stratégiaprofil esetében.

Jelölje $a^i_{pq\ldots uv}$ az i játékos kifizetését. Ekkor, ha az 1. játékos a p, a 2. játékos a q, …, az $n-1$-edik az u, az n-edik pedig a v tiszta stratégiáját játssza, akkor a kevert bővítésben az i játékos kifizetése

$$g_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \ldots, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{p,q,\ldots,u,v} a^i_{pq\ldots uv} x_p y_q \cdots w_u z_v$$

várható érték, ahol x_p annak a valószínűsége, hogy az 1. játékos a p-edik tiszta stratégiáját játssza. Hasonló az $y_q, \ldots, w_u, z_v$ valószínűségek jelentése.

A várható érték számításnál ezeket a valószínűségeket azért szoroztuk össze, mert feltettük, hogy a játékosok egymástól függetlenül választanak stratégiát, ami a jelen esetben az egyes tiszta stratégiákhoz rendelt valószínűségek megválasztását jelenti.

A $G = \{S_1, \ldots, S_n; f_1, \ldots, f_n\}$ véges játék kevert bővítését normál formában a $G_K = \{T_1, \ldots, T_n; g_1, \ldots, g_n\}$ szimbólummal jelöljük, ahol $T_1, \ldots, T_n$ a megfelelő dimenziós egységszimplexek, a $g_1, \ldots, g_n$ kifizetőfüggvények értékei pedig az előzőekben definiált várható értékek.

A kevert bővítést sokféleképpen lehet interpretálni. A legkézenfekvőbb a következő: a játékosok először egymástól függetlenül választanak egy valószínűségeloszlást (az egységszimplex egy elemét), majd szintén egymástól függetlenül a választott valószínűségeloszlással véletlenszerűen választanak egy tiszta stratégiát, majd pedig megtörténik a kifizetés. A játékosok a hosszú távú átlagos kifizetéseik (a várható kifizetések) maximalizálására törekszenek. Vegyük észre azt a fontos dolgot, hogy a játék sokszori lejátszása során a tapasztaltak függvényében már nem lehet megváltoztatni az eredetileg választott eloszlást. A későbbiekben egyéb interpretációkkal is foglalkozunk.

Könnyen igazolhatjuk, hogy a 2.11. példában az $((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$ kevert stratégiákból álló stratégiaprofil a kevert bővítésnek NEP-je (lásd a 2.13. feladatot). [Nash (1951)] bizonyította be először, hogy a véges játékok kevert bővítésének mindig van legalább egy NEP-je. Ezt a tételt most nem bizonyítjuk külön, egy általánosabb tétel speciális eseteként fogjuk megkapni.

2.16. tétel. *Legyen $G = \{S_1, \ldots, S_n; f_1, \ldots, f_n\}$ olyan játék, amely eleget tesz az alábbi feltételeknek minden $i = 1, \ldots, n$-re:*

1. *S_i egy véges dimenziós euklideszi tér nem üres, konvex, kompakt részhalmaza,*

2. *f_i felülről félig folytonos (a továbbiakban f.f.f.) a stratégiaprofilok S halmazán,*

3. *bármely rögzített $\mathbf{s}_i \in S_i$ esetén az $f(\mathbf{s}_i, \cdot)$ függvény alulról félig folytonos (a továbbiakban a.f.f.) az S_{-i} csonka stratégiaprofilok halmazán,*

4. *minden $\mathbf{s} \in S$ esetén a $B_i(\mathbf{s})$ legjobbválasz-halmaz konvex.*

Ekkor a G játéknak van NEP-je.

Bizonyítás. A B legjobbválasz-leképezés értékei nem üresek, hiszen minden stratégiahalmaz kompakt és minden kifizetőfüggvény f.f.f.

Először azt mutatjuk meg, hogy a B leképezés gráfja: $G_B = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{x} \in S,\ \mathbf{y} \in B(\mathbf{x})\}$ zárt. Tegyük fel, hogy nem az. Ekkor van olyan $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) \notin G_B$, hogy $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$ minden környezetének $S \times S$-sel közös része tartalmazza G_B legalább egy pontját. Mivel S zárt, így $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) \in S \times S$, továbbá $\mathbf{y}^0 \notin B(\mathbf{x}^0)$, vagyis van legalább egy játékos (mondjuk az *1.* játékos), aki számára $\mathbf{y}_1^0$ nem a legjobb válasz. Ekkor van olyan $\mathbf{y}_1^1 \in S_1$, hogy

$$f_1(\mathbf{y}_1^1, \mathbf{x}_2^0, \ldots, \mathbf{x}_n^0) > f_1(\mathbf{y}_1^0, \mathbf{x}_2^0, \ldots, \mathbf{x}_n^0). \tag{2.2}$$

Definiáljuk az $F : S^2 \to \mathbb{R}$ függvényt a következőképpen:

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_1(\mathbf{y}_1^1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n) - f_1(\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$$

A 2. és 3. feltételek miatt F a.f.f., így a $C = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in S^2 \mid F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0\}$ halmaz zárt. Minden $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in G_B$ esetén $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0$, de az 1. feltétel miatt $F(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) > 0$, ami ellentmond C zártságának. A B legjobbválasz leképezés így kielégíti a Kakutani-fixponttétel (lásd az B. függeléket) minden feltételét és így van fixpontja, ami a G játék NEP-je. □

A 2.16. tétel 4. feltétele teljesülésének egy elégséges feltétele az, hogy az $f_i(\cdot, \mathbf{s}_{-i})$ kifizetőfüggvény kvázikonkáv minden rögzített $\mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}$-re és minden $i = 1, \ldots, n$-re. Ha az $f_i(\cdot, \mathbf{s}_{-i})$ függvények konkávak (természetesen ekkor kvázikonkávak is), és az f_i függvények folytonosak az S-en, akkor [Nikaido és Isoda (1955)] tételét kapjuk, ha pedig az $f_i(\cdot, \mathbf{s}_{-i})$ függvények lineárisak, és az S_i halmazok az egységszimplexek, akkor [Nash (1951)] eredeti egzisztenciatételét kapjuk speciális esetként.

2.17. példa (Gyáva nyúl)**.** Két autóvezető, Péter és Pál a következő őrült játékot játssza. Egymás felé hajtanak egy keskeny úton, ahol csak egy autónak van hely. Bátorságukat szeretnék megmutatni azzal, hogy nem térnek ki előbb, mint a másik. Mindkettőnek két tiszta stratégiája van: Kitér (K), nem tér ki (N). A 2.1. ábrán a hasznosságaikat a következő kifizetések jellemzik: az első szám Péteré, aki a „sorjátékos”, a második szám Pálé, aki az „oszlopjátékos”.

A játék kevert bővítésében Péter x és $(1-x)$ valószínűségekkel alkalmazza a K és az N stratégiákat, Péter pedig y és $(1-y)$ valószínűséggel az ő tiszta stratégiáit. Ekkor egyszerű számolással kapjuk, hogy Péter legjobbválasz-leképezése:

$$B_{\text{Péter}}(y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \frac{2}{3} < y \leq 1 \\ 1, & \text{ha } 0 \leq y < \frac{2}{3} \\ [0,1], & \text{ha } y = \frac{2}{3} \end{cases} .$$

Hasonlóan, Pál legjobbválasz-leképezése:

$$B_{\text{Pál}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \frac{2}{3} < x \leq 1 \\ 1, & \text{ha } 0 \leq x < \frac{2}{3} \\ [0,1], & \text{ha } x = \frac{2}{3} \end{cases} .$$

A legjobbválasz-leképezésnek három fixpontja van (a NEP-ek):

$$\begin{aligned} x &= 0, & y &= 1 \\ x &= 1, & y &= 0 \\ x &= \tfrac{2}{3}, & y &= \tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

		Pál	
		K	N
Péter	K	(6,6)	(2,7)
	N	(7,2)	(0,0)

2.1. ábra. Gyáva nyúl

2.18. példa (Bertrand-duopolium)**.** A Cournot-duopoliumban a termelők a termelési mennyiségekről döntenek. Bertrand szerint a döntési változó az ár, és a fogyasztók az alacsonyabb árat kérő termelőt részesítik előnyben, azonos ár esetén véletlenszerűen, azonos valószínűséggel választják valamelyik vállalatot. Jelöljük c-vel a két vállalat közös pozitív termelési egységköltségét, D-vel pedig a keresleti függvényt, amely folytonos, monoton fogyó és pozitív árakhoz pozitív keresletet rendel. A vállalatok által kért árak: p_1, p_2. Ekkor az első vállalat terméke iránti kereslet:

$$D_1(p_1,p_2) = \begin{cases} D(p_1), & \text{ha } p_1 < p_2 \\ \dfrac{D(p_1)}{2}, & \text{ha } p_1 = p_2 \\ 0, & \text{különben} \end{cases}.$$

Hasonlóan kapjuk a második vállalat terméke iránti $D_2(p_1,p_2)$ keresletet is. A vállalatok profitja $(p_1 - c)D_1(p_1,p_2)$ és $(p_2 - c)D_2(p_1,p_2)$. Ennek a játéknak egyetlen NEP-je van: mindkét játékos a versenyzői egyensúlyt választja, ahol az ár egyenlő az egységköltséggel: $p_1 = p_2 = c$. Ezt azonnal lehet látni, mivel bármely c-nél nagyobb árral próbálkozna az egyik vállalat, a másik aláígérhetne és ezzel egyoldalúan pozitív profithoz jutna.

A 2.18. példa eredményét *Bertrand-paradoxonnak* is szokták nevezni, mivel intuíciónkkal ellentétesen azt állítja, hogy a versenyzői egyensúly már két vállalat esetén is megvalósul, és nem magyarázza meg, hogy miért akarnak egyáltalán a vállalatok termelni, ha nincs nyereségük. A paradoxont a modell túlságos egyszerűsítései magyarázzák, mivel többek között, nem foglalkozik azzal, hogy mi van akkor, ha a korlátos kapacitás miatt egyik vállalat sem képes kielégíteni a teljes keresletet. Az Edgeworth–Bertrand-modell, amelyben a vállalatok termelési és árdöntéseket is hoznak, igyekszik pontosabb magyarázattal szolgálni.

A Bertrand-paradoxon minden hibája ellenére érdekes, mert élesen rávilágít egy olyan esetre, ahol kisszámú termelő késhegyig menő harcot vív egymással.

2.3. Szimmetria

Nagyon gyakori eset, amikor egy konfliktushelyzetben a játékosok azonos pozíciókat foglalnak el, és lényegében csak abban különböznek, hogy milyen indexszel láttuk el őket. Láttunk példát arra, hogy ilyenkor lehet olyan NEP-je a játéknak amelyben a kifizetések nem azonosak, tehát az egyensúlypontban már nem szimmetrikus a játékosok helyzete. Erre jó példa a *Gyáva nyúl* játék (2.17. példa), amelynek három egyensúlypontja is van, amelyből kettő nem szimmetrikus, a harmadik viszont az. Kérdés, hogy a szimmetrikus játékoknak van-e mindig szimmetrikus NEP-jük? Ehhez a szimmetriát formálisan is definiálni kell.

2.19. definíció. Legyen $G = \{S_1, \dots, S_n; f_1, \dots, f_n\}$ egy játék normál formában. A G játékot szimmetrikusnak nevezzük, ha $S_1 = S_2 = \dots = S_n$ és ha a játékosok bármely ψ permutációja esetén $f_i(s_1, \dots, s_n) = f_{\psi(i)}(s_{\psi(1)}, \dots, s_{\psi(n)})$ fennáll minden $(s_1, \dots, s_n) \in S$ -re.

A szimmetria tulajdonképpen azt jelenti, hogy minden játékosnak ugyanaz a stratégiahalmaza és a játék ugyanaz marad, ha a játékosokat átindexeljük. Egy stratégiaprofilt *szimmetrikus*nak nevezünk, ha minden játékosnak azonos a stratégiája. Ha ez a stratégiaprofil egy NEP, akkor *szimmetrikus* NEP-nek hívjuk.

A szimmetrikus NEP létezésének bizonyításához szükségünk lesz *Nash* eredeti bizonyítására, amelyet véges játékok kevert bővítésére adott 1950-ben, és amelyben nem használta a Kakutani-fixponttételt, csak a Brouwer-fixponttételt. A bizonyítás önmagában is érdekes, egyszerű és szellemes.

Legyen $G = \{S_1, \dots, S_n; f_1, \dots, f_n\}$ egy véges játék kevert bővítése, ahol S_i az r_i számú tiszta stratégia halmazán értelmezett valószínűségeloszlások szimplexe, $i = 1, \dots, n$; az $f_1, \dots, f_n$ pedig a várható kifizetéseket jelöli. Jelöljünk egy valószínűségi vektort $\mathbf{p}_i$-vel, és $\mathbf{e}_{ij}$-vel azt az eloszlást, amely 1 valószínűséget rendel az i játékos j tiszta stratégiájához, $j = 1, \dots, r_i$, $i = 1, \dots, n$. Szokás szerint $\mathbf{p}_{-i}$ jelöli az i játékos stratégiáját nem tartalmazó csonka kevert stratégiaprofilt. A stratégiaprofilok halmaza legyen S. Ezekkel a jelölésekkel egy $\mathbf{p}^* \in S$ a G játék NEP-je, ha

$$f_i(\mathbf{p}_i^*, \mathbf{p}_{-i}^*) \geq f_i(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{-i}^*)$$

fennáll minden $\mathbf{p}_i \in S_i$ és $i = 1, \dots, n$ esetében.

Definiáljuk a $g_{ij} : S \to \mathbb{R}$ és az $y_{ij} : S \to \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, r_i$, $i = 1, \dots, n$ függvényeket a következő módon:

$$g_{ij}(\mathbf{p}) = \max\{f_i(\mathbf{e}_{ij}, \mathbf{p}_{-i}) - f_i(\mathbf{p}), 0\}.$$

$$y_{ij}(\mathbf{p}) = \frac{p_{ij} + g_{ij}(\mathbf{p})}{1 + \sum_{l=1}^{r_i} g_{il}(\mathbf{p})}.$$

Az y_{ij} függvényekből összeállított $\mathbf{y}$ vektor-vektor függvény a stratégiaprofilok S kompakt, konvex halmazát folytonosan önmagába képezi le. A Brouwer-fixponttétel szerint van olyan $\mathbf{p}^* \in S$, hogy $\mathbf{p}^* = \mathbf{y}(\mathbf{p}^*)$. Most belátjuk, hogy ez a $\mathbf{p}^*$ NEP.

Adott i-re legyen k egy olyan index, amelyre $f_i(\mathbf{e}_{ik}, \mathbf{p}^*_{-i}) \le f_i(\mathbf{e}_{ij}, \mathbf{p}^*_{-i})$ minden olyan j-re, amelyre $p^*_{ij} > 0$. Mivel $f_i(\mathbf{p}^*)$ az $f_i(\mathbf{e}_{ij}, \mathbf{p}^*_{-i})$ értékek konvex lineáris kombinációja, ezért $f_i(\mathbf{e}_{ik}, \mathbf{p}^*_{-i}) - f_i(\mathbf{p}^*) \le 0$, vagyis $g_{ik}(\mathbf{p}^*) = 0$. Ekkor $p^*_{ik} = y_{ik}(\mathbf{p}^*)$ csak úgy lehet, ha $\sum_{l=1}^{r_i} g_{il}(\mathbf{p}^*) = 0$, amiből viszont $f_i(\mathbf{e}_{ij}, \mathbf{p}^*_{-i}) \le f_i(\mathbf{p}^*)$, majd p_{ij}-vel mindkét oldalt beszorozva és összegezve a $f_i(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}^*_{-i}) \le f_i(\mathbf{p}^*_i, \mathbf{p}^*_{-i})$ egyenlőtlenséget kapjuk, ami azt jelenti, hogy $\mathbf{p}^*$ NEP.

Könnyű látni, hogy minden NEP fixpontja az $\mathbf{y}$ leképezésnek.

2.20. tétel. *Tetszőleges G szimmetrikus véges játék kevert bővítésének van szimmetrikus NEP-je.*

Bizonyítás. Egyszerű behelyettesítéssel, a szimmetria kihasználásával látható, hogy ha $\mathbf{p}$ szimmetrikus, akkor $f_i(\mathbf{e}_{ij}, \mathbf{p}_{-i}) - f_i(\mathbf{p}) = f_k(\mathbf{e}_{kj}, \mathbf{p}_{-k}) - f_k(\mathbf{p})$ minden $i, k \in \{1, \dots, n\}$-re, amiből $g_{ij}(\mathbf{p}) = g_{kj}(\mathbf{p})$ és $y_{ij}(\mathbf{p}) = y_{kj}(\mathbf{p})$ következik. Tekintsük most a szimmetrikus stratégiaprofilok halmazát, amely nyilván nem üres (az a stratégiaprofil, amelyben minden tiszta stratégia valószínűsége egyenlő, szimmetrikus), kompakt, konvex, így a Brouwer-fixponttétel szerint van fixpontja az $\mathbf{y}$ leképezésnek, amely egy szimmetrikus NEP. □

2.21. megjegyzés. A *Gyáva nyúl* játékban láttuk, hogy a tiszta stratégiák halmazán nincs szimmetrikus NEP, biztosan tudjuk azonban, hogy a kevert stratégiák halmazán van.

2.4. Egyértelműség

Azt már az eddigiekben is láttuk, hogy a NEP egyértelműsége kívánatos tulajdonsága egy játéknak, hiszen ilyenkor a felcserélhetőség hiánya fel sem merülhet problémaként. Ezen kívül számos esetben a NEP kiszámítását is megkönnyíti. Az világos, hogy az egyértelmű NEP-pel rendelkező játékokat a konkáv játékok körében kell keresni.

2.22. definíció. A $G = \{S_1, \dots, S_n; f_1, \dots, f_n\}$ játék pontosan akkor konkáv, ha az $S = S_1, \dots, S_n$ stratégiahalmazok kompaktak és konvexek, és az $f_i(s_i, \mathbf{s}_{-i})$ függvény konkáv s_i-ben tetszőlegesen rögzített $\mathbf{s}_{-i}$ mellett minden $i = 1, \dots, n$-re.

Ha analógiára akarunk támaszkodni, akkor tekintsük az „egyszemélyes” játékot, amelyben az egyetlen döntéshozó a $\max_{\mathbf{x}\in S} f(\mathbf{x})$ feladatot oldja meg (S véges dimenziós euklideszi tér konvex, kompakt részhalmaza, f pedig konkáv S-en). Ekkor f szigorú konkavitása elégséges feltétele az egyértelmű maximum létezésének.

Több játékos esetében ennek az analógiája, vagyis hogy minden játékos kifizetőfüggvénye a saját változójában szigorúan konkáv, már nem elégséges, mint azt a következő példa mutatja.

2.23. példa. Tekintsük azt a szimmetrikus Cournot-duopóliumot, amelyben a játékosok stratégiahalmaza a $[0,1]$ intervallum, a költségfüggvény $c : [0,1] \to \mathbb{R}$, $c(x) = \frac{1}{2}x$, az inverz keresleti függvény pedig $p : [0,2] \to \mathbb{R}$:

$$p(y) = \begin{cases} \frac{7}{4} - \frac{1}{2}y, & \text{ha } 0 \le y \le \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} - y, & \text{különben} \end{cases}.$$

A profitfüggvények: $f_i : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, $f_i(x_1, x_2) = x_i p(x_1+x_2) - \frac{1}{2}x_i$, $i \in \{1,2\}$.

Elemi számolással lehet igazolni, hogy f_i szigorúan konkáv függvénye x_i-nek ($i \in \{1,2\}$) a $[0,1]$ intervallumon.

Ugyancsak egyszerű megmutatni (2.10. feladat), hogy az $X^* = \{(x_1,x_2) | \frac{1}{2} \le x_1 \le 1, \frac{1}{2} \le x_2 \le 1, x_1 + x_2 = \frac{3}{2}\}$ halmaz minden eleme NEP-je a Cournot-duopólium játéknak.

További (vagy más) feltételek kellenek az egyértelműséghez.

2.24. tétel. *Legyen $G = \{S_1, \ldots, S_n; f_1, \ldots, f_n\}$ konkáv játék, és tegyük fel, hogy a B legjobbválasz-leképezés egyértékű. Ha a B függvény kontrakció, akkor a G-nek csak egy egyensúlypontja van.*

Bizonyítás. Indirekten tegyük fel, hogy $\mathbf{s}$ és $\mathbf{t}$ két különböző egyensúlypont. B kontrakció, így van olyan d távolságfüggvény és $0 \le \lambda < 1$ valós szám, hogy

$$d(B(\mathbf{s}), B(\mathbf{t})) \le \lambda d(\mathbf{s}, \mathbf{t}). \tag{2.3}$$

$\mathbf{s}$ és $\mathbf{t}$ a B leképezés fixpontjai, tehát $\mathbf{s} = B(\mathbf{s})$, $\mathbf{t} = B(\mathbf{t})$, ezért a (2.3) egyenlőség csak úgy állhat fenn, ha $\mathbf{s}$ és $\mathbf{t}$ távolsága nulla, vagyis ha $\mathbf{s} = \mathbf{t}$, ami ellentmondás. □

A 2.24. tételben szereplő feltételek mellett nemcsak az egyensúlypont unicitását tudtuk igazolni, hanem egy olyan egyszerű iterációs eljárást is meg tudunk adni, amely bármely nem egyensúlyi pontból az egyetlen NEP-be konvergál. Ez az iteráció a jól ismert *Picard-iteráció*, amely szerint egy tetszőleges $\mathbf{t}_1 \in S$-ből kiindulva a $\{\mathbf{t}_k\}$ sorozat elemeit a $\{\mathbf{t}_{k+1}\} = B(\mathbf{t}_k)$ behelyettesítéssel kapjuk.

2.25. tétel. *A Picard-iterációval kapott* $\{\mathbf{t}_k\}$ *sorozat konvergens, és a* $\mathbf{t}^\star$ *határértéke az egyetlen* NEP.

Bizonyítás. A $\{\mathbf{t}_k\}$ sorozat konvergenciája az alábbi egyenlőtlenségekből következik ($\{\mathbf{t}_k\}$ Cauchy-sorozat); tetszőleges k-ra:

$$\mid \mathbf{t}_{k+1} - \mathbf{t}_k \mid = \mid B(\mathbf{t}_k) - B(\mathbf{t}_{k-1}) \mid \leq \lambda \mid \mathbf{t}_k - \mathbf{t}_{k-1} \mid \leq \lambda^{k-1} \mid \mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1 \mid .$$

Legyen a $\{\mathbf{t}_k\}$ sorozat határértéke $\mathbf{t}^\star$. Mivel S zárt (a korlátosság nem szükséges!), ezért $\mathbf{t}^\star \in S$. Mivel $\mathbf{t}^\star$ a $\{\mathbf{t}_k\}$ sorozat határértéke, ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan elég nagy k_0 , hogy minden $k \geq k_0$ esetén $\mid \mathbf{t}_k - \mathbf{t}^* \mid < \varepsilon$. Ugyanakkor a kontrakció definíciójából következnek az alábbi egyenlőtlenségek :

$$\mid \mathbf{t}_{k+1} - B(\mathbf{t}^*) \mid = \mid B(\mathbf{t}_k) - B(\mathbf{t}^*) \mid \leq \lambda \mid \mathbf{t}_k - \mathbf{t}^* \mid < \lambda\varepsilon.$$

A háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$\mid \mathbf{t}^* - B(\mathbf{t}^*) \mid \leq \mid \mathbf{t}^* - \mathbf{t}_{k+1} \mid + \mid \mathbf{t}_{k+1} - B(\mathbf{t}^*) \mid \leq (\lambda + 1)\varepsilon.$$

amiből a $\mathbf{t}^* = B(\mathbf{t}^*)$ következik, vagyis $\mathbf{t}^*$ a G játék egyetlen NEP-je. □

A *Picard-iteráció* interpretációja is vonzó: A játékosok a többiek korábbi stratégiaválasztásaira legjobb válaszokat adva úgy közelítik meg egyre jobban az egyensúlyi stratégiáikat, hogy ennek az állapotnak az elérése nem szerepel explicit céljaik között.

Más jellegű feltételeket is kaphatunk az egyértelműségre.

Legyen $G = \{S_1, \ldots, S_n; f_1, \ldots, f_n\}$ egy konkáv játék. Tegyük fel, hogy int $S \neq \emptyset$, és minden i-re az f_i kifizetőfüggvények kétszer folytonosan differenciálhatóak az int S-en, saját változójukban szigorúan konkávak, valamint bármely $\mathbf{s} \in S$-re $B(\mathbf{s}) \in$ int S. Jelölje $\mathbf{J}(\mathbf{s})$ a $\mathbf{g}(\mathbf{s})$ vektor-vektor függvény Jacobi-mátrixát, ahol

$$\mathbf{g}(\mathbf{s}) = \begin{pmatrix} f_1'(\mathbf{s}) \\ \vdots \\ f_n'(\mathbf{s}) \end{pmatrix}$$

a kifizetőfüggvények gradienseinek egymás alá írásával összeállított vektor. A kifizetőfüggvények grádiensein most a saját változók szerinti parciális deriváltakból összeállított vektort értjük.

2.26. tétel. *Legyen* $G = \{S_1, \ldots, S_n; f_1, \ldots, f_n\}$ *egy konkáv játék. Ha a* $\mathbf{J}(\mathbf{s}) + \mathbf{J}^{\mathrm{T}}(\mathbf{s})$ *mátrix negatív definit minden* $\mathbf{s}$*-re, akkor* G*-nek pontosan egy egyensúlypontja van.*

Bizonyítás. Indirekten tegyük fel, hogy $\mathbf{s}^0$ és $\mathbf{t}^0$ is egy NEP és $\mathbf{s}^0 \neq \mathbf{t}^0$. A feltételekből következik, hogy $\mathbf{g}(\mathbf{s}^0) = \mathbf{g}(\mathbf{t}^0) = \mathbf{0}$. A $\mathbf{g} : \text{int } S \to \mathbb{R}^n$ leképezés kielégíti a Gale-Nikaido–tétel (lásd a C. függeléket) feltételeit, ezért a tétel értelmében invertálható, tehát a $\mathbf{0}$ pont inverzképe nem állhat két különböző pontból, így $\mathbf{s}^0 = \mathbf{t}^0$. □

A 2.26. tétel akkor is érvényben marad, ha azt az erős feltételt, hogy a B leképezés legyen egyértékű, elhagyjuk és helyette feltesszük, hogy a stratégia halmazok véges számú, folytonosan differenciálható függvénnyel definiált egyenlőtlenséggel vannak megadva (ebben a formában a tétel [Rosen (1965)]-től származik).

2.27. példa (Oligopólium)**.** A duopólium természetes általánosítása az oligopólium. *Oligopóliumról* akkor beszélünk, ha a piacon jelenlévő vállalatok száma nagyobb, mint egy, de olyan kicsi, hogy nem lehet elhanyagolni az egyes szereplők döntései közötti kölcsönhatásokat. Vegyük a legegyszerűbb esetet, amikor a piacon n egyforma vállalat tevékenykedik, pozitív egységköltségük egyaránt c, kapacitáskorlátjuk $k > 0$. A piac keresleti függvénye lineáris: $Q = \sum_j q_j = Q(p) = a - bp$, ahol $a, b > 0$, és feltesszük, hogy $0 \le a - bc \le (n+1)k$, azaz a $p = c$ minimumárhoz tartozó kereslet nem negatív és ezt a keresletet $(n+1)$ vállalat képes kielégíteni, ha teljes kapacitáson termel.

Vezessük be az $\alpha = \frac{a}{b}$ és a $\beta = \frac{1}{b}$ jelöléseket. Ekkor az i vállalat profitja: $f_i(q_1, \ldots, q_n) = q_i(\alpha - \beta \sum_{j=1}^n q_j) - cq_i$. Látjuk, hogy rögzített $\mathbf{q}_{-i}$-re, az $f_i(q_i, \mathbf{q}_{-i})$ konkáv kvadratikus függvény. Tegyük fel most átmenetileg, hogy nincsenek kapacitáskorlátok. Írjuk fel a NEP elsőrendű feltételeit:

$$\alpha - 2\beta q_i - \beta \sum_{j \neq i} q_j - c = 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Ennek az egyenletrendszernek az egyetlen megoldása: $q_i = \frac{a-bc}{n+1}$, $i = 1, \ldots, n$. Feltételeink miatt $0 \le q_i \le k$, $i = 1, \ldots, n$, így ez az egyetlen NEP. Ekkor az iparág egyensúlyi összkibocsátása: $Q = \frac{n(a-bc)}{n+1}$, az egyensúlyi ár pedig $p = \frac{a+nbc}{(n+1)b}$. Láthatjuk, hogy a versenyző vállalatok számának növekedésével a kínálat nő, az ár pedig csökken. A két végletet speciális esetként kapjuk: az $n = 1$ behelyettesítéssel a $p_M = \frac{a+bc}{2b}$ monopolárat és a $Q_M = \frac{a-bc}{2}$ össztermelést, míg az $n \to \infty$ határérték képzéssel a $p_C = c$ versenyzői árat és a $Q_C = a - bc$ össztermelést kapjuk. A 2.15. példában tárgyalt Cournot-duopóliumra vonatkozó eredményeket az $n = 2$ behelyettesítéssel kapjuk. Érdemes megjegyezni, hogy a monopol összkibocsátás a versenyzői egyensúlyi összkibocsátásnak pont a fele.

Könnyen látható, hogy a fentiekben definiált oligopólium játék kielégíti a 2.26. tétel feltételeit (lásd a 2.16. feladatot).

2.5. A Nash-egyensúly axiomatikus jellemzése†

A NEP fogalma, mint a stabilitás játékelméleti megtestesülése nagyon vonzó és a játékelmélet sarokkövét jelenti. Mint nagyon fontos fogalmat érdemes más szemszögből is megközelíteni. Maga *Nash* mutatott példát arra, hogy ha egy fogalmat axiomatikusan is megalapozunk, akkor még szilárdabban áll a lábán, és még olyan tulajdonságait is fel tudjuk fedezni, amelyek egyébként rejtve maradnak. A következőben a [Peleg és Tijs (1996)]-tól származó axiomatizálást ismertetjük.

Egy kicsit más jelölést alkalmazva tekintsünk a $G = \{N, (S_i)_{i\in N}, (f_i)_{i\in N}\}$ játékot normál formában, ahol N a játékosok véges halmaza, S_i az i játékos stratégiahalmaza, és $f_i : \times_{j\in N} S_j \longrightarrow \mathbb{R}$ a kifizetőfüggvénye $i \in N$. Legyen $T \subseteq N$, $T \neq \emptyset$ és vezessük be a $S^T = \times_{i\in T} S_i$ jelölést. Legyen továbbá Γ a játékok (normál formában) egy halmaza. Nevezzük a $\varphi : \Gamma \longrightarrow 2^S \setminus \{\emptyset\}$ függvényt megoldásfüggvénynek a Γ halmazon, ha minden $G \in \Gamma$ játékhoz az $S = S^N$ stratégiaprofilok egy nem üres $\varphi(G)$ részhalmazát rendeli.

2.28. definíció. A φ megoldásfüggvény kielégíti az *egyszemélyes racionalitás* (one person rationality: OPR) követelményét, ha minden $G = \{\{i\}, S_i, f_i\}$, $G \in \Gamma$ egyszemélyes játékra fennáll a következő:

$$\varphi(G) = \{x_i \in S_i \mid f_i(x_i) \geq f_i(y_i) \text{ minden } y_i \in S_i\text{-re}\}.$$

Az OPR alapvető követelmény a döntéselméletben és a játékelméletben: minden játékos maximalizálja a saját hasznosságfüggvényét (racionalitás).

2.29. definíció. Legyen $\mathbf{x} \in S$ egy stratégiaprofil. A $G_{\mathbf{x},T} = \{T, (S_i)_{i\in T}, (f_i^{\mathbf{x}})_{i\in T}\}$ játékot a G játék T-re és $\mathbf{x}$-re vonatkozó *redukált játék*ának (reduced game) nevezzük, ahol $f_i^{\mathbf{x}}(\mathbf{y}^T) = f_i(\mathbf{y}^T, \mathbf{x}^{N\setminus T})$ minden $\mathbf{y}^T \in S^T$-re és $i \in T$-re.

$G_{\mathbf{x},T}$ az a játék, amelyet T játékosai játszanak, miután megtudják, hogy $N\setminus T$ játékosai az x_i, $i \in N \setminus T$ stratégiákat választották és elhagyták a G játékot.

2.30. definíció. A játékok egy Γ osztályát *zárt*nak nevezünk, ha ($G \in \Gamma$, $T \subseteq N$, $T \neq \emptyset$, és $\mathbf{x} \in S$) $\Longrightarrow G_{\mathbf{x},T} \in \Gamma$, vagyis Γ olyan, hogy tartalmazza minden játékának redukált játékait.

2.31. definíció. Legyen Γ a játékok egy zárt osztálya és φ egy megoldásfüggvény a Γ halmazon. A φ megoldásfüggvény *konzisztens* ($CONS$), ha

$(G \in \Gamma,\ T \subseteq N,\ T \neq \emptyset$, és $\mathbf{x} \in \varphi(G)) \Longrightarrow \mathbf{x}^T \in \varphi(G_{\mathbf{x},T})$, ahol ($\mathbf{x}^T$ az $\mathbf{x} = \mathbf{x}^N$-nek csak azokat a komponenseit tartalmazza, amelyek a T-ben lévő játékosokhoz tartoznak).

A $CONS$ azt jelenti, hogy ha a T -ben lévő játékosok tudják, hogy az $N \backslash T$ játékosai az $\mathbf{x}_{N\backslash T}$ stratégiaprofilt választották és elhagyták a G játékot, akkor nem kell megváltoztatni a G -ben használt stratégiáikat, amikor a $G_{\mathbf{x},T}$ redukált játékot játsszák.

Legyen Γ a játékok egy zárt osztálya és φ egy megoldásfüggvény Γ-n. Ha $G = \{N, (S_i)_{i\in N}, (f_i)_{i\in N}\} \in \Gamma$ és $|N| \geq 2$, akkor definiáljuk a $\widetilde{\varphi}(G)$ halmazt a következőképpen:

$$\widetilde{\varphi}(G) = \{\mathbf{x} \in S \mid \mathbf{x}^T \in \varphi(G_{\mathbf{x},T}) \text{ minden } T \subseteq N, T \neq \emptyset,\ T \neq N\text{-re}\}$$

2.32. definíció. Egy a Γ halmazon definiált φ megoldásfüggvény kielégíti a *fordított konzisztencia* (converse consistency: $COCONS$) követelményét, ha minden legalább két játékossal rendelkező $G \in \Gamma$ játék esetében $\widetilde{\varphi}(G) \subseteq \varphi(G)$.

Érdemes megjegyezni, hogy a $CONS$ tulajdonképpen az a követelmény, hogy a fordított tartalmazás, vagyis a $\varphi(G) \subseteq \widetilde{\varphi}(G)$ teljesüljön minden $G \in \Gamma$-re. $COCONS$ azt jelenti, hogy kevesebb személyes redukált játékok megoldásait konzisztens módon „összeillesztve” megkaphatjuk a játék megoldását.

Ha Γ egy olyan játékosztály (például a véges játékok kevert bővítései, amely játékosztály zárt, hiszen minden véges játék kevert bővítéséhez tartozó redukált játék is egy véges játék kevert bővítése), amelyben minden játéknak van legalább egy NEP-je, akkor jelöljük NE-vel azt a megoldásfüggvényt, amely minden játékhoz hozzárendeli a NEP-ek halmazát.

2.33. állítás. *Ha Γ egy tetszőleges, zárt játékosztály, akkor NE kielégíti az OPR, $CONS$, és $COCONS$ követelményeket Γ-án.*

Bizonyítás. A bizonyítást gyakorlásképpen az olvasóra bízzuk (2.11. feladat). □

2.34. állítás. *Legyen φ a Γ zárt függvényosztályon definiált megoldásfüggvény. Ha φ kielégíti az OPR és $CONS$ követelményeket, akkor $\varphi(G) \subseteq NE(G)$ minden $G \in \Gamma$-ra.*

Bizonyítás. Legyen $G = \{N, (S_i)_{i\in N}, (f_i)_{i\in N}\} \in \Gamma$ és $\mathbf{x} \in \varphi(G)$. $CONS$ miatt, $x_i \in \varphi(G_{\mathbf{x},\{i\}})$ minden $i \in N$-re. OPR miatt $f_i^{\mathbf{x}}(x^i) \geq f_i^{\mathbf{x}}(y^i)$ minden $y^i \in S_i$ és $i \in N$-re. Ezért

$$f_i(x^i, \mathbf{x}^{N\setminus\{i\}}) \geq f_i(y^i, \mathbf{x}^{N\setminus\{i\}}) \text{ minden } y^i \in S_i\text{-re, és } i \in N\text{-re}$$

ami azt jelenti, hogy $\mathbf{x} \in NE(G)$. □

2.35. állítás. *Legyen φ a Γ zárt játékosztályon definiált megoldásfüggvény. Ha φ kielégíti az OPR és $COCONS$ követelményeket, akkor $NE(G) \subseteq \varphi(G)$ minden $G \in \Gamma$-ra.*

Bizonyítás. A bizonyítás a játékosok számára vonatkozó teljes indukcióval megy.

Legyen $G \in \Gamma$ egy egyszemélyes játék. Ekkor $NE(G) \subseteq \varphi(G)$ az OPR miatt. Tegyük most fel, hogy $NE(G) \subseteq \varphi(G)$ minden $G \in \Gamma$ m-személyes játékra ahol $m \leq k$ és $k \geq 1$. Legyen $\widehat{G} \in \Gamma$ egy $(k+1)$-személyes játék. Mivel NE kielégíti a $CONS$ követelményt, ezért $NE(\widehat{G}) \subseteq \widetilde{\mathrm{NE}}(\widehat{G})$. Az indukciós feltevés miatt $\widetilde{NE}(\widehat{G}) \subseteq \widetilde{\varphi}(\widehat{G})$, továbbá a $COCONS$ követelmény következtében $\widetilde{\varphi}(\widehat{G}) \subseteq \varphi(\widehat{G})$, amelyből $NE(\widehat{G}) \subseteq \varphi(\widehat{G})$ következik. □

2.36. következmény. *Ha egy a Γ zárt játékosztályon definiált φ megoldásfüggvény kielégíti az OPR, $CONS$, és $COCONS$ követelményeket, akkor $\varphi = NE$.*

Bizonyítás. A 2.33., 2.34., 2.35. állítások közvetlen következménye. □

Az OPR, $CONS$ és $COCONS$ követelmények tehát egyértelműen meghatározza a Nash-megoldásfüggvényt. Nem nehéz bebizonyítani, hogy ezek a követelmények függetlenek, vagyis ha bármelyiket elhagyjuk, akkor a másik kettőt nem csak az NE megoldásfüggvény elégíti ki (lásd a 2.12. feladatot).

2.6. Feladatok

2.1. feladat. Mutassuk meg, hogy ha egy játék rendelkezik a felcserélhetőségi tulajdonsággal (2.3. definíció), akkor tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ darab NEP-jéből kikevert stratégiaprofil is NEP.

2.2. feladat. Bizonyítsuk be, hogy minden antagonisztikus játék rendelkezik a felcserélhetőségi tulajdonsággal.

2.3. feladat. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $G = \{S_1, \ldots, S_n; f_1, \ldots, f_n\}$ játék esetén, ha $\varphi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton növő minden $i = 1, \ldots, n$-re, akkor a $H = \{S_1, \ldots, S_n; \varphi_1 \circ f_1, \ldots, \varphi_n \circ f_n\}$ játék stratégiailag ekvivalens G-vel (a $\circ$ szimbólum az összetett függvény képzését jelöli).

2.4. feladat. Adjunk példát olyan véges játékra, aminek van olyan stratégiaprofilja, amely túlélte a szigorúan dominált stratégiák iteratív kiküszöbölését, de nem NEP.

2.5. feladat. Adjunk példát olyan játékra, ami antagonisztikus, de nem zérusösszegű.

2.6. feladat. Mutassuk meg, hogy a 2.6. definícióban használt $\sim$ bináris reláció reflexív, szimmetrikus, de nem tranzitív.

2.7. feladat. Adjunk példát olyan játékra, aminek több maximális Nash-halmaza is van.

2.8. feladat. Mutassuk meg, hogy az $\mathbf{s}^* \in S$ stratégiaprofil pontosan akkor NEP-je a G játéknak, ha $\mathbf{s}^*$ fixpontja a B legjobbválasz-leképezésnek, vagyis ha $\mathbf{s}^* \in B(\mathbf{s}^*)$.

2.9. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha a B_i legjobbválasz-leképezés egyértékű, f_i folytonos, és S_i kompakt, akkor B_i az $\mathbf{s}_{-i}$ paramétervektor folytonos függvénye.

2.10. feladat. Mutassuk meg, hogy a 2.23. példában $X^* = \{(x_1, x_2)|\frac{1}{2} \leq x_1 \leq 1, \frac{1}{2} \leq x_2 \leq 1, x_1 + x_2 = \frac{3}{2}\}$ halmaz minden eleme NEP-je a Cournot-duopólium játéknak.

2.11. feladat. † Bizonyítsuk be, hogy ha Γ egy tetszőleges, zárt játékosztály, akkor NE kielégíti az OPR, $CONS$, és $COCONS$ követelményeket Γ-án.

2.12. feladat. † Adjunk példákat arra, hogy ha a 2.36. következményben az OPR, $CONS$, és $COCONS$ követelmények egyikét elhagyjuk, akkor $\varphi \neq NE$.

2.13. feladat. Mutassuk meg, hogy az *Érmepárosítás* játék kevert bővítésében (2.11. példa) az $((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$ stratégiaprofil NEP.

2.14. feladat. Lássuk be, hogy a 2.16. tétel bizonyításában $B(\mathbf{s}) \neq \emptyset$ minden $\mathbf{s} \in S$-re.

2.15. feladat. Mutassuk meg, hogy a 2.23. példában f_i szigorúan konkáv $i \in \{1, 2\}$.

2.16. feladat. Mutassuk meg, hogy a 2.27. példában definiált oligopoljáték kielégíti a 2.26. tétel feltételeit.

2.17. feladat (Telephely-választás [Hotelling (1929)]). Tegyük fel, hogy a $[0,1]$ intervallum egy strandszakaszt reprezentál és ezen a szakaszon a strandolók egyenletesen oszlanak el. A strandon két fagylaltos kínálja azonos áron, azonos minőségű árúját. Minden strandoló ahhoz a fagylaltoshoz megy, aki közelebb van hozzá. Ha a távolság azonos akkor pénzfeldobással választ. A fagylaltosok a forgalmukat akarják maximalizálni. A fagylaltosok egymástól függetlenül választanak egy helyet a strandon, ahol felállítják bódéjukat.

1. Hol helyezkednek el a fagylaltosok a Nash-egyensúlyban?
2. Hová kellene a két fagylaltost elhelyezni, ha a fogyasztó által megteendő átlagos távolságot szeretnénk minimalizálni?
3. Van-e Nash-egyensúly, ha három fagylaltos van?

2.18. feladat. Kvadratikus inverz keresleti függvény ($p = \max\{1-(q_1+q_2)^2, 0)$ és azonosan nulla költségfüggvényű vállalatok esetében határozzuk meg a Cournot-duopólium egyensúlyi termelését és profitját.

2.19. feladat. Legyen $G = \{S_1, S_2; f_1, f_2\}$ egy kétszemélyes játék, ahol $S_1 = [-10, 0]$, $S_2 = [-3, 0]$, $f_1(s_1, s_2) = as_1 + bs_1s_2 - cs_1^2$, $f_2(s_1, s_2) = ds_1 + es_1s_2 - gs_2^2$, $s_1 \in S_1$, $s_2 \in S_2$, ahol $a, b, c, d, e, g \in \mathbb{R}$ nem zérus paraméterek. Adjunk a paramétereknek olyan értékeket, hogy

1. G-nek több NEP-je legyen.
2. G kielégítse a 2.24. tétel feltételeit.
3. G kielégítse a 2.26. tétel feltételeit.
4. G-nek egyetlen NEP-je legyen, de ne elégítse ki sem a 2.24. tétel, sem a 2.26. tétel feltételeit.

2.20. feladat. Bizonyítsuk be, hogy a 2.16. tételből következik a Brouwer-fixponttétel.

Jó tanács: Ha $\mathbf{g} : K \to K$ folytonos leképezés a $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex, kompakt halmazon, akkor definiáljunk egy $G = \{K, K; f_1, f_2\}$ játékot, ahol $f_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\mid \mathbf{x} - \mathbf{g}(\mathbf{y}) \mid$és $f_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\mid \mathbf{x} - \mathbf{y} \mid$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$, majd vizsgáljuk a G NEP-jeit.

2.21. feladat. Legyen $G = \{S_1, \ldots, S_n; f_{1,\ldots,}f_n\}$ egy normál formában adott játék és $S = S_1\times, \ldots, \times S_n$ a stratégiaprofilok halmaza. Definiáljunk egy $H : S \times S \to \mathbb{R}$ „aggregátor” függvényt a következő képpen:

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{y}_i, \mathbf{x}_{i+1}, \ldots, \mathbf{x}_n)$$

Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{x}^* \in S$ akkor és csak akkor NEP-je a G játéknak, ha a

$$H(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \leq H(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^*)$$

egyenlőtlenség minden $\mathbf{y} \in S$ -re fennáll.

2.22. feladat. Bizonyítsuk be, hogy a 2.18. példában (Bertrand-duopólium) a játékosok kifizetőfüggvényei nem felülről félig folytonosak a stratégiaprofilok S halmazán.

2.23. feladat. Mutassuk meg, hogy a 2.23. példában (Cournot-duopólium) az f_i szigorúan konkáv függvénye x_i-nek a másik változó rögzítése mellett a $[0, 1]$ intervallumon.

3. fejezet

Játékok extenzív formában

3.1. Információ és emlékezet

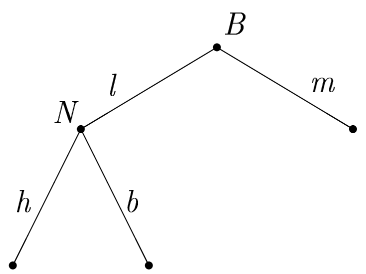
Mindenki ismeri a sakkjátékot. Első látásra, még elvben is, elég nehéz ezt a játékot normál formában megadni. Még az sem világos igazán, hogy mit is értsünk stratégián ebben az esetben. Az biztos, hogy nem sokra megyünk a sakkozók fogalmainak használatával, akik a játék megnyitási szakaszában a figurák olyan mozgatását értik ezen, amely az adott játékos számára „ígéretes" középjátékot és/vagy végjátékot valószínűsít. Ennél precízebbnek kell lennünk. Próbáljuk meg a játékot mintegy lépésről lépésre haladva leírni, figyelembe véve a sakkjáték szabályait. Ezek a szabályok nem teszik lehetővé, hogy egy játszma végtelen hosszú legyen és természetesen minden pozícióban véges számú lépésből lehet csak választani.

A játéknak van egy „dinamikája": a kezdő lépéstől vagy az egyik játékos győzelméig, vagy döntetlenig halad előre. Az ilyen játékok leírására, amelyeket *extenzív formában adott játék*oknak nevezünk (egyelőre ez nem elég pontos definíció!) a legmegfelelőbb matematikai eszköz egy *irányított, gyökérrel rendelkező véges fa.* Ez egy olyan gráf, amely összefüggő, körmentes és pontosan egy olyan kitüntetett csúcsa van (a gyökér), amelybe nem érkezik be irányított él. A játékelméletben szokás a csúcsokat *pont*oknak nevezni, így járunk el mi is. Azokat a pontokat, amelyekből nem vezet ki él, *végpont*oknak (levél) nevezzük. A fa azon pontjait, amelyek nem végpontok *döntési pont*oknak hívjuk.

A fa (a továbbiakban *játékfa*) minden pontjához, a végpontok kivételével, hozzárendelünk egy játékost, aki az adott pontból kiinduló élekből választ egyet, és a játék ezen él mentén halad tovább egy újabb pontba, vagy véget ér, ha egy végpontba jutottunk el. A gyökérből egy végpontba vezető pontok és élek halmazát a gráfelméletben *út*nak, a játékelméletben *játszmá*nak nevezzük.

A sakkjátékban a gyökérhez *Világos* van hozzárendelve és innen 20 irányba indulhat el (20 él indul ki a gyökérből). Mindegyik él végén lévő ponthoz *Sötét* van hozzárendelve (*Sötét* lép) és szintén 20 lehetősége van. A sakkjátékot ábrázoló fában két lépés után már 421 pont és 420 él van. A sakkjáték fáját csak elvben tudjuk felrajzolni a fa óriási mérete miatt. Ezért célszerű az extenzív formában adott játékok szemléltetésére egyszerűbb példákat (is) használni.

3.1. példa (Áruházlánc játék)**.** Egy város kiskereskedelmét egy nagy áruház (N) uralja. Egy vállalkozó (B) szeretne erre a piacra belépni és egy konkurens áruházat nyitni. Ha B belép a piacra, akkor N kétféleképpen reagálhat: vagy árháborút indít (h), vagy belenyugszik az új helyzetbe (b). A játékot a 3.1. ábrán látható játékfával adhatjuk meg. Előbb B lép és dönt, hogy belép-e a piacra (l), vagy kívül marad (m). Ha belépett, akkor N dönt, hogy harcol, vagy belenyugszik az új helyzetbe.



3.1. ábra. Áruházlánc játék

Megfigyelhetjük, hogy mind a sakkjátékban, mind az *Áruházlánc* játékban az egyes lépések jól definiált egymásra következése, és amiatt, mert a „múlt” (korábbi lépések) mindenki számára megfigyelhető, a játékosok *tökéletesen informáltak.* Ezen azt értjük, hogy minden játékos ismeri a játékot leíró fát, mindig tudja, hogy a játék éppen hol (melyik pontján a fának) tart, és emlékszik arra, hogy melyik ösvény mentén jutott oda. Nem mindig van azonban ez így. Nézzük a következő példát:

3.2. példa (Egyszerűsített snóbli)**.** Két játékos mindegyike 0 vagy 1 pénzérmét tesz a kezébe úgy, hogy ezt a másik nem látja. Ezután az 1. játékos megtippeli, hogy a két kézben összesen hány érme van. Utána a 2. játékos tippel, de nem mondhatja ugyanazt, mint az 1. játékos. A helyzet további egyszerűsítése céljából feltesszük, hogy a blöffölés nem megengedett, vagyis pl. senki sem tippelhet 0-át, miközben az ő kezében 1 van.

Ezt a játékot nem tudjuk úgy ábrázolni, mint pl. a sakkot, mert a játékosoknak nincs információjuk arról, hogy a másik hány érmét tett a kezébe, és így nem tudják pontosan, hogy éppen merre járnak a játékfában. Ilyen játékok esetében segít az *információs halmaz* fogalmának bevezetése.

3.3. definíció. Jelöljük U_i-vel a játékfa azon pontjainak halmazát, amelyekben az i játékos lép. Az U_i egy U_i^t részhalmazát az i játékos egy információs halmazának nevezzük, ha

1. U_i^t minden pontjából ugyanannyi él indul ki, és az élek ugyanazokhoz a játékosokhoz tartozó pontok felé irányulnak,
2. bármely útnak legfeljebb egy közös pontja van U_i^t-vel (nem megengedett pl., hogy U_i^t két pontja éllel legyen összekötve).
3. az U_i^t halmazok az U_i egy partícióját adják.

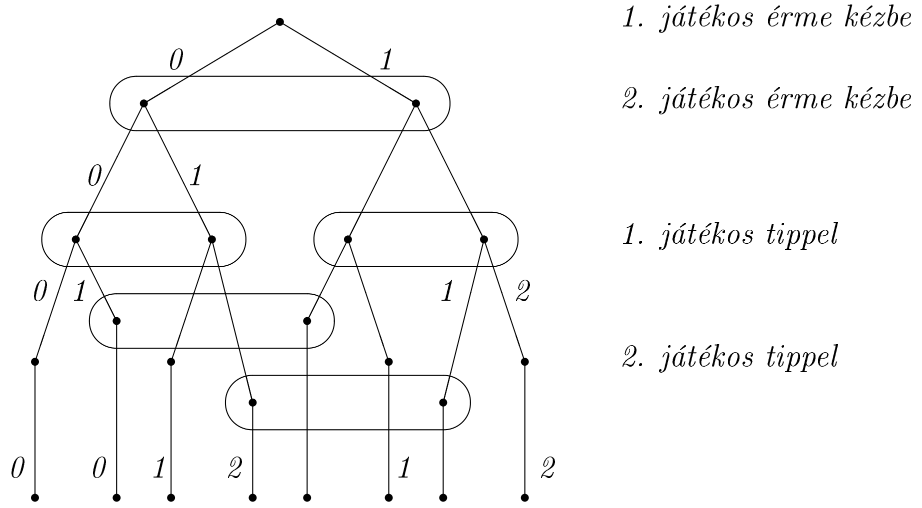
Vegyük észre, hogy az információs halmazok struktúrája nem következik a játék fájának szerkezetéből, tehát az információs halmazok a játék leírásához tartoznak, nem pedig abból vezethetőek le.

Az információs halmazok definíciója mögötti intuíció a következő: az i játékos tudja, hogy az U_i^t valamelyik pontjában van a játék, neki kell lépnie (választani az U_i^t pontjaiból kiinduló azonos számú él közül) anélkül, hogy tudná, hogy az U_i^t melyik pontjában van. Ehhez még arra is szükség van, hogy minden U_i^t információs halmazhoz hozzárendeljünk egy V_i^t indexhalmazt, amely azoknak a játékosoknak az indexeit tartalmazza (egyes játékosok többször is szerepelhetnek), akik U_i^t pontjaiból egy éllel elérhetőek. Ezek szerint egy információs halmaz minden pontjából ugyanazok a játékosok (V_i^t elemei) érhetőek el. Ha nem így lenne, akkor az adott információs halmazhoz tartozó játékos esetleg különbséget tudna tenni az információs halmaz pontjai között, amit persze nem engedhetünk meg.

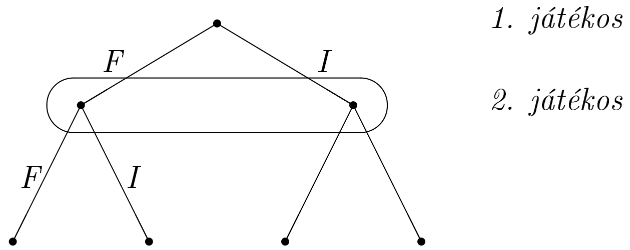
Visszatérve a 3.2. példára, a játékot az információs halmazok segítségével ábrázolni tudjuk egy játékfával, amint azt a 3.2. ábrán látni lehet.

Az információs halmazok kiválóan alkalmasak azoknak a helyzeteknek a leírására, amikor a játékosoknak időnként egyidejűleg kell lépniük. Ekkor önkényesen választhatunk valamilyen lépéssorrendet, csak arra kell vigyázni, hogy az információs halmazok pontosan fejezzék ki azt, hogy a játékosok nem tudhatnak egyes más játékosok választásáról. Az „egyidejű” lépést egyébként sem úgy kell érteni, hogy mindenki ugyanabban a másodpercben lép.

3.4. példa. Ábrázoljuk az *Érmepárosítás* játékot extenzív formában. Önkényesen választva, hogy először az 1. játékos lépjen, majd a 2. játékos, a játékfa a 3.3. ábrán látható (F: fej,I: írás).



3.2. ábra. Egyszerűsített snóbli

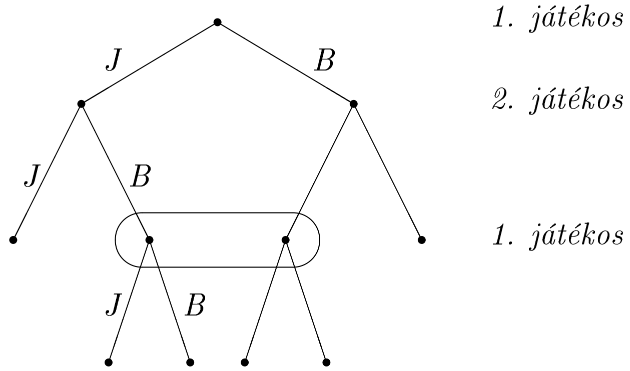


3.3. ábra. Érmepárosítás

Ha a játékban minden információs halmaz egyetlen pontból áll, akkor azt *tökéletes információs játék*nak hívjuk. Azokat a játékokat, ahol legalább egy információs halmaznak legalább két pontja van, *nem tökéletes (imperfect) információs játék*oknak nevezzük.

Mind a két példánkban (3.2. és 3.4. példa) az információs halmazok összhangban voltak a játékosok korábbi lépéseivel. A 3.2. példában az 1. játékos tudja, hogy a két információs halmazának melyikében van, hiszen emlékszik arra, hogy elsőre 0-át vagy 1-et választott, csak azt nem tudja, hogy a 2. játékos mit lépett korábban. Nem ez a helyzet azonban a következő játékban.

3.5. példa. A 3.4. ábrán látható játékban az 1. játékos kétszer lép és mindkétszer J(obb) és B(al) közül választ, a 2. játékos egyszer választ J és B közül. Az egyetlen információs halmazban az 1. játékos nem tudja, hogy melyik pontban van a játék, hiszen „elfelejtette", hogy elsőre J-t vagy B-t lépett.

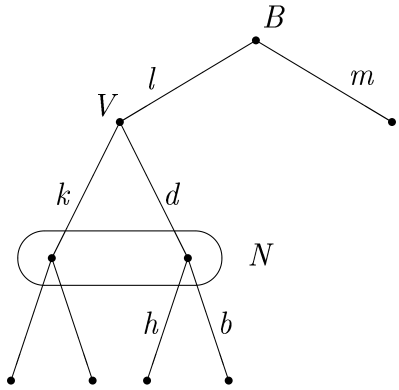


3.4. ábra. A 3.5. példa játékfája

Azokat a játékokat, amelyekben az információs halmazok összhangban vannak azzal a feltételezéssel, hogy minden játékos emlékszik korábbi lépéseire, *tökéletes emlékezetű (perfect recall) játék*oknak nevezzük. Ha ez a feltétel nem teljesül, akkor *nem tökéletes emlékezetű (imperfect recall) játék*okról beszélünk.

A kártyajátékok is tökéletes példának látszanak az extenzív formában adott játékokra. A különbség a sakktól az, hogy időnként a véletlen, nem pedig a játékosok döntik el, hogy merre haladjon a játék tovább a fán. A kártyák keverése és osztása jó példa erre. Célszerű tehát egy különleges státusú játékost csatolni a játékosok halmazához, amelyet egyszerűen Véletlennek (V) hívunk. V annyiban különbözik a többi játékostól, hogy minden információs halmaza egyetlen pontból áll, és ezekben a pontokban egy adott, és minden játékos által ismert valószínűségeloszlás szerint véletlenszerűen választ élt. Feltesszük, hogy ha több pontban is V határozza meg a továbbhaladást, akkor a „sorsolások" (a továbbhaladási élek adott eloszlás szerinti véletlen kiválasztása) egymástól függetlenek.

3.6. példa. Az *Áruházlánc* játékban (3.1. példa) N másképpen értékeli a B belépése utáni helyzetet, ha konjunktúra (k) várható és másképpen, ha dekonjunktúra (d). Ez a két esemény $\frac{1}{4}$ illetve $\frac{3}{4}$ valószínűséggel következik be. N-nek a döntést akkor kell meghoznia, amikor még nem tudja, hogy k vagy d fog-e bekövetkezni. A játékfa ekkor a V(életlen), mint szereplő megjelenése után a 3.5. ábrán látható.



3.5. ábra. Áruházlánc játék II.

Az extenzív formában adott játékok leírásához nemcsak az egyes lehetséges lépéseket ábrázoló fa tartozik hozzá, hanem a játékosok cselekedeteit értékelő és motiváló értékelő függvény is, amely a játék minden végpontjához és minden játékoshoz hozzárendel egy hasznossági szintet (ezt itt is kifizetésnek fogjuk hívni). A játékfát, az információs halmazokat, a *Véletlen* valószínűségeloszlásait, valamint a játékfa végpontjaihoz tartozó kifizetéseket együtt nevezzük a *játék extenzív formá*jának.

Miután, remélhetőleg, jól megértettük, hogy milyen is egy játék extenzív formában, az eddigi jelölések felhasználásával mintegy összegzésképpen megadjuk a pontos matematikai definíciót.

3.7. definíció. Egy G extenzív formában adott játék a következő elemekből áll:

1. $N = \{0, 1, \ldots, n\}$ a játékoshalmaz, amelyben a 0 index a *Véletlen* játékost jelöli,

2. r jelöli a T játékfa gyökerét,

3. $U_0, U_1, \ldots, U_n$ a T döntési pontjainak egy partíciója. Az U_0 pontokban a *Véletlen* dönt, az U_i pontjaiban pedig az i játékos, $i \in N$,

4. az U_0 minden pontjához adott az illető pontból kiinduló éleken értelmezett valószínűségeloszlás,

5. minden $i \in N$-re adott az U_i halmaz egy $U_i^1, \ldots, U_i^{k_i}$ partíciója, amelynek elemeit információs halmazoknak nevezzük és amelyek minden $j = 1, \ldots, k_i$-re kielégítik a következő feltételeket:

(a) bármely U_i^j információs halmaz minden pontjából ugyanannyi él indul ki és az élek ugyanazokhoz a játékosokhoz tartozó pontok felé irányulnak,

(b) a gyökérből kiinduló minden út minden információs halmazt legfeljebb egyszer érint,

6. a T fa minden t végpontjához tartozik egy $\mathbf{f}(t)$ vektor, amelynek komponensei a játékosok kifizetései a t végpontban.

3.2. Extenzív és normál forma

Eddig az extenzív formában adott játékok leírásáig jutottunk el, ez azonban nem elég egy normatív elmélethez. Ehhez definiálnunk kell a játékosok stratégiáit és kifizetőfüggvényeit, más szóval meg kell teremtenünk az átmenetet az extenzív és a normál forma között. Az i játékos egy s_i *stratégiá*ja nem más, mint egy teljes magatartásterv, amely az i játékos bármely információs halmazában megmondja, hogy merre lépjen az i játékos abban az esetben, ha a játék eljut ahhoz az információs halmazhoz. Az s_i tehát egy függvény, amely az információs halmazok $\cup_t \{U_i^t\}$ uniójának halmazán van értelmezve. Ha az i játékos eldöntötte a játék kezdete előtt, hogy az s_i stratégiát fogja alkalmazni, akkor egy játszma lejátszása során a személyes részvételére nincs is szükség, egy gép, vagy egy ügynök végre tudja hajtani az s_i utasításait. Az összes stratégiák S_i halmazát az i játékos stratégiahalmazának nevezzük. Ha az i játékos az s_i $(i = 1, \ldots, n)$ stratégiát választotta az n-személyes extenzív formában adott játékban, akkor az $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ *stratégiaprofil* egyértelműen meghatározza a játék fájának egy végpontját, ha a *Véletlen* nem szerepel a játék leírásában. Ha a *Véletlen* is szerepel, akkor a fa mindegyik végpontjához tartozik egy elérési valószínűség, amit úgy számítunk ki, hogy a gyökeret a végponttal összekötő út éleinek valószínűségeit összeszorozzuk (feltettük, hogy a *Véletlen* „sorsolásai” függetlenek). Természetesen azokhoz a végpontokhoz, amelyekhez az $\mathbf{s}$ stratégiaprofil sohasem vezet el, 0 elérési valószínűség tartozik, és az elérési valószínűségek a végpontok halmazán egy valószínűségeloszlást adnak. Mivel a játék leírásában minden végponthoz (játszmához) tartozik egy n-elemű kifizetésvektor (a játékosok kifizetései) és egy elérési valószínűség, így az i játékos $\mathbf{s}$ stratégiaprofilhoz tartozó kifizetését úgy definiáljuk, mint a kifizetéseknek az elérési valószínűségekkel vett várható értékét:

$$f_i(\mathbf{s}) = \sum_k p_k v_k^i,$$

ahol v_k^i a k végpontban az i játékos kifizetése, p_k pedig a k végpont elérési valószínűsége. Ily módon az extenzív formához egyértelműen hozzárendelhetünk egy $G = \{S_1, \ldots, S_n; f_1, \ldots, f_n\}$ normál formát.

Az extenzív formából a normál formába való átmenetet az *Áruházlánc* játékon (3.6. példa) szemléltetjük.

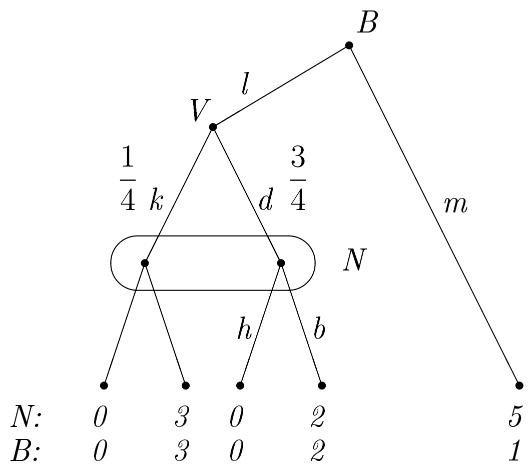
3.8. példa (Áruházlánc játék III.)**.** Nézzük még egyszer a 3.6. példában szereplő játékot (lásd a 3.6. ábrát), most már a hasznosságokat reprezentáló kifizetésekkel (az első szám N, a második B kifizetése). B-nek két stratégiája van: l és m, N-nek is kettő: h és b. Az egyes stratégiapárosokhoz tartozó elérési valószínűségeket az 5 végpont esetében (balról jobbra indexelve őket) az alábbi táblázat mutatja:

Végpont		lh	lb	mh	mb
1		1/4	0	0	0
2		0	1/4	0	0
3		3/4	0	0	0
4		0	3/4	0	0
5		0	0	1	1
Várható kifizetések	N :	0	9/4	5	5
	B :	0	9/4	1	1

Ez a játék bimátrix-játékként felírva, ha N a sor- és B az oszlopjátékos, a kifizetéseket pedig továbbra is N, B sorrendben megadva:

		B: l	B: m
N	h	$(0, 0)$	$(5, 1)$
	b	$(9/4, 9/4)$	$(5, 1)$

A játék *teljes normál formá*jában egy stratégia olyan döntési pontokban is utasítást ad a továbbhaladási irányra, amely egy korábbi választás eredményeképpen létre sem jöhet. Így olyan stratégiák is különbözőkként szerepelnek, amelyek ugyanabba a végpontba vezetnek a többi játékos rögzített stratégiaválasztása esetén. Így például a sakkjátékban, ha a *Világos* egy stratégiája azt írja elő, hogy a kezdő lépése $e4$ legyen, akkor ennek a stratégiának olyan esetekre is meg kell mondania a megteendő lépést, amelyek csak akkor állhattak volna elő, ha a kezdő lépése $d4$ lett volna. Egy takarékosabb leíráshoz jutunk az ún. *gyengén redukált normál formá*val. Itt egy stratégiának csak azokban a döntési pontokban kell utasítást adni a továbbhaladás irányára, amelyek a többi játékos valamely stratégiaválasztása mellett a saját korábbi döntések eredményeképpen létre is jöhetnek.



3.6. ábra. Áruházlánc játék III.

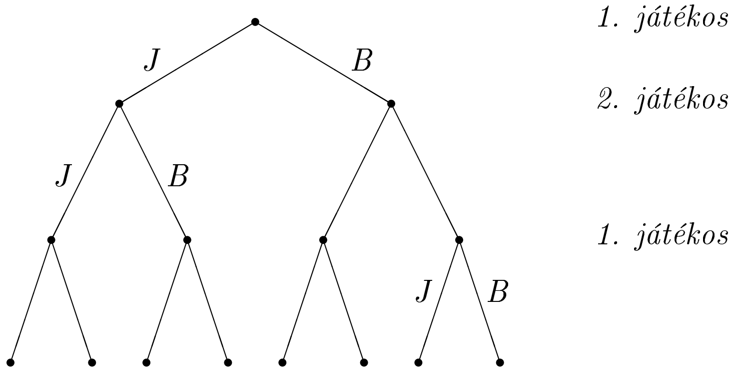
3.9. definíció. A G extenzív formában adott játékban tetszőleges i játékos két stratégiája s_i és s_i' ekvivalensek, ha minden $s_{-i} \in S_{-i}$-re (a többi játékos tetszőlegesen rögzített stratégiája mellett) a két stratégia ugyanabba a végpontba vezeti a játékot, ill. a *Véletlen* játékost is figyelembe véve ugyanazt az eloszlást generálja a végpontokon.

A G játék gyengén redukált normál formáját a G játék teljes normál formájából úgy kapjuk meg, hogy tetszőleges i játékos ekvivalens stratégiái között nem teszünk különbséget (pontosabban az ekvivalens stratégiák ekvivalenciaosztályai a stratégiák az új játékban).

Világos, hogy egy stratégiaprofil így is egyértelműen meghatározza a végpontot, de jóval kevesebb stratégiát kell csak figyelembe vennünk.

3.10. példa. Tekintsünk egy kétszemélyes tökéletes információs játékot, amelyben mindkét játékosnak minden döntési pontban két lehetősége van (J és B). Előbb az 1. játékos lép, majd a 2. játékos és végül ismét az 1. játékos (a játékfa a 3.7. ábrán látható). A 2. játékosnak mind a teljes, mind a gyengén redukált normál formában 4 stratégiája van. Az 1. játékosnak a teljes normál formában 32 stratégiája van, míg a gyengén redukált normál formában csak 8, hiszen ha induláskor J-t választotta, azzal már nem kell törődnie, hogy mit tenne, ha induláskor a B-t választotta volna.

A teljes normál forma előnye, hogy a játékos „szellemi" képességeire semmilyen módon nem épít, teljesen mechanikusan alkalmazható, így tetszőleges stratégia birtokában a játékos tudja mit csináljon akkor is, amikor a játékba csak később kapcsolódik be, és addig nem a kívánt stratégia szerint alakultak a dolgok valamilyen okból (pl. véletlenül más figurát fogott meg a sakktáb-



3.7. ábra. A 3.10. példa játékfája

lán, mint amit a stratégiája diktált volna), de a teljes stratégia ebben az esetben is megmondja, hogy mit kell csinálnia.

3.3. Nash-egyensúly és részjáték tökéletesség

A normál formára való áttérés lehetővé teszi, hogy a Nash-egyensúlypontot (röviden egyensúlypont vagy NEP) az extenzív formában adott játékokra is definiálni tudjuk. Egyszerűen azt mondjuk, hogy egy G extenzív formában adott játéknak az $\mathbf{s}$ stratégiaprofil egyensúlypontja, ha $\mathbf{s}$ egyensúlypontja a G-ből származtatott normál formában adott játéknak. Vagyis az $\mathbf{s}$ a játékosok olyan magatartásterve, amelynek utasításaitól bármely játékos, ha egyetlen döntési pontban (információs halmazban) is eltérne, nem járna jobban (kifizetése nem növekedne), ha a többi játékos nem változtat az egyensúlyi magatartástervein (stratégiáin) egyetlen döntési pontban (információs halmazban) sem. Itt az egyensúlypontok halmaza különböző lehet aszerint, hogy a teljes vagy a redukált normál formával dolgozunk.

3.11. példa. Könnyű látni, hogy a 3.8. példában szereplő áruházlánc játékban (a teljes normál formát tekintve) két NEP van:

1. N nem kezd árharcot (b) és B belép a piacra (l),

2. ha B belépne a piacra, akkor N harcolna (h), de B nem lép be a piacra (m).

A 3.11. példában szereplő két egyensúlypontot nem érezzük ugyanolyan „meggyőzőnek”. Ösztönösen is hajlamosak vagyunk az elsőt jobban elfogadni, mint a másodikat. Miért? Az extenzív formában adott játékoknak fontos az idődimenziójuk. A 2. csak azért lehet egyensúlypont, mert B-t a piacon való kívülmaradásra kényszeríti az a fenyegetés, hogy N harcolni fog, ha B belépne. Hihető ez a fenyegetés? Nem nagyon, mert ha egyszer B belépett, akkor már N-nek nem érdeke harcolni. Hogyan lehet ezt a nem életszerű megoldást kizárni?

Egy extenzív formában adott játék *részjáték*ának nevezzük a játéknak azt a részét, amely egy egyelemű információs halmazzal kezdődik (ez lesz a részjáték fájának gyökere), egyebekben pedig teljesen azonos az eredeti játékkal. Úgy kell elképzelnünk, hogy az eredeti játék egy ideig haladt előre, majd egy egyelemű információs halmaznál kezdődik egy új játék, ami része az eredetinek. Egy egyensúlyi magatartásterv-profilt (stratégiaprofilt) *konzekvens*nek, széleskörűen elfogadott terminológiával *részjáték tökéletes*nek (subgame perfect) nevezünk, ha azt egy részjátékra korlátozva továbbra is egyensúlyi stratégiaprofil marad abban a részjátékban. A 3.11. példában az 1. egyensúlypont részjáték tökéletes, a 2. azonban nem az (a V(életlen) játékoshoz tartozó ponthoz, mint gyökérhez tartozó részjátékban (h, m) nem egyensúly).

Minthogy az extenzív formában adott játékokat vissza tudjuk vezetni normál formában megadott játékokra, mindazok az egzisztenciatételek, amelyeket a 2.2. alfejezetben tárgyaltunk továbbra is érvényesek maradnak. Az extenzív forma specialitása azonban lehetővé teszi más típusú egzisztenciatételek bizonyítását is. A legrégibb és mindmáig legalapvetőbb *Kuhn* tétele.

3.12. tétel (Kuhn). *Minden (véges fával ábrázolható) tökéletes információs játéknak van részjáték tökéletes egyensúlypontja.*

Bizonyítás. Nevezzük egy út hosszának a benne lévő élek számát és jelöljük $h = h(F)$-el az F fa hosszát, vagyis a leghosszabb út hosszát F-ben. A bizonyítás a fa hosszára vonatkozó teljes indukcióval megy.

A $h = 0$ esetben az egy pontból álló fára a tétel triviálisan igaz. Tekintsünk egy h hosszúságú fával ábrázolható G játékot ($h > 1$). Tegyük most fel, hogy minden legfeljebb $h-1$ hosszúságú fával ábrázolható játéknak van részjáték tökéletes egyensúlypontja. Hagyjuk el G fájából a gyökeret. Ezáltal véges számú $G_1, \dots, G_k$ részjáték keletkezik, amelyeknek hossza legfeljebb $h-1$. Az indukciós feltevés miatt ezek mindegyikének van legalább egy részjáték tökéletes egyensúlypontja. Jelöljünk ezek közül egyet-egyet (tetszőlegeset) $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_k$-val, a hozzátartozó kifizetésvektorokat pedig $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k$-val.

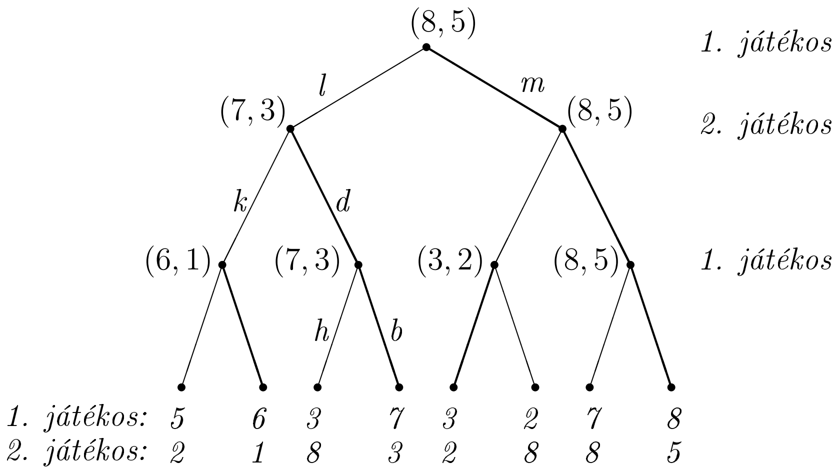
Nyugodtan feltehetjük, hogy a G gyökeréhez az 1. játékos van hozzárendelve. Konstruáljunk G-ben egy stratégiaprofilt a következőképpen: $i = 2, \dots, n$ játékosok stratégiái legyenek azok a stratégiák, amelyeket $\mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_k$ határoz meg, mivel ezeknek a játékosoknak a G gyökerében nem kell lépni.

Az $i = 1$ játékos stratégiája pedig legyen a következő $\hat{\mathbf{s}}_1$ magatartásterv: a $G_1, \ldots, G_k$ részjátékokban azt kell csinálni, amit ezekben az $\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_k$ egyensúlyi stratégiák diktálnak, a G gyökerében pedig azt az élt kell választani, amely ahhoz a részjátékhoz vezet, amelyben az 1. játékos kifizetése a legnagyobb. Másképpen, válasszuk azt az élt, amelyen elindulva olyan részjátékba jutunk, ahol az $\mathbf{f}_i, (i = 1, \ldots, k)$ kifizetésvektor első komponense a legnagyobb. Az így nyert $\hat{\mathbf{s}}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_k$ stratégiaprofil a G egyensúlypontja. Az indukciós feltevés miatt egyetlen játékosnak sem érdemes a részfákban stratégiát változtatni, az 1. játékosnak pedig a gyökérben sem, hiszen az $\hat{\mathbf{s}}_1$ stratégia olyan részjátékba vezeti, amelyben maximális lesz a kifizetése. $\square$

A bizonyítás menetéből az is látszik, hogy az így nyert egyensúlypont részjáték tökéletes, hiszen részjátékok egyensúlypontjaiból építettük fel a G egyensúlypontját.

A fenti tétel nemcsak egy egzisztenciatétel, hanem egyúttal módszert is ad arra, hogy egy egyensúlypontot meghatározzunk. Tulajdonképpen a dinamikus programozás módszerét használtuk, amit ebben a játékelméleti összefüggésben *visszafelé indukció*nak (backward induction) nevezünk.

3.13. példa. Tekintsük a 3.8. ábrán látható fát, amelynek végpontjainál a két játékos kifizetéseit is megadtuk. Minden egyes csúcspontnál feltüntettük a két játékosnak az ezzel a ponttal, mint gyökérrel kezdődő részjátékban elérhető egyensúlyi kifizetéseit. Vastag vonal jelzi az egyensúlyi utat, tehát azt a játszmát, amely akkor jön létre, ha mind a két játékos az (egyetlen) egyensúlyi stratégiáját játssza.

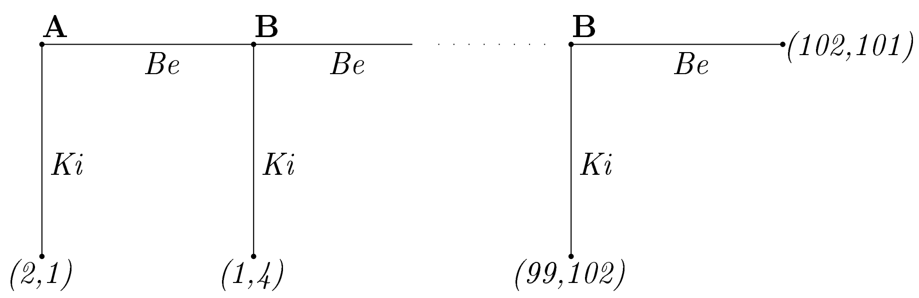


3.8. ábra. A 3.13. példa játékfája

A 3.12. tétel bizonyításából látszik, hogy ha minden játékosnak csupa különböző kifizetése van a végpontokban, akkor csak egyetlen egyensúlypont van, hiszen a maximumot adó él kiválasztása ebben az esetben minden döntési pontban egyértelmű.

Vegyük észre, hogy a visszafelé indukció, mint módszer az egyensúlypont(ok) meghatározására mennyire függ a tökéletes információ és a köztudott racionalitás feltételezésétől. A játékosok által hozott maximalizáló döntések csak akkor állják meg a helyüket, ha valamennyien feltételezik, hogy a játék a továbbiakban szintén ilyen maximalizáló döntések eredményeképpen halad tovább. Ezek a feltételezések bizonyos esetekben olyan eredményekhez is vezethetnek, amelyek intuitív elfogadása elég nehéz.

3.14. példa (Százlábú játék)**.** Két játékos a következő játékot játssza. Egy játékvezető két pénzoszlopot helyez **A**nna elé, az egyikben kettő, a másikban egy érme van. **A** dönthet úgy, hogy elveszi a nagyobbikat, vagy átadja a lépés jogát **B**élának. Az első esetben véget ér a játék, **A** a nagyobbik oszlopot, **B** a kisebbiket kapja. A második esetben a játékvezető két pénzérmét hozzátesz a nagyobbik oszlophoz és átadja a lépés jogát **B**-nek, aki szintén kiszállhat a játékból és elviheti a nagyobbik oszlopot, a kisebbiket **A**-nak hagyva. De ő is átadhatja a következő lépés jogát **A**-nak. Ekkor a játékvezető a kisebbik oszlophoz tesz hozzá két érmét és **A** most is vagy a nagyobb oszlopot választja és azt elviszi nyereményként, vagy folytatja a játékot a lépés jogát átadva **B**-nek. A játékvezető pedig felváltva hol a nagyobbik oszlophoz, hol a kisebbikhez tesz hozzá két érmét. A játék így folytatódik és 50 lépéspár (100 láb) után véget ér azzal, hogy aki éppen soron van, elviszi a nagyobbik pénzoszlopot, a másik pedig a kisebbet. A játékfa a 3.9. ábrán látható.



3.9. ábra. Százlábú játék

A fenti játékra alkalmazva a visszafelé indukciót, azt a meglepő eredményt kapjuk, hogy a játék szinte el sem kezdődik, mert az egyetlen egyensúlypontban **A** már az első lépésben kiszáll és elviszi a két érmét, **B**-re sor sem kerül és meg kell elégedjék egy érmével. Ez azért meglepő, mert minden lépésben kettővel nő a két játékos össznyeresége, és ha elég „sokáig" játszanák a játékot, akkor nagyobb nyereséget érhetnének el mindketten, mint az egyensúlyi stratégiáikkal. A „bizalom hiánya" mindkét játékost sújtja, hasonlóan, mint a *Fogolydilemmá*ban.

3.4. Kevert és viselkedési stratégiák

Ha egy extenzív formában adott játék nem tökéletes információs, akkor semmi garancia nincs arra, hogy a tiszta stratégiák halmazán egyensúlypontja legyen. Itt is lehet azonban alkalmazni egy általános egzisztenciatételt (2.14. tétel), amely szerint a kevert bővítésnek van egyensúlypontja. Ha tehát felírjuk a játékot (teljes vagy redukált lásd a 3.3. feladatot) normál formában, akkor a kevert bővítés minden stratégiája egy valószínűségeloszlás a tiszta stratégiák véges halmazán.

Másképpen is elképzelhető a randomizálás egy extenzív formában adott játékban (lásd a 3.7. definíciót). Tekintsük az i játékost. Rendeljünk hozzá minden információs halmazhoz, ahol az i játékosnak kell lépnie, egy valószínűségeloszlást, amely szerint az i játékos véletlenszerűen választ továbbhaladási irányt. A választások az egyes információs halmazokon egymástól függetlenek és a játékosok választásai is függetlenek egymástól. Ez tulajdonképpen egy stratégia, magatartásterv, amely azonban csak egy valószínűségeloszlás erejéig ad utasítást az egyes információs halmazoknál arra, hogy merre haladjon tovább a játék. Egy ilyen stratégiát *viselkedési* (behavioral) stratégiának nevezünk, megkülönböztetés végett a tiszta stratégiákon képzett *kevert* (mixed) stratégiától.

A viselkedési stratégiák sokkal „életszerűbbek", mint a kevert stratégiák. A randomizáláshoz nem kell elvégezni a legtöbbször óriási, praktikusan sokszor lehetetlen átmenetet az extenzív formából a normál formába. A viselkedési stratégiák sokkal közelebb állnak ahhoz a véletlenszerű továbbhaladás választáshoz, ahogyan valódi játékosok (pl. a sakkozók) „keverik" választási lehetőségeiket.

Mi a viszony a kevert és a viselkedési stratégiák között? Teljes ekvivalenciát a kettő között nem várhatunk, hiszen az i játékos viselkedési stratégiáinak B_i halmaza $\sum_j(c_{ij}-1)$ dimenziós, míg a kevert stratégiák K_i halmaza $\Pi_j c_{ij}-1$ dimenziós, ahol c_{ij} az i játékos j információs halmazában levő választási lehetőségek száma.

Hogy értsük akkor az ekvivalenciát? Azt mondjuk, hogy egy kevert és egy viselkedési stratégia *eredmény-ekvivalens*, ha ugyanazt a valószínűségeloszlást generálják a játékfa végpontjain, vagyis ha bármely végpont elérésének valószínűsége ugyanaz a kevert és a viselkedési stratégia alkalmazása esetén. A viselkedési stratégiából természetes módon tudunk egy eredmény-ekvivalens kevert stratégiát előállítani. Első látásra úgy tűnik, mintha minden kevert stratégiát is elő lehetne állítani eredmény-ekvivalens viselkedési stratégiával. Ennek a problémának az általános tárgyalása a komplikált jelölések miatt nehézkes, ezért két példát mutatunk be, mielőtt *Kuhn* második tételét kimondanánk.

3.15. példa. Tekintsük a 3.10. ábrán látható extenzív formában adott játékot, amelyben az 1. játékos, majd a 2. játékos és utána ismét az 1. játékos választ J és B között. Az 1. játékosnak 3 (triviális) információs halmaza, a 2. játékosnak egy két pontból álló információs halmaza van.

A teljes normál formában a 2. játékosnak két tiszta stratégiája van: B és J. Az 1. játékosnak 8 darab: JJJ, JJB, JBJ, JBB, BJJ, BJB, BBJ, és BBB (pl. a JBJ azt jelenti, hogy az 1. pontban J, a 3.-ban B a 4.-ben J az 1. játékos választása)

Tekintsük azt a viselkedési stratégiapárost, amelyben az 1. játékos v, t és s valószínűséggel választja a J-t és $1-v, 1-t, 1-s$ valószínűséggel a B-t az 1., 3., és 4. döntési pontokban, míg a 2. játékos az egyetlen információs halmazában w valószínűséggel választja J-t és $1-w$ valószínűséggel a B-t. $(0 \leq v, t, s, w \leq 1)$.

Legyen most a $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8)$ valószínűségi vektor (a sorrend fontos, tehát pl. p_6 a BJB tiszta stratégia valószínűségi súlyát jelöli) az 1. játékos, $(w, 1-w)$ pedig a 2. játékos egy kevert stratégiája. Ekkor a hat végpont elérési valószínűségeit felírhatjuk a viselkedési és a kevert stratégiák alapján is. Végpont elérési valószínűségek kevert és viselkedési stratégiákkal számolva:

Végpont	*Kevert*	*Viselkedési*
a	$w(p_1+p_2)$	wvt
b	$w(p_3+p_4)$	$wv(1-t)$
c	$(1-w)(p_1+p_2+p_3+p_4)$	$(1-w)v$
d	$w(p_5+p_6+p_7+p_8)$	$w(1-v)$
e	$(1-w)(p_5+p_7)$	$(1-w)(1-v)s$
f	$(1-w)(p_6+p_8)$	$(1-w)(1-v)(1-s)$

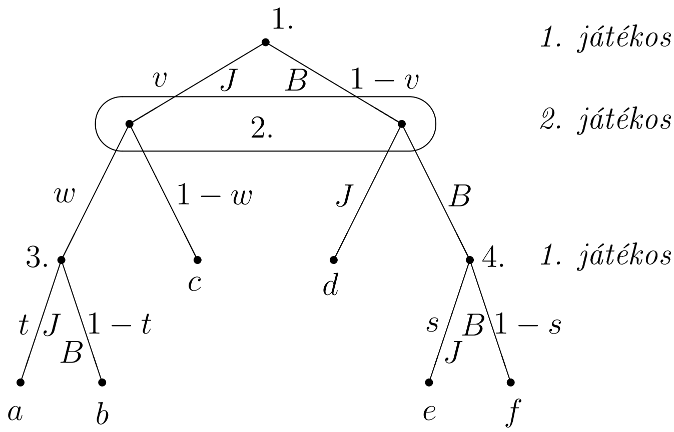
Vegyük most az 1. játékost. Egyszerű számolással igazolhatjuk, hogy a viselkedési stratégiákból nyert

$$(vts, vt(1-s), v(1-t)s, v(1-t)(1-s), (1-v)ts, (1-v)t(1-s),$$
$$(1-v)(1-t)s, (1-v)(1-t)(1-s))$$

kevert stratégia ugyanazokat a végpont elérési valószínűségeket adja, mint a kevert stratégiából számolt

$$v = p_1 + p_2 + p_3 + p_4$$
$$t = \frac{p_1 + p_2}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4}$$
$$s = \frac{p_5 + p_7}{p_5 + p_6 + p_7 + p_8}$$

viselkedési stratégia.



3.10. ábra. A 3.15. példa játékfája

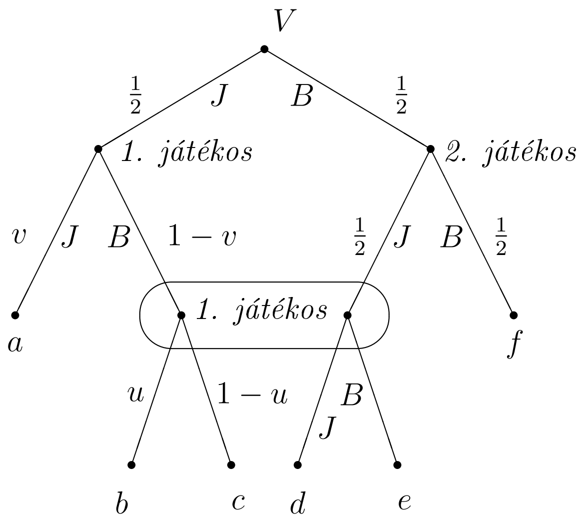
Láthattuk, hogy a fenti példában a viselkedési és a kevert stratégiák eredmény-ekvivalensek voltak. Nincs azonban ez mindig így.

3.16. példa. Tekintsük azt az extenzív formában adott játékot, amelyben először a Véletlen lép és $\frac{1}{2}$ valószínűséggel megy jobbra vagy balra, a játék további lefolyását a 3.11. ábra mutatja.

Mivel a 2. játékosnak csak egy döntési pontja van, a kevert és viselkedési stratégiái egybeesnek. Tegyük fel, hogy $\frac{1}{2}$ valószínűséggel indul (J)obbra vagy (B)alra. Az 1. játékos viselkedési stratégiái egy (v, u) számpárossal jellemezhetők, ahol v annak a valószínűségét jelenti, hogy a „felső" információs halmazban J irányba megy, u pedig azt a valószínűséget, amellyel az „alsó" információs halmazban megy J irányba. Legyen az 1. játékos egy kevert stratégiája az, amelyben $\frac{1}{2}$ valószínűséggel választja a JB és a BJ stratégiáját (az első betű a „felső" információs halmazban, a második az „alsó" információs halmazban való választást mutatja). Megmutatjuk, hogy nincs olyan viselkedési stratégia, amely ezzel eredmény-ekvivalens lenne. Számoljuk ki a hat végpont elérési valószínűségeit a viselkedési és az adott kevert stratégia alapján. A végpont elérési valószínűségek kevert és viselkedési stratégiákkal számolva:

Végpont	*Kevert*	*Viselkedési*
a	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}v$
b	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}(1-v)u$
c	0	$\frac{1}{2}(1-v)(1-u)$
d	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}u$
e	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}(1-u)$
f	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Ennek a táblázatnak a két oszlopa semmilyen v és u értékre sem lehet egyenlő, tehát ezzel a kevert stratégiával egyetlen viselkedési stratégia sem eredmény-ekvivalens.



3.11. ábra. A 3.16. példa játékfája

Mi lehet ennek az oka? Mi a különbség a 3.15. és a 3.16. példában vizsgált játékok között? A 3.15. példa játéka tökéletes emlékezetű volt, míg a 3.16. példában szereplő játék nem, hiszen az 1. játékosnak, amikor másodszor lép, tudnia kellene, hogy az információs halmazának melyik pontjában van, ha figyelemmel kísérte volna, hogy mi történt addig és ezt nem felejtette el. Ez a különbség általában is döntő abban, hogy van-e minden kevert stratégiához vele eredmény-ekvivalens viselkedési stratégia.

3.17. tétel (Kuhn). *Minden tökéletes emlékezetű játékban, minden kevert stratégiához van egy vele eredmény-ekvivalens viselkedési stratégia.*

Bizonyítás. A bizonyítás túlságosan terjedelmes és technikai. Az érdeklődő olvasó megtalálhatja például [Forgó et al. (1999)]-ban. □

3.5. Feladatok

3.1. feladat. Írjuk fel extenzív formában a 3.6. példában megadott játékot másképpen (V és B „sorrendjének” felcserélésével).

3.2. feladat. Adjunk példát arra, hogy két, különböző extenzív formában adott játék teljes normál formái megegyeznek.

3.3. feladat. Először egy definíció:

3.18. definíció. Legyen $G = \{N, \{S_i\}_{i\in N}, \{f_i\}_{i\in N}\}$ egy normál formában adott játék. Nevezzük az i játékos tetszőleges s_i és s_i' stratégiáit ekvivalenseknek, ha minden $s_{-i} \in S_{-i}$-re

$$f_i(s_i, s_{-i}) = f_i(s_i', s_{-i}).$$

A G játék redukált normál formája a $G = \{N, \{\widehat{S}_i\}_{i\in N}, \{\widehat{f}_i\}_{i\in N}\}$, ahol $\widehat{S}_i$ az i játékos stratégiáinak $\widehat{s}_i$ ekvivalenciaosztályai által alkotott halmaz, és minden $i \in N$-re $\widehat{f}_i : \times_{i\in N}\widehat{S}_i \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy $\widehat{f}_i(\widehat{\mathbf{s}}) = f_i(\mathbf{s})$ minden $\mathbf{s} \in \widehat{\mathbf{s}}$-re.

Adjunk példát arra, hogy két, különböző extenzív formában adott játék teljes normál formái nem egyeznek meg, de redukált normál formáik megegyeznek.

3.4. feladat. Írjuk fel a 3.6. példában szereplő játék azon stratégiaprofiljait, amelyek a teljes normál formában szerepelnek, de a redukált normál formában nem.

3.5. feladat. † Mutassuk meg, hogy a 3.14. példában ismertetett játék esetén $\mathbf{A}$ $(Be, \ldots, Be, Ki, Ki)$ stratégiája ellentmond a köztudott racionalitás feltevésnek.

3.6. feladat. Adjunk példát arra, amikor egy extenzív formában adott játék teljes normál formájában két különböző kevert stratégiához tartozó viselkedési stratégiák megegyeznek.

3.7. feladat. Két játékos a következő játékot játssza (egyszerűsített snóbli). Egymástól függetlenül, úgy, hogy a másik ne lássa, 0, 1 vagy 2 pénzérmét rejtenek el. Előbb az első játékos tippeli meg, hogy összesen hány pénz van elrejtve. A másik játékos ezt hallja, majd ő is tippel, de azt amit hallott ő már nem tippelheti. Blöffölés nem megengedett, tehát nem szabad olyant tippelni, ami a saját elrejtett pénzek számát adottnak véve nem fordulhat elő. Aki talál, nyer egy egységet a másiktól, ha senki sem talált, akkor a kifizetés 0.

1. Fogalmazzuk meg a játékot extenzív formában és rajzoljuk fel a játékfát.

2. Adjuk meg a játék redukált normál formáját.

3. Van-e a játéknak a tiszta stratégiák halmazán NEP-je?

3.8. feladat. Legyen G egy véges fával ábrázolható, tökéletes információjú extenzív formában adott játék. Tegyük fel, hogy a fa leveleiben minden játékos kifizetését egy adott folytonos eloszlás szerint egymástól függetlenül, véletlenszerűen generáljuk. Bizonyítsuk be, hogy 1 annak a valószínűsége, hogy az így keletkezett játéknak pontosan egy részjáték tökéletes NEP-je van.

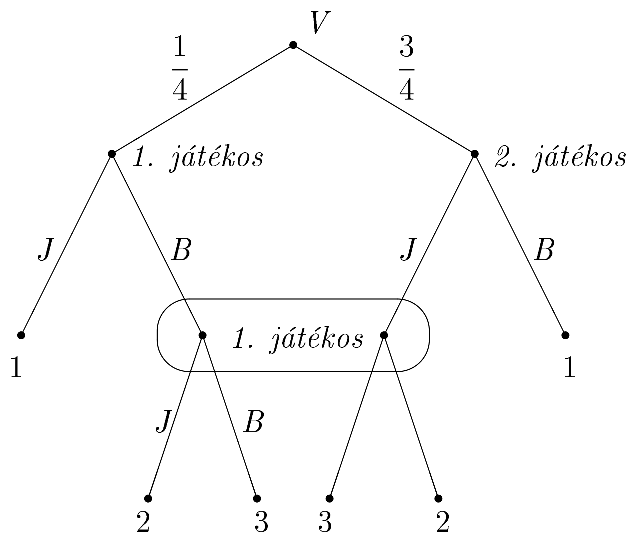
3.9. feladat. Tegyük fel, hogy két játékosnak, A-nak és B-nek meg kell osztozni 100 forinton. Előre megállapodnak, hogy naponta csak egy ajánlat tehető és legfeljebb három napig alkudoznak: az első és harmadik napon A tesz ajánlatot, a másodikon B. Az ajánlatot vagy elfogadja a másik fél, vagy elutasítja. Ha három napon belül nincs egyesség, akkor senki sem kap semmit. Közömbösség esetén a játékos elfogadja az ajánlatot. Minden nap egy forint az A játékos számára α-szorosát, a B játékos számára β-szorosát éri az előző napinak, ahol $0 < \alpha, \beta < 1$ és $100\beta(1-\alpha) \in \mathbb{N}$.

1. Fogalmazzuk meg ezt a játékot tökéletes információjú extenzív formában adott játékként.

2. Visszafelé indukcióval határozzuk meg a játék részjáték tökéletes NEP-jeit.

3.10. feladat. Bizonyítsuk be, hogy minden normál formában adott $G = \{S_1, \ldots, S_n; f_1, \ldots, f_n\}$ véges játékhoz hozzá lehet rendelni egy olyan E extenzív formában adott játékot, amelynek a normál formája éppen G.

3.11. feladat. Tekintsük a következő zérusösszegű játékot extenzív formában (a kifizetések az 1. játékos kifizetései):



1. Írjuk fel a játékot normál formában. Van-e a tiszta stratégiák halmazán NEP?

2. Adjuk meg az első játékos egy olyan kevert stratégiáját, amely realizálható eredmény-ekvivalens viselkedési stratégiával.

3. Biztosak lehetünk-e abban, hogy ebben a játékban minden kevert stratégia realizálható eredmény-ekvivalens viselkedési stratégiával?

4. fejezet

Kétszemélyes zérusösszegű játékok

4.1. Egyensúly és minimax

Egy kétszemélyes zérusösszegű játék (a továbbiakban KZ) normál formában a következő szimbólummal adható meg:

$$G = \{X, Y; f\},$$

ahol X, Y a játékosok stratégiahalmazai, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ az első játékos kifizetőfüggvénye (a második játékos kifizetőfüggvényét nem kell külön megadni, mivel az $-f$). A KZ játék érdekes és különleges speciális esete az n-személyes játéknak. Nemcsak azért érdemes külön figyelmet szentelni a KZ-nek, mert ezzel a játékosztállyal kezdtek el olyan nagy matematikusok foglalkozni már az 1920-as években, mint *Emile Borel* és *Neumann János*, hanem mert mind a játékelméleten belül, mind pedig általában a matematikában nagyon sok fontos alkalmazása van, és sok minden sokkal egyszerűbben és egyértelműbben jelenik meg a KZ-ben, mint az általános n-személyes játékok esetében.

Már eddig is láttuk, hogy mivel a KZ antagonisztikus, ezért rendelkezik a felcserélhetőségi tulajdonsággal és minden NEP-ben azonos a játékosok kifizetése (lásd a 2.5. tételt). Az a szokás alakult ki, hogy az első játékos kifizetését a (bármelyik) NEP-ben a *játék értékének* nevezik. Érdemes felidézni a NEP definícióját egy KZ-re alkalmazva. Az (x^*, y^*) stratégia páros akkor és csak akkor NEP-je a $G = \{X, Y; f\}$ játéknak, ha

$$\begin{aligned} f(x^*, y^*) &\geq f(x, y^*) \\ f(x^*, y^*) &\leq f(x^*, y) \end{aligned}$$

egyenlőtlenségek fennállnak minden $x \in X$ és $y \in Y$-ra.

A NEP speciális (nyeregpontként) való értelmezéséhez szükségünk lesz a következő közismert segédtételre:

4.1. segédtétel. *Legyenek X, Y nemüres halmazok és $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor*

$$\inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} f(x, y) \geq \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} f(x, y). \tag{4.1}$$

Bizonyítás. A bizonyítás feladatként tűztük ki (lásd a 4.1. feladatot). □

4.2. tétel. *Legyen $G = \{X, Y; f\}$ egy KZ, ahol az f kifizetőfüggvény korlátos az $X \times Y$ halmazon. Ekkor G-nek akkor és csak akkor van NEP-je, ha*

$$\min_{y \in Y} \sup_{x \in X} f(x, y) = \max_{x \in X} \inf_{y \in Y} f(x, y). \tag{4.2}$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy (x^0, y^0) a G egy NEP-je. Legyen a játék értéke $v = f(x^0, y^0)$. A NEP definíciója miatt $f(x, y^0) \leq v$ minden $x \in X$-re, vagyis

$$\sup_{x \in X} f(x, y^0) \leq v. \tag{4.3}$$

Definiáljunk egy $g : Y \to \mathbb{R}$ függvényt a következőképpen: $g(y) = \sup_{x \in X} f(x, y)$. Az y^0 a g függvény minimumpontja az Y halmazon. Ha ugyanis nem lenne az, vagyis lenne egy olyan $y' \in Y$, hogy $g(y') < g(y^0)$, akkor

$$v = f(x^0, y^0) \leq f(x^0, y') \leq \sup_{x \in X} f(x, y') = g(y') < g(y^0) = \sup_{x \in X} f(x, y^0) \leq v$$

teljesülne, ami ellentmondás. A (4.3) egyenlőtlenségből, és mivel y^0 a g függvény minimumpontja az Y halmazon, azt kapjuk, hogy

$$\min_{y \in Y} \sup_{x \in X} f(x, y) \leq v.$$

Pontosan ugyanígy lehet bizonyítani, hogy

$$\max_{x \in X} \inf_{y \in Y} f(x, y) \geq v,$$

amiből a

$$\min_{y \in Y} \sup_{x \in X} f(x, y) \leq \max_{x \in X} \inf_{y \in Y} f(x, y).$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Ezt összevetve a 4.1. segédtétel (4.1) egyenlőtlenségével, látjuk, hogy a (4.2) egyenlőség fennáll.

Most pedig tegyük fel, hogy a (4.2) egyenlőség teljesül. Jelöljük a (4.2) egyenlőség egyik oldalát v-vel, és legyen x^0, y^0 olyan, hogy

$$\begin{array}{rcl} \inf_{y\in Y} f(x^0,y) & = & v, \\ \sup_{x\in X} f(x,y^0) & = & v. \end{array}$$

Ebből

$$\begin{array}{rcl} f(x^0,y^0) & \geq & v \\ f(x^0,y^0) & \leq & v, \end{array}$$

tehát $f(x^0,y^0)=v$ következik. Így

$$f(x,y^0) \leq v = f(x^0,y^0) \leq f(x^0,y),$$

minden $x\in X$, $y\in Y$-ra, ami pontosan azt jelenti, hogy (x^0,y^0) NEP. □

További feltételek kellenek ahhoz, hogy a (4.2) egyenlőségben az inf-et és sup-ot min-re és max-ra lehessen cserélni. A (4.2) egyenlőség bal oldalát úgy lehet értelmezni, mint az első játékos „biztonsági szintjét”, azt a kifizetést, amelyet biztosítani tud magának „okos” stratégiaválasztással, bármit csinál is a második játékos. Ugyanígy a jobb oldal a második játékos „biztonsági szintje”, amelynél többet nem veszthet, bármit csinál is az első játékos. A KZ játékok egyensúlyi stratégiáit ezért szokták *optimális stratégiának* is nevezni, mivel az egyensúlyi stratégiák a „biztonsági szintek” maximalizálásával (minimalizálásával) kaphatók meg. A KZ játékok alkotják azt a játékosztályt, ahol ez a teljesen összehangolatlan „egyéni szemlélet” (optimalizálás) az egész játék egyensúlyához vezet. Egyéb esetben, ahhoz, hogy egy NEP megvalósuljon, a játékosoknak kell legyen valami elképzelése (vélekedése, várakozása) arról, hogy a többiek milyen stratégiákat választanak.

4.2. Mátrixjátékok

A KZ játékok között a legfontosabb speciális eset az, amikor a stratégiahalmazok végesek. Ekkor a játékot meg lehet adni egy $m\times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixszal, amelynek a_{ij} eleme azt a kifizetést adja meg, amelyet az első játékos (sorjátékos) kap a másodiktól (oszlopjátékos), amennyiben az első játékos az i, a második játékos a j stratégiát játssza. Ennek a játéknak a kevert bővítését nevezik mátrixjátéknak, amelynek normál formája $G=\{X_m,Y_n,f\}$, ahol

X_m és Y_n az m és n komponensű valószínűségi vektorok halmazai (egységszimplexek), $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{xAy}$ pedig az első játékos várható kifizetése, ha a játékosok az $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ stratégiapárt játsszák.

A 2.14. tétel alapján tudjuk, hogy mivel itt is véges játék kevert bővítéséről van szó, létezik NEP, vagyis van olyan $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$ stratégiapár, hogy minden $\mathbf{x} \in X_m$ és $\mathbf{y} \in Y_n$ -re fennáll

$$\mathbf{xAy}^0 \leq \mathbf{x}^0\mathbf{Ay}^0 \leq \mathbf{x}^0\mathbf{Ay},$$

vagy ami a 4.2. tétel miatt a következőkkel ekvivalens:

$$\max_{\mathbf{x}\in X_m} \min_{\mathbf{y}\in Y_n} \mathbf{xAy} = \min_{\mathbf{y}\in Y_n} \max_{\mathbf{x}\in X_m} \mathbf{xAy}.$$

A 4.2. tétel ebben a formájában *Neumann János* híres *minimax tétele*, amely 22 évvel megelőzte Nash egzisztenciatételét (amely viszont általánosabb). A játék értéke $v = \mathbf{x}^0\mathbf{Ay}^0$ az $\mathbf{A}$ kifizetőmátrix elemeinek súlyozott átlaga, ahol az a_{ij} elem súlya $x_i y_j$, vagyis annak a valószínűsége, hogy az első játékos az i sort, a második pedig (az elsőtől függetlenül) a j oszlopot választja.

A KZ játék abban a vonatkozásban is speciális, hogy az egyensúlyi (optimális) stratégiák halmaza egyszerű szerkezetű, az egyensúlyi stratégiapáros létezésének bizonyításához nem kell fixponttétel, és egy egyensúlyi stratégiapár meghatározása is könnyű még nagy méretű mátrixok esetében is. Először az optimális stratégiák X^0 és Y^0 halmazát jellemezzük.

4.3. tétel. *Az* $\mathbf{A}$ *mátrixjáték egyensúlyi stratégiáinak halmazai konvex poliéderek.*

Bizonyítás. Tekintsük a következő lineáris egyenlőtlenség rendszert az $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, v változókkal:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{x}, \mathbf{y} & \geq & \mathbf{0} \\ \mathbf{1x} & = & 1 \\ \mathbf{1y} & = & 1 \\ \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} & \geq & \mathbf{1}v \\ \mathbf{Ay} & \leq & \mathbf{1}v. \end{array} \tag{4.4}$$

Bebizonyítjuk, hogy $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$ akkor és csak akkor egyensúlyi stratégiapáros és v^0 a játék értéke, ha $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0, v^0)$ a (4.4) egyenlőtlenség rendszer megoldása.

Legyen $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0, v^0)$ a (4.4) megoldása. Ekkor $\mathbf{Ay}^0 \leq \mathbf{1}v^0$, $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^0 \geq \mathbf{1}v^0$. Az első egyenlőtlenséget egy tetszőleges $\mathbf{x} \in X_m$, a másodikat egy ugyancsak tetszőleges $\mathbf{y} \in Y_n$ vektorral balról beszorozva azt kapjuk, hogy minden $\mathbf{x} \in X_m$-re és $\mathbf{y} \in Y_n$-ra fennáll

$$\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{y}^0 \leq \mathbf{x}^0\mathbf{A}\mathbf{y}^0 \leq \mathbf{x}^0\mathbf{A}\mathbf{y}, \tag{4.5}$$

ami azt jelenti, hogy $(\mathbf{x}^0,\ \mathbf{y}^0)$ egyensúlyi stratégiapár, és v^0 a játék értéke.

Ha $(\mathbf{x}^0,\ \mathbf{y}^0)$ egyensúlyi stratégiapár és v^0 a játék értéke, akkor (4.5)-ből következik, hogy $\mathbf{x}^0\mathbf{A}\mathbf{e}_j \geq v^0$ és $\mathbf{e}_i\mathbf{A}\mathbf{y}^0 \leq v^0$ minden $i = 1, \ldots, m$ és $j = 1, \ldots, n$ esetében, ami pontosan azt jelenti, hogy $(\mathbf{x}^0,\ \mathbf{y}^0,\ v^0)$ a (4.4) megoldása.

Az optimális stratégiák X^0, Y^0 halmazai viszont a (4.4) egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmazának, ami egy konvex poliéder, vetítései ($\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$), így azok is konvex poliéderek. □

A fenti tétel módszert is ad egy (esetleg több) optimális stratégia meghatározására: a (4.4) egyenlőtlenségrendszer egy megoldását például a szimplex módszer első fázisával meghatározhatjuk. Lehetséges megoldása biztosan van (4.4)-nek a sokkal általánosabb egzisztenciatételek (pl. a 2.14. tétel) következtében. Nem kellenek azonban olyan „erős" tételek az egzisztencia bizonyításához, mint a fixpont-tételek. Elég a lineáris programozás dualitás tétele, vagy azzal ekvivalens tételek (szeparációs tétel, Farkas-lemma) ahhoz, hogy bebizonyítsuk legalább egy optimális stratégiapár létezését.

Tekintsünk egy $\mathbf{A}$ mátrixjátékot. Az optimális stratégiákat (lásd a 2.8. tételt) nem befolyásolja, ha a mátrix minden eleméhez hozzáadunk egy konstanst, így nyugodtan feltehetjük, hogy $\mathbf{A} > \mathbf{0}$. Tekintsük a következő lineáris programozási feladat primál-duál feladatpárját:

$$P: \begin{array}{rcl} \mathbf{1y} & \to & \max \\ \mathbf{y} & \geq & \mathbf{0} \\ \mathbf{Ay} & \leq & \mathbf{1} \end{array} \qquad\qquad D: \begin{array}{rcl} \mathbf{1x} & \to & \min \\ \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0} \\ \mathbf{xA} & \geq & \mathbf{1} \end{array}$$

Mivel a primál feladatnak van lehetséges megoldása ($\mathbf{y} = \mathbf{0}$), és a lehetséges tartomány az $\mathbf{A} > \mathbf{0}$ feltétel miatt korlátos, a feladatnak optimális megoldása is van. A z^0 optimális célfüggvényérték pozitív, mivel a feladatnak van pozitív lehetséges megoldása.

4.4. tétel. *Ha $\mathbf{y}^0$ a primál, $\mathbf{x}^0$ a duál optimális megoldása és z^0 az optimális célfüggvényérték, akkor $\mathbf{x}^* = \frac{1}{z^0}\mathbf{x}^0$, $\mathbf{y}^* = \frac{1}{z^0}\mathbf{y}^0$ az $\mathbf{A}$ mátrixjáték optimális stratégiapárosa és $\frac{1}{z^0}$ a játék értéke.*

Bizonyítás. Mivel $\mathbf{y}^0$ a primál, $\mathbf{x}^0$ a duál optimális megoldása, a lineáris programozás erős dualitási tétele értelmében $\mathbf{1y}^0 = \mathbf{1x}^0 = z^0 > 0$. Így $\mathbf{x}^*$ és $\mathbf{y}^*$ valószínűségi vektorok. Az

$$\begin{aligned}\mathbf{Ay}^* &\leq \frac{1}{z^0}\mathbf{1}\\ \mathbf{x}^*\mathbf{A} &\geq \frac{1}{z^0}\mathbf{1}\end{aligned}$$

egyenlőtlenségekből következik, hogy $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \frac{1}{z^0})$ lehetséges megoldása a (4.4) egyenlőtlenségrendszernek, amiről egyszerű behelyettesítéssel meggyőződhetünk. □

4.5. következmény. *Ha* $\mathbf{y}^0$ *az oszlopjátékos olyan optimális stratégiája amelynek a k-ik komponense pozitív,* v^0 *a játék értéke, akkor a sorjátékos minden* $\mathbf{x}^0$ *optimális stratégiájára fennáll, hogy*

$$\mathbf{x}^0\mathbf{Ae}_k = v^0.$$

Bizonyítás. Az állítás azonnal következik a 4.4. tételből és a lineáris programozás komplementaritási tételéből. □

4.6. példa. Egy játékos készülődik a tizenegyesrúgás elvégzéséhez, a kapus pedig a kivédéséhez. Közismert, hogy a kapusnak akkor van a legtöbb esélye a hárításra, ha a rúgás pillanatában elhatározza, hogy merre mozdul el. A jó lövéshez is el kell határozni, hogy merre rúgja a játékos a labdát. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a rúgó játékosnak három (tiszta) stratégiája van: **J**obbra, **K**özépre vagy **B**alra rúgja a büntetőt. A kapusnak is három lehetősége van: **J**obbra vagy **B**alra mozdul, vagy **K**özépen marad. Kifizetésnek vegyük azt, hogy adott stratégiapáros mellett 10 büntetőből átlagosan hány gól lesz. A 4.1. ábra mutatja a kifizetéseket, a sorjátékos a Rúgó, az oszlopjátékos a Kapus (a számok nem objektív statisztikán nyugszanak, de nem is teljesen légből kapottak).

Nyilvánvalóan nincs a kifizetőmátrixnak nyeregpontja, így a tiszta stratégiák halmazán nincs egyensúlypont, a tiszta stratégiákat keverni kell. Az optimális keverés meghatározásához írjuk fel a következő lineáris programozási feladatot:

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 &\rightarrow \max\\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0\\ 5y_1 + 8y_2 + 9y_3 &\leq 1\\ 8y_1 + 3y_2 + 8y_3 &\leq 1\\ 9y_1 + 8y_2 + 5y_3 &\leq 1\end{aligned}$$

A primál feladat optimális megoldása $y_1 = 0.0581$, $y_2 = 0.0233$, $y_3 = 0.0581$, a duálisé $x_1 = 0.0581$, $x_2 = 0.0233$, $x_3 = 0.0581$; az optimális célfüggvényérték: $z = 0,1395$. Ebből a 4.4. tétel alapján kapjuk az optimális kevert stratégiákat: a Rúgó és Kapus is a **J**, **K**, **B** stratégiákat rendre 0.416, 0.168, 0.416 valószínűségekkel alkalmazza.

		Kapus J	K	B
	J	5	8	9
Rúgó	K	8	3	8
	B	9	8	5

4.1. ábra. A tizenegyesrúgás (4.6. példa) ábrája

A mátrixjátékok között külön figyelmet érdemelnek a szimmetrikus játékok. Egy $\mathbf{A}$ mátrixjátékot *szimmetrikus*nak nevezünk, ha $\mathbf{A}$ ferdén szimmetrikus, vagyis, ha $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$. Ez a meghatározás tulajdonképpen a 2.3. alfejezetben bevezetett általános szimmetria fogalom alkalmazása a mátrixjátékok esetére. Egy szimmetrikus mátrixjátékban a játékosok szerepét (sor- vagy oszlopjátékos) meg lehet változtatni, anélkül hogy maga a játék megváltozna. Ez a szimmetria abban is megmutatkozik, hogy a két játékos optimális stratégiahalmazai megegyeznek és a játék értéke 0. Ezt a két megállapítást a (4.4) egyenlőtlenségrendszerből azonnal megkapjuk, ha kihasználjuk azt, hogy $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$. Ekkor az is kiderül, hogy a (4.4) egyenlőtlenségrendszer és ezáltal a 4.3. tétel az alábbi alakra egyszerűsödik:

4.7. tétel. *Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az $\mathbf{x}$ valószínűségi vektor az $\mathbf{A}$ szimmetrikus mátrixjátékban optimális stratégia legyen az, hogy fennálljon az $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{0}$ egyenlőtlenség.*

Bizonyítás. Lásd a 4.2. feladatot. □

A szimmetria feltételezése, amennyiben ez valamilyen célból kényelmes, vagy szükséges, nem korlátozza az általánosságot, mivel minden mátrixjáték szimmetrizálható (lásd a 4.3. feladatot).

Noha kétség kívül, a lineáris programozás a leghatékonyabb numerikus módszer akár igen nagy méretű mátrixjátékok optimális stratégiáinak meghatározására is, egyéb módszerek is léteznek. Ezek közül külön figyelmet érdemel a *fiktív lejátszás* módszere, amely kitűnő példája annak, hogy ha lassan is, de meg lehet tanulni az optimális viselkedést, legalábbis egy mátrixjátékban.

A fiktív lejátszás lényege, hogy a játékosok sokszor játsszák ugyanazt az $\mathbf{A}$ mátrixjátékot (sorok száma $m \geq 2$, oszlopok száma $n \geq 2$) és minden „fordulóban" legjobb feleletet adnak ellenfelük múltbeli átlagos viselkedésére (stratégiaválasztására). Az első fordulóban (iterációban) mindkét játékos egy tetszőleges tiszta stratégiát választ (ezeket a megfelelő egységvektorokkal jelöljük). A választott stratégiák legyenek rendre $\mathbf{e}_{i_1}$és $\mathbf{e}_{j_1}$. A második iterációban a sorjátékos $\mathbf{e}_{j_1}$-re ad egy legjobb tiszta stratégia feleletet. Legyen ez $\mathbf{e}_{i_2}$, míg az oszlopjátékos $\mathbf{e}_{i_1}$-re ad egy $\mathbf{e}_{j_2}$ legjobb feleletet. A harmadik iterációban a sorjátékos már a második játékos átlagos múltbeli viselkedésére, vagyis az $\mathbf{y}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_{j_1} + \mathbf{e}_{j_2})$ kevert stratégia ellen ad egy $\mathbf{e}_{i_3}$legjobb feleletet. Hasonlóan választ stratégiát az oszlopjátékos is. Általában a k-ik iterációban a sorjátékos az oszlopjátékosnak az első $k-1$ iterációban alkalmazott stratégiáinak $\mathbf{y}_{k-1} = \frac{1}{k-1}(\mathbf{e}_{j_1} + \cdots + \mathbf{e}_{j_{k-1}})$ átlaga ellen választ legjobb feleletet. Hasonlóan cselekszik az oszlopjátékos is. Így az $(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$ stratégiapárosok egy végtelen sorozatát kapjuk. Ezek segítségével a játék értékét korlátok közé (L_k és U_k) tudjuk szorítani. Ez azon az egyszerű megfigyelésen alapszik, amely a minimax egyenlőségből (4.2. tétel) azonnal következik: tetszőleges $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ stratégiapár esetén

$$\min_j \mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{e}_j \le v \le \max_i \mathbf{e}_i\mathbf{A}\mathbf{y},$$

ahol v a játék értéke. Ebből kapjuk a következő becslést:

$$L_k = \max_k \min_j \mathbf{x}_k\mathbf{A}\mathbf{e}_j \le v \le \min_k \max_i \mathbf{e}_i\mathbf{A}\mathbf{y}_k = U_k.$$

Ismert (lásd [Forgó et al. (1999)]), hogy

$$U_k - L_k \le a2^{m+n}k^{-\frac{1}{m+n-2}}. \tag{4.6}$$

ahol a az $\mathbf{A}$ legnagyobb abszolút értékű elemének abszolút értéke.

4.8. tétel (Brown-Robinson–tétel). *A fiktív lejátszás során kapott* $\{\mathbf{x}_k\}$, $\{\mathbf{y}_k\}$ *végtelen sorozatok minden torlódási pontja rendre a sor- és az oszlopjátékos optimális stratégiája.*

Bizonyítás. A (4.6) egyenlőtlenség jobb oldala tart 0-hoz, így U_k és L_k is tart v-hez, a játék értékéhez. A kevert stratégiahalmazok kompaktak, tehát tetszőleges halmazbeli sorozatnak van halmazbani torlódási pontja. Az L_k $\mathbf{x}_k$-nak, U_k pedig $\mathbf{y}_k$-nak folytonos függvénye, így tetszőleges, $\mathbf{x}^0$ és $\mathbf{y}^0$ „torlódási pontpár” esetén $v = \mathbf{x}^0 A\mathbf{y}^0$, tehát a torlódási pontok rendre a sor- és az oszlopjátékos optimális stratégiái. □

Amint látjuk, a (4.6) becslés nagyon durva. A konvergencia sebessége a számítástechnikai tapasztalatok szerint ennél sokkal jobb ($\sqrt{k}$ nagyságrendű), de még mindig elég lassú. A dolog lényege nem is ez, hanem a tanulási folyamat modellezése és annak bemutatása, hogy a tanulás sikerre vezet.

4.3. Bimátrix-játékok†

Példáink között sok bimátrix-játék volt eddig is, és az elnevezést ugyan használtuk, de pontos definíciót nem adtunk. Most ezt pótoljuk.

4.9. definíció. Egy véges, kétszemélyes játékot, és annak kevert bővítését is bimátrix-játéknak nevezünk. Tegyük fel, hogy az első (sor) játékosnak m, a második (oszlop) játékosnak pedig n tiszta stratégiája van. A bimátrix-játékot egyértelműen definiálják az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ $m \times n$-es mátrixok, ahol a mátrixok a_{ij}, és b_{ij} elemei a sor- és oszlopjátékos kifizetéseit jelölik akkor, ha a sorjátékos az i, az oszlopjátékos pedig a j stratégiát játssza. A bimátrix-játékok jelölésére a $G = (\mathbf{A}, \mathbf{B})$ szimbólumot használjuk, és ha csak másként nem mondjuk, a kevert bővítést értjük alatta.

Most is, csakúgy mint a mátrixjátékok esetében, szeretnénk a $G = (\mathbf{A}, \mathbf{B})$ bimátrix-játék NEP-jeit egy egyenlőtlenségrendszer megoldásaiként jellemezni. Tartsuk meg a korábbi jelölést: X_m, Y_n a kevert stratégiák halmazát jelöli. Ekkor $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$ a $G = (\mathbf{A}, \mathbf{B})$ bimátrix-játéknak pontosan akkor NEP-je, ha

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{x}^0\mathbf{A}\mathbf{y}^0 & \geq & \mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{y}^0 \\ \mathbf{x}^0\mathbf{B}\mathbf{y}^0 & \geq & \mathbf{x}^0\mathbf{A}\mathbf{y} \end{array} \tag{4.7}$$

fennáll minden $\mathbf{x} \in X_m$, és $\mathbf{y} \in Y_n$ esetén.

Tekintsük a következő $m + n + 2$ változós egyenlőtlenség rendszert:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{x} & \in & X_m \\ \mathbf{y} & \in & Y_n \\ \alpha, \beta & \in & \mathbb{R} \\ \mathbf{A}\mathbf{y} & \leq & \alpha\mathbf{1} \\ \mathbf{x}\mathbf{B} & \leq & \beta\mathbf{1} \\ \mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{y} & = & \alpha \\ \mathbf{x}\mathbf{B}\mathbf{y} & = & \beta \end{array} \tag{4.8}$$

4.10. tétel. *Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy* $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$ *a* $G = (\mathbf{A}, \mathbf{B})$ *bimátrix-játék* NEP*-je legyen az, hogy létezzenek olyan* α^0, β^0 *valós számok, hogy* $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0, \alpha^0, \beta^0)$ *lehetséges megoldása legyen a* (4.8) *egyenlőtlenség rendszernek.*

Bizonyítás. A bizonyítás teljesen hasonló a 4.3. tétel bizonyításához, ezért az olvasóra bízzuk (lásd a 4.4. feladatot). □

Ellentétben a mátrixjátékokkal, az egyensúlypontokat jellemző egyenletrendszer nem lineáris és így olyan egyszerű eszközökkel, mint a lineáris programozás, nem lehet a NEP-eket meghatározni.

A nemlinearitást azonban ki lehet venni a feltételek közül és az egyensúlypontokat egy kvadratikus programozási feladat optimális megoldásaiként jellemezni.

Tekintsük a következő Q feladatot:

$$\begin{array}{rcl} Q(\mathbf{x},\mathbf{y},\alpha,\beta)=\mathbf{x}(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{y}-\alpha-\beta & \rightarrow & \max \\ \mathbf{x} & \in & X_m \\ \mathbf{y} & \in & Y_n \\ \alpha,\beta & \in & \mathbb{R} \\ \mathbf{Ay} & \leq & \alpha\mathbf{1} \\ \mathbf{xB} & \leq & \beta\mathbf{1} \end{array} \tag{4.9}$$

4.11. tétel. *Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy* $(\mathbf{x}^0,\mathbf{y}^0)$ *a* $G=(\mathbf{A},\mathbf{B})$ *bimátrix-játék* NEP*-je legyen az, hogy létezzenek olyan* α^0,β^0 *számok, hogy* $(\mathbf{x}^0,\mathbf{y}^0,\alpha^0,\beta^0)$ *optimális megoldása legyen a* (4.9) *feladatnak, és az optimális célfüggvényérték legyen* 0.

Bizonyítás. Legyen $(\mathbf{x}^0,\mathbf{y}^0)$ egy NEP , és α^0, β^0 az ehhez tartozó kifizetőfüggvény értékek. Ekkor a (4.9) feladat minden $(\mathbf{x},\mathbf{y},\alpha,\beta)$ lehetséges megoldására

$$\mathbf{x}(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{y}-\alpha-\beta=\mathbf{x}(\mathbf{Ay}-\alpha\mathbf{1})+(\mathbf{xB}-\beta\mathbf{1})\mathbf{y}\leq 0.$$

A 4.10. tétel miatt $Q(\mathbf{x}^0,\mathbf{y}^0,\alpha^0,\beta^0)=0$, ezért $(\mathbf{x}^0,\mathbf{y}^0,\alpha^0,\beta^0)$ optimális megoldása Q-nak.

Legyen $(\mathbf{x}^0,\mathbf{y}^0,\alpha^0,\beta^0)$ a Q feladat egy optimális megoldása (globális maximumpont). Mivel tudjuk, hogy minden bimátrix-játéknak van NEP-je, ezért $Q(\mathbf{x}^0,\mathbf{y}^0,\alpha^0,\beta^0)=0$, vagyis

$$\mathbf{x}^0(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{y}^0-\alpha^0-\beta^0=\mathbf{x}^0(\mathbf{Ay}^0-\alpha^0\mathbf{1})+(\mathbf{x}^0\mathbf{B}-\beta^0\mathbf{1})\mathbf{y}^0=0,$$

ami a Q feladat feltételei miatt csak úgy lehet, ha

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{x}^0\mathbf{Ay}^0 & = & \alpha^0 \\ \mathbf{x}^0\mathbf{By}^0 & = & \beta^0 \end{array}$$

ekkor pedig a 4.10. tétel miatt $(\mathbf{x}^0,\mathbf{y}^0)$ NEP. □

A NEP-ek halmaza nem feltétlenül konvex, de ennek ellenére, ellentétben a több, mint kétszemélyes polimátrix játékokkal, előállítható konvex halmazok egyesítéseként.

Ennek megmutatásához legelőször bevezetjük az *extremális egyensúlypont* (EEP) fogalmát. Tekintsük a következő két poliedrikus halmazt:

$$\begin{aligned} S &= \{(\mathbf{x}, \beta) \mid \mathbf{xB} \le \beta \mathbf{1}, \mathbf{x} \in X_m, \beta \in \mathbb{R}\} \\ T &= \{(\mathbf{y}, \alpha) \mid \mathbf{Ay} \le \alpha \mathbf{1}, \mathbf{y} \in Y_n, \alpha \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

A sorjátékos egy $\mathbf{x}$ stratégiáját EEP-nek nevezzük, ha van olyan β, hogy ($\mathbf{x}$,β) az S halmaz csúcs (extremális) pontja. Ugyanígy az oszlopjátékos egy $\mathbf{y}$ stratégiáját EEP-nek nevezzük, ha van olyan α, hogy ($\mathbf{y}$,α) a T halmaz csúcspontja. Könnyű belátni, hogy ha $(\mathbf{x}, \beta)$ az S csúcspontja, akkor nincs olyan $\gamma \neq \beta$, hogy $(\mathbf{x}, \gamma)$ is csúcspontja S-nek (lásd a 4.5. feladatot). Hasonló a helyzet a T halmazzal is. Ebből következik, hogy az EEP-k száma véges.

4.12. tétel. *A $G = (\mathbf{A}, \mathbf{B})$ bimátrix-játék minden NEP-je kifejezhető az EEP-k konvex lineáris kombinációjaként.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0, \alpha^0, \beta^0)$ a Q feladat ((4.9) feladat) egy optimális megoldása, vagyis, a 4.11. tétel értelmében, $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$ NEP. Ha az $\mathbf{y} = \mathbf{y}^0$, $\alpha = \alpha^0$ változókat rögzítjük, akkor Q egy lineáris programozási feladat, amelynek minden megoldása, így $(\mathbf{x}^0, \beta^0)$ is kifejezhető az optimális csúcspontok, amelyek egyben S csúcspontjai, egy véges U részhalmazának (amelyek $\mathbf{x}$ „része" EEP) olyan konvex lineáris kombinációjaként, amelyben a súlyok pozitívak.

Ugyanígy lehet belátni, hogy $(\mathbf{y}^0, \alpha^0)$ a T csúcspontjai egy, mondjuk s elemű, V részhalmazának (amelynek elemei rögzített $(\mathbf{x}^0, \beta^0)$ mellett a Q optimális megoldásai) pozitív súlyokkal vett konvex lineáris kombinációi.

Mivel bármely $(\mathbf{x}, \beta)$ optimális megoldása a Q-nak, amelyről tudjuk, hogy optimális célfüggvényértéke 0, ezért

$$\mathbf{x}(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{y}^0 - \alpha^0 - \beta = \mathbf{x}(\mathbf{Ay}^0 - \alpha^0 \mathbf{1}) + (\mathbf{xB} - \beta \mathbf{1})\mathbf{y}^0 = 0,$$

minden $(\mathbf{x}, \beta) \in U$ esetén. Mivel $\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$, $\mathbf{Ay}^0 \le \alpha^0 \mathbf{1}$, $\mathbf{y}^0 \ge \mathbf{0}$, $\mathbf{xB} \le \beta \mathbf{1}$, így

$$(\mathbf{xB} - \beta \mathbf{1})\mathbf{y}^0 = 0 \quad \text{minden } (\mathbf{x}, \beta) \in U\text{-ra.} \tag{4.10}$$

Azonban $\mathbf{y}^0 = \lambda_1 \mathbf{y}_1 + \ldots, \lambda_r \mathbf{y}_r$, $\lambda_j > 0$, $(\mathbf{y}_j, \alpha_j) \in V$ minden $j = 1, \ldots, r$-re. Ezért (4.10)-ből következik, hogy

$$(\mathbf{xB} - \beta \mathbf{1})\mathbf{y}_j = 0 \quad \text{minden } (\mathbf{x}, \beta) \in U\text{-ra, és } j = 1, \ldots, r\text{-re.}$$

Hasonlóan láthatjuk be, hogy

$$\mathbf{x}_i(\mathbf{Ay} - \alpha \mathbf{1}) = 0 \quad \text{minden } (\mathbf{y}, \alpha) \in V\text{-re és } (\mathbf{x}_i, \beta_i) \in U,\ i = 1, \ldots, s\text{-re.}$$

Tehát az $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j)$ stratégiapárosok valamennyien NEP-ek és mint láttuk, $\mathbf{x}^0$ az $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_s$, az $\mathbf{y}^0$az $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_r$ stratégiák konvex lineáris kombinációi. □

Az EEP-k segítségével a NEP-ek halmazát jellemezni lehet. Jelöljük a NEP-ek halmazát E-vel. Legyen $\mathbf{x} \in X_m$ a sorjátékos egy tetszőleges stratégiája, és $X \subseteq X_m$ a stratégiák egy halmaza. Definiáljuk a következő halmazokat:

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}) &= \{\mathbf{y} \in Y_n \mid (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E\}, \\ H(X) &= \cap_{\mathbf{x} \in X} h(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Világos, hogy ha X véges, akkor $H(X)$ egy poliéder. Tekintsük az EEP-ok egy X (véges) halmazát. A 4.12. tétel szerint minden $\mathbf{x} \in X$-hez van olyan egyértelműen meghatározott β, hogy $(\mathbf{x}, \beta)$ az S halmaz extremális pontja valamely fix $(\mathbf{y}^0, \alpha^0)$ mellett. Az X halmazt *erősnek* nevezzük, ha van olyan $(\mathbf{y}^0, \alpha^0)$, hogy $(\mathbf{x}, \mathbf{y}^0, \alpha^0, \beta)$ kielégíti a (4.8) egyenlőtlenség rendszert. Nevezzük az X erős halmazt *maximálisnak*, ha egyetlen erős halmaznak sem valódi részhalmaza. Jelöljük az A halmaz konvex burkát $\mathrm{con}(A)$-val, az erős halmazok (véges) halmazát Ω-val és legyen $N(A) = \mathrm{con}(A) \times H(A)$.

4.13. tétel. $E = \cup_{X \subset \Omega} N(X)$.

Bizonyítás. Legyen $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E$. Rögzítsük $\mathbf{y}$-t és az $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$-hoz tartozó α-t. A 4.10. tétel szerint $\mathbf{x}$ optimális megoldása a Q feladatnak ((4.9) feladat), és a Q (amely most egy LP) X optimális csúcspontjainak konvex lineáris kombinációja pozitív súlyokkal. Ebből és $H(X)$ definíciójából következik, hogy

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \cup_{X \subset \Omega} \mathrm{con}(X) \times H(X) = \cup_{X \subset \Omega} N(X).$$

Legyen most $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in N(X) = \cup_{X \subset \Omega} \mathrm{con}(X) \times H(X)$, továbbá $\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \lambda_s \mathbf{x}_s$, $\lambda_j > 0$, $j = 1, \ldots, s$. Az $X = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_s\}$ halmaz erős, mivel a $H(X)$ definíciója miatt $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) \in E$. Minden $\mathbf{x}_i$, a megfelelő β_i-vel megoldása a Q feladatnak rögzített $(\mathbf{y}, \alpha)$ mellett és így ezek konvex lineáris kombinációja is megoldása Q-nak, ami azt jelenti, hogy $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E$. $\square$

Nevezzük azokat az X erős halmazokat *maximális*nak, amelyekhez nincs olyan $Z \supseteq X$, hogy $N(X) \subseteq N(Z)$, és jelöljük Ω'-vel a maximális erős halmazok osztályát. Ekkor a 4.13. tételben Ω-t Ω'-vel lehet helyettesíteni (lásd a 4.8. feladatot).

Az alábbi állítások bizonyítását az olvasóra bízzuk:

1. Ha X és Z két különböző maximális erős halmaz, akkor $N(X) \cap N(Z) = \emptyset$ (lásd a 4.6. feladatot).

2. Ha X maximális erős halmaz, akkor $N(X)$ maximális Nash-halmaz (lásd a 4.7. feladatot).

Eddigi eredményeinket össze is foglalhatjuk a következőképpen:

4.14. következmény. *A bimátrix-játékok egyensúlypontjainak halmaza diszjunkt konvex poliéderek egyesítése. Ezek a poliéderek maximális Nash-halmazok.*

Bizonyítás. Lásd a 4.9. feladatot. □

4.4. Feladatok

4.1. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha X, Y nemüres halmazok, és $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, akkor

$$\inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} f(x, y) \geq \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} f(x, y).$$

4.2. feladat. Bizonyítsuk be, hogy annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az $\mathbf{x}$ valószínűségi vektor az $\mathbf{A}$ szimmetrikus mátrixjátékban optimális stratégia legyen az, hogy fennálljon az $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{0}$ egyenlőtlenség.

4.3. feladat. Legyen $\mathbf{A} > \mathbf{0}$ egy $m \times n$-es mátrixjáték, és legyen

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m\times m} & \mathbf{A} & -\mathbf{1}_m \\ -\mathbf{A}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0}_{n\times n} & \mathbf{1}_n \\ \mathbf{1}_m^{\mathrm{T}} & -\mathbf{1}_n^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}$$

Bizonyítsuk be a következőket:

1. Ha $\mathbf{z} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \lambda)$, ahol $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ az $\mathbf{S}$ mátrixjáték NEP-je, akkor $\lambda \in (0, 1)$.

2. Ha $c = \frac{1-\lambda}{2}$, akkor $\frac{1}{c}\mathbf{u}$ a sorjátékos, $\frac{1}{c}\mathbf{v}$ az oszlopjátékos egyensúlyi stratégiája az $\mathbf{A}$ mátrixjátékban, és $\frac{\lambda}{c}$ a játék értéke.

3. Ha $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ az $\mathbf{A}$ mátrixjáték egyensúlyi stratégiapárosa, és v a játék értéke, akkor $\mathbf{z}^* = \frac{1}{2+v}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, v)$ az $\mathbf{S}$ mátrixjáték egyensúlyi stratégiája.

4.4. feladat. Bizonyítsuk be a 4.10. tételt.

4.5. feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathbf{x}, \beta)$ az S csúcspontja, akkor nincs olyan $\gamma \neq \beta$, hogy $(\mathbf{x}, \gamma)$ is csúcspontja S-nek.

4.6. feladat. † Bizonyítsuk be, hogy ha X és Z két különböző maximális erős halmaz, akkor $N(X) \cap N(Z) = \emptyset$.

4.7. feladat. † Bizonyítsuk be, hogy ha X maximális erős halmaz, akkor $N(X)$ maximális Nash-halmaz.

4.8. feladat. Mutassuk meg, hogy a 4.13. tételben Ω Ω'-re cserélhető.

4.9. feladat. Bizonyítsuk be a 4.14. következményt.

4.10. feladat. Válasszuk egy $\mathbf{A}$ $m \times n$-es mátrix minden elemét véletlenszerűen, egymástól függetlenül ugyanazon folytonos eloszlás szerint. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy $\mathbf{A}$-nak van nyeregpontja. Mi ennek a valószínűsége ha $\min\{m, n\} \to \infty$?

5. fejezet

Racionalizálhatóság és egyensúly

Ebben a fejezetben a Nash-egyensúly általánosításaival és szűkítéseivel foglalkozunk a véges játékok és ezek kevert bővítésének keretében. Az általánosítás bővíti a lehetőségeket valamilyen kívánt stabilitás elérésére, míg a szűkítés az intuitíven nem elég vonzó NEP-ek kiszűrésére szolgál. A továbbiakban a játékosok tiszta stratégiáit cselekvéseknek (akcióknak) nevezzük, így egy véges játékot (és annak kevert bővítését) a $G = \{N, (A_i)_{i \in N}, (f_i)_{i \in N}\}$ szimbólummal jelölünk, ahol N a játékosok véges halmaza, A_i az i játékos cselekvéseinek véges halmaza, f_i pedig a valós értékű kifizetőfüggvénye, amely a cselekvésprofilok A véges halmazán ($A = \times_{i \in N} A_i$) van értelmezve.

5.1. Racionalizálhatóság

A döntéselméleti irodalom terminológiája szerint a racionális döntéshozók, definíció szerint, a lehetséges alternatívák közül a számukra maximális hasznosságút, bizonytalanság esetén pedig a maximális várható hasznosságút választják. Ez utóbbi esetben a világ állapotainak egy valószínűségeloszlását használják a várható hasznosság kiszámításához. A leggyakrabban ez a valószínűségeloszlás a döntéshozó véleményét reprezentáló ún. *szubjektív valószínűségeloszlás*. Egy adott esemény bekövetkezésének szubjektív valószínűségét az adott esemény bekövetkezésébe vetett hit mérőjeként értelmezzük.

Játékelméleti összefüggésben tekinthetjük úgy, hogy a döntéshozók a játékosok, és számukra, mivel nem tudják befolyásolni, a többi játékos cselekvései által meghatározott csonka cselekvésprofil alkotja a világ állapotait. Nevezzük az i játékos egy v_i szubjektív valószínűségeloszlását az $A_{-i} = \times_{j \in N \setminus \{i\}} A_j$ csonka cselekvésprofilok halmazán az i játékos *vélekedés*ének. Az i játékos tehát úgy gondolja, hogy a többi játékos, akár akcióik összehangolásával is, a v_i valószínűségeloszlás szerint választ a rendelkezésre álló cselekvések közül.

Az $a_i \in A_i$ cselekvés *legjobb válasz* a v_i vélekedésre, ha maximalizálja a v_i valószínűségekkel vett várható kifizetéseket az A_i (véges) halmazon. Az i játékost *racionálisnak* nevezzük, ha a saját vélekedése alapján mindig legjobb választ ad. Ez a fajta racionalitás köztudott, tehát az i játékos a j játékosról ($i \neq j$) is felteszi, hogy csak olyan cselekvéseket választ, amelyek legjobb válaszok a saját v_j vélekedése alapján s.i.t.

Ha az i játékos a többiekről is felteszi, hogy racionálisak, akkor a saját v_i vélekedését is racionalizálnia kell, vagyis összhangba kell hozni a saját és a többi játékos vélekedéseivel. Ezt a követelményt fogalmazza meg a *racionalizálhatóság* következő definíciója:

5.1. definíció. Az $a_i \in A_i$ cselekvés racionalizálható a $G = \{N, (A_i)_{i\in N}, (f_i)_{i\in N}\}$ véges játékban, ha minden $j \in N$-re van egy $Z_j \subseteq A_j$ halmaz, hogy

1. $a_i \in Z_i$,

2. minden $a_j \in Z_j$ cselekvés legjobb felelet a j játékos egy olyan v_j vélekedésére, amelynek a támasza a Z_{-j} ($Z_{-j} = \times_{k\in N\setminus\{j\}} Z_k$) egy részhalmaza.

Azt mondjuk, hogy a $(Z_j)_{j\in N}$ halmazok *támogatják* az a_i racionalizálható cselekvést, ha a_i és $(Z_j)_{j\in N}$-k megfelelnek az 5.1. definíció feltételeinek. Vegyük észre, hogy ha $(Z_j)_{j\in N}$ és $(Z_j')_{j\in N}$ halmazrendszer támogatja az a_i racionalizálható cselekvést, akkor $(Z_j \cup Z_j')_{j\in N}$ szintén (lásd az 5.1. feladatot).

Külön figyelmet érdemelnek azok a cselekvések, amelyek semmilyen vélekedések esetén sem lehetnek legjobb válaszok.

5.2. definíció. Az i játékos egy $a_i \in A_i$ cselekvését *rossz válasz*nak nevezzük, ha nincs olyan vélekedése, amelyre az a_i cselekvés a legjobb válasz.

Az igazán kifejező a „sohasem jó válasz” (never-best reply) lenne, csak a rövidség kedvéért használjuk a nem elég pontos „rossz válasz” elnevezést. Az világos a definícióból, hogy a rossz válaszok nem racionalizálhatóak.

A már ismert *szigorúan dominálás*t kiterjesztjük arra az esetre, amikor kevert stratégiák is dominálhatnak egy cselekvést.

5.3. definíció. Egy $a \in A_i$ cselekvés szigorúan dominált, ha az i játékosnak van olyan kevert stratégiája, amely szigorúan nagyobb várható kifizetést ad neki a többi játékos bármely $\mathbf{a}_{-i} \in A_{-i}$ csonka cselekvésprofilja esetén.

5.4. tétel. *Egy cselekvés akkor és csak akkor rossz felelet, ha szigorúan dominált.*

Bizonyítás. Legyen $G = \{N, (A_i)_{i\in N}, (f_i)_{i\in N}\}$ egy véges játék és $a_i^* \in A_i$. Definiáljunk egy H véges zérusösszegű játékot, amelyben az 1. játékos stratégiahalmaza $A_i \setminus \{a_i^*\}$, a 2. játékosé pedig A_{-i}. Az 1. játékos kifizetőfüggvénye legyen $g(a_i, \mathbf{a}_{-i}) = f_i(a_i, \mathbf{a}_{-i}) - f_i(a_i^*, \mathbf{a}_{-i})$.

A játékosok kevert stratégiáit jelöljük k_1, k_2-vel, az 1. játékos várható kifizetését pedig $E(k_1, k_2)$-vel.

Az a_i^* akkor és csak akkor rossz felelet G-ben, ha

$$\min_{k_2} \max_{a_i} \ E(a_i, k_2) > 0,$$

ami, mivel E lineáris k_1-ben rögzített k_2 mellett, akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$\min_{k_2} \max_{k_1} \ E(k_1, k_2) > 0.$$

A kétszemélyes zérusösszegű játékok minimax tétele szerint (4.2. tétel) ez pontosan akkor igaz, ha

$$\max_{k_1} \min_{k_2} \ E(k_1, k_2) > 0,$$

amiből következik, hogy van olyan k_1^* kevert stratégia, hogy $E(k_1^*, k_2) > 0$ minden k_2-re, vagyis k_1^* legjobb válasz a 2. játékos minden vélekedésére. Ebből a H játék kifizetőfüggvényének a definíciója miatt az következik, hogy az i játékos várható kifizetése a k_1^* valószínűségekkel (az a_i^* valószínűségét 0-nak vesszük!) nagyobb, mint $f_i(a_i^*, \mathbf{a}_{-i})$ minden $\mathbf{a}_{-i}$-re, ami pontosan azt jelenti, hogy az a_i^* cselekvés szigorúan dominált. □

Tekintsük azt az iteratív eljárást, amelyben tetszőleges sorrendben és sebességgel (lépésenként egy vagy több) rossz feleletet elhagyunk a cselekvéshalmazokból. Ez az eljárás általánosítása a korábban megismert eljárásnak, amelyben szigorúan dominált stratégiákat hagyunk el minden lépésben. Az 5.4. tétel szerint most is azt csináljuk, csak a szigorú dominanciát értelmezzük általánosabban. Mivel a cselekvéshalmazok végesek, és minden lépésben legalább egy cselekvést kiküszöbölünk, ezért az eljárás véges számú lépésben véget ér, vagyis olyan akcióhalmazokat kapunk, amelyekben már egyetlen rossz felelet sincs. Legyen az így kapott játék $G' = \{N, (B_i)_{i\in N}, (f_i')_{i\in N}\}$, $B_i \subseteq A_i, i \in N$ és f_i' az f_i megszorítása a cselekvésprofilok $\times_{j\in N} B_j$ halmazára.

5.5. tétel. *B_i az i játékos racionalizálható cselekvéseinek a halmaza minden $i \in N$-re.*

Bizonyítás. Tegyük először fel, hogy az $a_i^* \in A_i$ cselekvés racionalizálható, tehát valamely $(Z_j)_{j\in N}$ halmazrendszer támogatja. Legyen B_i^t a rossz feleletek iteratív kiküszöbölése során az i játékosnak t lépést „túlélt” akcióhalmaza. Bármely t-re $Z_i \subseteq B_i^t$, mivel minden cselekvés Z_i-ben legjobb felelet az i játékos valamely vélekedésére, így az 5.2. definíció értelmében nem lehet rossz felelet és ezért az 5.4. tétel szerint nem szigorúan dominált a $G^t = \{N, (B_i^t)_{i\in N}, (f_i^t)_{i\in N}\}$ játékban, ezért $a_i^* \in B_i$.

Most megmutatjuk, hogy B_i minden eleme racionalizálható a $B_1, \dots, B_n$ halmazok támogatásával, $i \in N$. B_i egyetlen eleme sem szigorúan dominált, ezért az 5.4. tétel értelmében B_i minden eleme legjobb válasz a B_{-i} csonka akcióprofilra vonatkozó valamely vélekedésre. Azt kell már csak megmutatnunk, hogy B_i minden eleme legjobb felelet az A_i teljes akcióhalmazon. Ha $a_i \in B_i$ nem legjobb válasz az A_i akcióhalmazon, akkor van olyan t index, hogy a_i legjobb válasz a B_i^t halmazon valamely B_{-i}-re vonatkozó v_i vélekedés esetében, de nem legjobb válasz a B_i^{t-1}-en. Vagyis van olyan $b_i \in B_i^{t-1} \setminus B_i^t$, amely legjobb válasz v_i-re B_i^{t-1} elemei között, ami ellentmond annak, hogy b_i-t, mint rossz feleletet, a t-ik iterációban kiküszöböltük. □

A fenti tétel egyszerű következménye, hogy mindegy, hogy milyen sorrendben és egyszerre hány szigorúan dominált stratégiát küszöbölünk ki, az eredmény ugyanaz lesz. Megjegyezzük, hogy a fenti eredmények némi matematikai-technikai nehézségek legyűrésével, kiterjeszthetők bizonyos végtelen akcióhalmazok esetére is (lásd [Osborne és Rubinstein (1994)]).

5.6. példa. Két játékos a következő játékot játssza. A két játékos egymástól függetlenül választ egy egész számot az $[1, K]$ intervallumban ($K \geq 2$). Az nyer egy egységet a másiktól, akinek a választott száma közelebb van a két választott szám átlagának 2/3 részéhez. Azonos távolság esetén mindketten 1/2 egységet kapnak. Ennek a játéknak egyetlen racionalizálható stratégiapárosa van a tiszta stratégiák halmazán, amely természetesen az egyetlen NEP.

Ennek belátásához először megállapítjuk, hogy ha az első játékos az $x = 1$ stratégiát választja (az 1 számot választja), akkor a második játékos minden $y \neq K$ választása esetén határozottan jobban jár, mint ha az $x = K$ számot választotta volna. Egyszerű számolással láthatjuk, hogy az $x = K$ választás esetén mindig veszít, bármit is választ a második, kivéve, ha $y = K$, amikor is döntetlen az eredmény, de ekkor az $x = 1$ választással nyerhetett volna. Ez azt jelenti, hogy az $x = 1$ stratégia szigorúan dominálja az $x = K$ stratégiát és így ez elhagyható. A szimmetria miatt a második játékos $y = K$ stratégiája is szigorúan dominált és ugyancsak elhagyható. Az egész okoskodást megismételhetjük a redukált játékra, ahol most már a legnagyobb választható szám a $K-1$. Végül eljutunk az $x=1$ és $y=1$ stratégiapároshoz, amely az 5.5. tétel értelmében az egyetlen racionalizálható stratégiapár.

Az világos, hogy ha egy cselekvés valamely NEP-ben pozitív valószínűséggel szerepel, akkor az racionalizálható, és a NEP-et alkotó kevert stratégiák támaszai támogatják. Ez a NEP-ek egy jellemzését is adja.

5.7. tétel. *Az* $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ *kevert stratégiaprofil akkor és csak akkor* NEP *a* G *véges játék kevert bővítésében, ha tetszőleges* i *játékos csak azoknak a cselekvéseinek ad pozitív valószínűséget, amelyek legjobb válaszok az* i *játékos* $\mathbf{x}_{-i}$ *vélekedésére.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{x}$ kevert stratégiaprofil tetszőlegesen rögzített. Jelölje $V_i(a_i^k \mid \mathbf{x})$ az i játékos várható kifizetését, ha ő a k cselekvést használja, míg a többiek az $\mathbf{x}$ kevert stratégiák szerint randomizálnak.

Szükségesség: Tegyük fel, hogy $\mathbf{x}$ egy NEP. A tétel azt állítja, hogy

$$(V_i(a_i^l \mid \mathbf{x}) > V_i(a_i^k \mid \mathbf{x})) \Longrightarrow x_i^k = 0. \tag{5.1}$$

Mivel $\mathbf{x}$ egy NEP, ezért az i játékos minden $\mathbf{y}_i$ kevert stratégiájára

$$\sum_k x_i^k V_i(a_i^k \mid \mathbf{x}) \geq \sum_k y_i^k V_i(a_i^k \mid \mathbf{x}),$$

vagyis

$$\sum_k x_i^k V_i(a_i^k \mid \mathbf{x}) \geq V_i(a_i^k \mid \mathbf{x})$$

minden k-ra; másképpen

$$\sum_k x_i^k V_i(a_i^k \mid \mathbf{x}) \geq \max_k V_i(a_i^k \mid \mathbf{x}),$$

ami csak úgy lehet, ha (5.1) fennáll.

Elégségesség: Tegyük most fel, hogy (5.1) fennáll. Legyen $\mathbf{y}_i$ az i játékos tetszőleges kevert stratégiája, és l egy olyan index, hogy

$$V_i(a_i^l \mid \mathbf{x}) = \max_k V_i(a_i^k \mid \mathbf{x}).$$

Ekkor (5.1) miatt

$$\sum_k x_i^k [V_i(a_i^k \mid \mathbf{x}) - V_i(a_i^l \mid \mathbf{x})] = 0,$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$\sum_k x_i^k V_i(a_i^k \mid \mathbf{x}) = V_i(a_i^l \mid \mathbf{x}) \geq \sum_k y_i^k V_i(a_i^k \mid \mathbf{x}),$$

vagyis $\mathbf{x}$ NEP. □

5.2. Korrelált egyensúly

A Nash-egyensúly egy másik, fontos általánosításához vezet, és mint látni fogjuk a racionalizálhatósággal is összefüggésbe hozható, ha a kevert stratégia fogalmát tágabban értelmezzük.

Legyen $G = \{N, (A_i)_{i\in N}, (f_i)_{i\in N}\}$ egy véges játék. Amikor G kevert bővítéséről beszélünk, akkor legalábbis a leggyakoribb interpretációban, feltesszük azt, hogy a játékosok egymástól függetlenül, kevert stratégiájuk által meghatározottan, véletlenszerűen választanak tiszta stratégiát. Ezek az eloszlások egy valószínűségeloszlást generálnak az S stratégiaprofilok véges halmazán. Ha félretesszük azt a feltételezést, hogy az egyéni randomizálások egymástól függetlenek, akkor bővülnek a lehetőségek: tetszőleges valószínűségeloszlást használhatunk S-en egy stratégiaprofil véletlenszerű kiválasztására. Ez tulajdonképpen a stratégiaválasztások összehangolása (korrelálása), amit úgy kell megvalósítani, hogy ne kelljen valamilyen szerződésben a játékosokat erre kötelezni, és így a nem-kooperatív játékok körében maradjunk.

Az egyszerűség kedvéért kétszemélyes (bimátrix-) játékokat tekintünk, a több személyre való kiterjesztés csak jelölésbeli kellemetlenségeket okozna, a lényeg ugyanaz. Jelöljük az első (sor-) játékos cselekvéseinek halmazát I-vel, a második (oszlop-) játékosét J-vel, az első játékos kifizetéseit a_{ij}, a másodikét b_{ij}-vel, $i \in I$, $j \in J$. Jelölje $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ és $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ a két játékos kifizetőmátrixát. Legyen p_{ij} az (i, j) akcióprofil választásának valószínűsége. A p_{ij} valószínűségeket rendezzük el egy $\mathbf{P}$ mátrixban, amely nyilván nem negatív és az elemeinek összege 1. Ezt a valószínűségeloszlást és azt reprezentáló $\mathbf{P}$ mátrixot *korrelált stratégiá*nak nevezzük.

A véletlen választást valamilyen mechanizmus végzi el, amelyet egy játékvezető működtet. Amint a választás megtörtént, a játékvezető az első játékosnak titokban, úgy, hogy a második ezt ne tudja, javasolja, hogy az i akciót játssza. Ugyanígy javasolja a második játékosnak, hogy a j akciót játssza. A korrelált stratégiát *korrelált egyensúly*nak hívjuk, ha várható értékben egyik játékosnak sem érdeke a játékvezető javaslatát elutasítani és valami mást játszani, mint az éppen javasolt akció, feltéve, hogy a másik játékos megfogadja a játékvezető javaslatát.

A fentiek alapján a korrelált egyensúlyok halmaza egyenlő az alábbi lineáris egyenlőtlenség rendszer összes megoldásainak halmazával:

$$
\begin{array}{lcll}
p_{ij} & \geq & 0, & i \in I,\ j \in J \\
\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} p_{ij} & = & 1 & \\
\sum_{j\in J}(a_{ij} - a_{kj})p_{ij} & \geq & 0 & i, k \in I \\
\sum_{i\in I}(b_{ij} - b_{il})p_{ij} & \geq & 0 & j, l \in J
\end{array}
\tag{5.2}
$$

A fenti egyenlőtlenségrendszert használhatjuk a korrelált egyensúly definíciójaként is.

5.8. definíció. A $\mathbf{P} = [p_{ij}]$ valószínűségeloszlást a $G = (\mathbf{A}, \mathbf{B})$ bimátrix-játék korrelált egyensúlyának nevezzük, ha kielégíti az (5.2) egyenlőtlenségrendszert.

A lineáris egyenlőtlenségrendszerek elméletéből ismert, hogy a megoldásai konvex halmazt alkotnak. Így a korrelált egyensúlyok konvex lineáris kombinációi is korrelált egyensúlyok. Ez a tulajdonság nyilván nem igaz a NEP-ekre.

Vezessük be a következő jelölést minden $i \in I$, $j \in J$-re:

$$
\begin{array}{lcl}
q_i & = & \sum_{j\in J} p_{ij}, \\
r_j & = & \sum_{i\in I} p_{ij}.
\end{array}
$$

Feltéve, hogy $q_i, r_j > 0$, az (5.2) egyenlőtlenségeit végigoszthatjuk velük és az alábbit kapjuk:

$$
\begin{array}{lcll}
\sum_{j\in J}(a_{ij} - a_{kj})\dfrac{p_{ij}}{q_i} & \geq & 0 & i, k \in I \\
\sum_{i\in I}(b_{ij} - b_{il})\dfrac{p_{ij}}{r_j} & \geq & 0 & j, l \in J
\end{array}
\tag{5.3}
$$

A $\dfrac{p_{ij}}{q_i}$ annak a valószínűsége, hogy a második játékos a j stratégiáját játssza, feltéve, hogy az első az i-t, és így tekinthető az első játékos vélekedésének a második játékos stratégiaválasztásáról. Az (5.2) egyenlőtlenségek azt fejezik ki tehát, hogy mindkét játékos stratégiaválasztása maximalizálja a saját várható kifizetését adott vélekedések mellett, ami maga a bayesi-racionalitás.

A korrelált egyensúly valóban általánosítása a Nash-egyensúlynak.

5.9. segédtétel. *Ha* $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *a* $G = (\mathbf{A}, \mathbf{B})$ *bimátrix-játék* NEP*-je, akkor a* $p_{ij} = x_i y_j$, $i \in I$, $j \in J$ *kevert stratégiaprofil korrelált egyensúly. Ha viszont* p_{ij} *egy olyan korrelált egyensúly, amelyre fennáll, hogy* $p_{ij} = u_i v_j$, $i \in I$, $j \in J$ *valamely* $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ *valószínűségi vektorokra (vagyis a* p_{ij} *valószínűségekből összeállított* $\mathbf{P}$ *mátrix rangja* 1*), akkor az* $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ *stratégiaprofil* NEP*.*

Bizonyítás. A bizonyítást lásd az 5.2. feladatban. □

A fenti segédtétel és a korrelált egyensúly definíciójának egyszerű következménye, hogy a NEP-ek konvex burka része a korrelált egyensúlyok halmazának.

5.10. példa (Gyáva nyúl II.)**.** Tekintsük a *Gyáva nyúl* játékot (lásd a 2.17. példát), amelyben a kifizetőfüggvények a következők (N: merész (nem tér ki), K: óvatos (kitér)). A kifizetéseket a következő táblázat tartalmazza:

		2. játékos	
		K	N
1. játékos	K	(6,6)	(2,7)
	N	(7,2)	(0,0)

Ekkor a korrelált egyensúlyok halmazát leíró egyenlőtlenség rendszer a következő:

$$\begin{array}{lcl} p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22} & \geq & 0 \\ p_{11} + p_{12} + p_{21} + p_{22} & = & 1 \\ (6-7)p_{11} + (2-0)p_{12} & \geq & 0 \\ (7-6)p_{21} + (0-2)p_{22} & \geq & 0 \\ (6-7)p_{11} + (2-0)p_{21} & \geq & 0 \\ (7-6)p_{12} + (0-2)p_{22} & \geq & 0 \end{array} \tag{5.4}$$

A három NEP által meghatározott korrelált egyensúlyok:

1. $p_{11} = 0$, $p_{12} = 1$, $p_{21} = 0$, $p_{22} = 0$;
2. $p_{11} = 0$, $p_{12} = 0$, $p_{21} = 1$, $p_{22} = 0$;
3. $p_{11} = \frac{4}{9}$, $p_{12} = \frac{2}{9}$, $p_{21} = \frac{2}{9}$, $p_{22} = \frac{1}{9}$.

Szemléletes, ha a három NEP által meghatározott korrelált egyensúly $\mathbf{P}$ mátrixát is felírjuk:

1. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
3. $\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Természetesen ezek összes konvex kombinációja is korrelált egyensúly, de van olyan korrelált egyensúly is, amely nem állítható elő a három NEP által meghatározott korrelált egyensúly konvex lineáris kombinációjával. Könnyű látni, hogy például a

4. $p_{11} = \frac{1}{2}, p_{12} = \frac{1}{4}, p_{21} = \frac{1}{4}, p_{22} = 0;$

mátrix formában:

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

korrelált egyensúly (kielégíti az (5.4) egyenlőtlenség rendszert) ilyen (lásd az 5.9 feladatot).

A korrelált egyensúlyt nemcsak bimátrix-játékokra, hanem akárhány személyes véges játékokra is lehet definiálni. A korrelált egyensúly itt is egy eloszlás a játék lehetséges kimenetelein. Az interpretáció teljesen ugyanaz, mint a bimátrix-játékok esetén: a játékvezető kisorsol egy tiszta stratégiaprofilt, majd minden játékosnak javasolja a kisorsolt tiszta stratégiát, úgy, hogy arról a többiek nem szerezhetnek tudomást. Ekkor egyetlen játékos sem tudja javítani a várható kifizetését azzal, hogy eltér a játékvezető által javasolt stratégiától. A bayesi interpretáció is ugyanaz, mint a kétszemélyes esetben.

A bayesi interpretációt használjuk a korrelált egyensúly definíciójában a véges játékok esetében.

5.11. definíció. Legyen $G = \{N, (A_i)_{i\in N}, (f_i)_{i\in N}\}$ egy véges játék, és legyen p egy valószínűségeloszlás $A = \times_{i\in N} A_i$-n. Jelöljük $p(\mathbf{a}_{-i} \mid a_i)$-vel az A_{-i}-n értelmezett olyan valószínűségeloszlást, hogy $p(\mathbf{a}_{-i} \mid a_i) = \dfrac{p(\mathbf{a}_{-i}, a_i)}{\sum_{\mathbf{b}_{-i}\in A_{-i}} p(\mathbf{b}_{-i}, a_i)}$.

A p valószínűségeloszlás korrelált egyensúly G-ben, ha

$$E_{p(\mathbf{a}_{-i}|a_i)} f_i(\cdot, a_i) \geq E_{p(\mathbf{a}_{-i}|a_i)} f_i(\cdot, b_i)$$

minden $a_i, b_i \in A_i$-re, és minden $i \in N$-re, ahol $E_{p(\mathbf{a}_{-i}|a_i)} f_i(\cdot, a_i)$ az f_i várható értéke rögzített a_i mellett a $p(\mathbf{a}_{-i} \mid a_i)$ valószínűségeloszlás szerint.

A következő tétel érdekes kapcsolatot létesít a korrelált egyensúly és a racionalizálhatóság között.

5.12. tétel. *Legyen* $\mathbf{P}$ *egy* $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ *bimátrix játék korrelált egyensúlya. Jelölje* Z_1 *azoknak a soroknak az indexhalmazát, amelyekre* $\mathbf{P}$ *sorösszege pozitív,* Z_2 *pedig azoknak az oszlopoknak az indexhalmazát, amelyre* $\mathbf{P}$ *oszlopösszege pozitív. Ekkor minden* $i \in Z_1$ *esetén az* a_i *akció (az első játékos az i-ik sort játssza)* Z_1, Z_2 *támogatásával racionalizálható.*

Bizonyítás. Ha $i \in Z_1$, akkor a $q_i = \sum_j p_{ij}$ sorösszeg pozitív, és $\frac{p_{ij}}{q_i}$ egy olyan vélekedés, amelynek tartója Z_2-ben van, hiszen $\frac{p_{ij}}{q_i} > 0$ pontosan akkor, ha $p_{ij} > 0$. Ekkor a j oszlopösszeg $q_j = \sum_i p_{ij}$ sem lehet 0, azaz $j \in Z_2$. Ehhez a vélekedéshez a_i legjobb válasz, hiszen $\mathbf{P}$ korrelált egyensúly, tehát minden k-ra

$$\sum_j a_{ij} \frac{p_{ij}}{q_i} \geq \sum_j a_{kj} \frac{p_{ij}}{q_i}.$$

Hasonlóan látható be, hogy tetszőleges $j \in Z_2$ esetén a $\frac{p_{ij}}{q_j}$ vélekedéshez a b_j akció (a második játékos a j-ik oszlopot játssza) a legjobbválasz a második játékos részéről. □

A korrelált egyensúlyok halmaza sokkal egyszerűbb szerkezetű, mint a NEP-eké: egy konvex poliéder. Nincs is szükség semmilyen fixponttételre a korrelált egyensúly létezésének bizonyítására, a lineáris programozás dualitás tétele (vagy ezzel ekvivalens tétel) elegendő annak bizonyításához, hogy a korrelált egyensúlyt definiáló egyenlőtlenség rendszernek van megoldása.

Általában sok korrelált egyensúlypont létezik. Ezek közül lehet úgy választani (pl. a játékvezető választhat), hogy valamilyen célt reprezentáló függvényt maximalizálunk a korrelált egyensúlyok halmazán, és azt majd a játékvezető implementálni tudja egy megfelelő sorsoló eszköz segítségével. Ha a játékosok hasznosságai összeadhatók, akkor egy ilyen cél lehet a hasznosságok összegének a maximalizálása. Az így kapott korrelált egyensúly egyszerre valósít meg „kollektív" hasznosságot és stabilitást, abban az értelemben, hogy a kollektív „optimum" önmegvalósító (self enforcing), ha a játékosok hajlandók a játék szabályait elfogadni (azt tehát, hogy a mindenki által ismert eloszlás szerint sorsol a játékvezető, és a leírt titoktartási szabályokat betartják).

Az 5.10. példában megadott (5.5) korrelált egyensúly maximalizálja a hasznosságok összegét, és erről meggyőződhetünk, ha a

$$12p_{11} + 9p_{12} + 9p_{21}$$

célfüggvényű és az (5.4) feltételrendszerű lineáris programozási feladatot megoldjuk.

5.3. Tökéletes egyensúly

Nézzük a következő igazán egyszerű bimátrix-játékot (mint rendesen, most is a számpár első eleme az 1. játékos kifizetését jelenti, aki a sorjátékos, a második eleme pedig a 2. játékos, az oszlopjátékos kifizetése):

		2. játékos	
		L	R
1. játékos	T	(1,1)	(0,0)
	B	(0,0)	(0,0)

(5.6)

Ennek a játéknak a tiszta stratégiák halmazán két NEP-je van: (T, L) és (B, R). Azonban a két NEP nem azonos „minőségű”. Nehéz olyan játékost elképzelni, aki nem a T vagy az L cselekvést választaná, hiszen rosszabbul semmiképpen nem jár, ha nem B-t vagy R-et játssza a (B, R) NEP-ben, de jobban igen, ha a másik játékos, akár véletlenül is („megremeg a keze”) eltér az egyensúlyi stratégiáról. Ez az intuícióval ellentétes NEP adta az ötletet *Selten*nek, hogy megalkossa a tökéletes (perfect) egyensúly fogalmát ([Selten (1965)]).

Legyen $G = \{N, (A_i)_{i\in N}, (f_i)_{i\in N}\}$ véges játék. Egy $\mathbf{x}$ stratégiaprofil *teljesen kevert*, ha $\mathbf{x} > \mathbf{0}$.

5.13. definíció. Vegyünk egy $G = \{N, (A_i)_{i\in N}, (f_i)_{i\in N}\}$ véges játékot, és egy $\mathbf{x}$ teljesen kevert stratégiaprofilt. Rögzítsünk egy tetszőleges kis $\varepsilon > 0$ számot. Az $\mathbf{x}$ teljesen kevert stratégiát *ε-tökéletes egyensúlypont*nak nevezzük, ha

$$(V_i(a_i^k \mid \mathbf{x}) < V_i(a_i^l \mid \mathbf{x})) \Longrightarrow x_i^k \leq \varepsilon \qquad (5.7)$$

fennáll minden l-re, k-ra, i-re.

Egy ε-tökéletes egyensúlypontban minden akciót pozitív valószínűséggel használnak, de csak a legjobb válaszok kaphatnak ε-nál nagyobb valószínűségeket. A tökéletes egyensúlyt ε-tökéletes egyensúlypontok határértékeként definiáljuk.

5.14. definíció. Az $\mathbf{x}$ stratégiaprofilt a G véges játék kevert bővítése *tökéletes egyensúlypontjának* (TEP) nevezzük, ha vannak olyan $\{\varepsilon_k\}$ és $\{\mathbf{x}_k\}$ sorozatok, hogy

1. minden k-ra $\varepsilon_k > 0$ és $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$,
2. minden k-ra $\mathbf{x}_k$ ε_k-tökéletes egyensúlypont,

3. $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$.

5.15. tétel. *Minden TEP NEP.*

Bizonyítás. Mivel a $V_i(a_i^k \mid \mathbf{x})$ függvények $\mathbf{x}$-ben folytonosak, és minden $\mathbf{x}$ tökéletes egyensúlypontra fennáll, hogy

$$(V_i(a_i^k \mid \mathbf{x}) < V_i(a_i^l \mid \mathbf{x})) \Longrightarrow x_i^k \leq 0 \Longrightarrow x_i^k = 0,$$

ami az 5.7. tétel értelmében azt jelenti, hogy $\mathbf{x}$ NEP. □

Nem minden NEP tökéletes egyensúlypont. Az (5.6). játékban ε-tökéletes egyensúlypont csak az lehet, amelyben a játékosok a (B, R) akciópárost ε-nál nem nagyobb valószínűséggel alkalmazzák, és így a (T, L) akciópáros lesz az egyetlen TEP. Ezzel csak azt láttuk be, hogy a TEP valódi szűkítése a NEP-nek, de felmerül az az aggály, hogy lehetnek olyan játékok is, amelyeknek nincs egyáltalán TEP-jük. Azonban ez nem fordulhat elő.

5.16. tétel. *Minden véges játék kevert bővítésének van legalább egy TEP-je.*

Bizonyítás. Legyen $G = \{N, (A_i)_{i\in N}, (f_i)_{i\in N}\}$ egy véges játék, $S_1, \ldots, S_n$ pedig a játékosok stratégiahalmazai a G kevert bővítésében. Mivel ezek kompakt halmazok (véges dimenziós egységszimplexek) és a TEP-et ε-TEP-ek határértékeként definiáltuk, ezért elég annyit bizonyítani, hogy van olyan ε_0 pozitív szám, hogy minden $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$-ra létezik ε-TEP.

Legyen a játékosok lehetséges cselekvéseinek száma rendre $m_1, \ldots, m_n$. Feltehetjük, hogy $m_i \geq 2$ minden $i = 1, \ldots, n$-re. Legyen továbbá $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$. Definiáljuk a T_i halmazokat a következőképpen:

$$T_i = \{\mathbf{x}_i \in S_i \mid \mathbf{x}_i \geq \frac{\varepsilon}{m_i - 1}\mathbf{1}\}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

A fenti halmazok nem üresek, kompaktak és csak teljesen kevert stratégiákat tartalmaznak. Definiáljunk minden i-re egy $F_i : \times_{k=1}^n T_k \to T_i$ pont-halmaz leképezést a következő képpen:

$$F_i(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y}_i \in T_i \mid (V_i(a_i^k \mid \mathbf{x}) < V_i(a_i^l \mid \mathbf{x})) \Longrightarrow y_i^k \leq \varepsilon;\ k, l \leq m_i\}.$$

Bármely $\mathbf{x}$ stratégiaprofil esetében $F_i(\mathbf{x})$ egy konvex poliéder (véges számú egyenlőtlenség definiálja).

Most azt mutatjuk meg, hogy $F_i(\mathbf{x})$ nem üres. Legyen $z_i^{k'} = 1 - \varepsilon$ egy olyan k' indexre, amelyre $V_i(a_i^k \mid \mathbf{x})$ maximális az A_i akcióhalmazon (a_i^k az i játékos egy legjobbválasza az $\mathbf{x}_{-i}$ csonka stratégiaprofilra) és $z_i^k = \frac{\varepsilon}{m_i - 1}$

minden $k \neq k'$-re. Ekkor $\mathbf{z}_i$ egy teljesen kevert stratégia és $z_i \in T_i$. Ehhez csak azt kell látni, hogy $z_i^{k'} = 1 - \varepsilon \geq \frac{\varepsilon}{m_i - 1}$, ami az $\varepsilon < \frac{m_i - 1}{m_i} \leq \frac{1}{2}$ feltétel miatt fennáll. Tehát $\mathbf{z}_i \in T_i$ minden $i = 1, \ldots, n$ -re.

Végül a $V_i(a_i^k \mid \cdot)$ folytonossága miatt az F_i halmazértékű leképezés felülről félig folytonos (lásd az 5.4. feladatot).

Legyen most $F(\mathbf{x}) = \times_{i=1}^n F_i(\mathbf{x})$ minden $\mathbf{x} \in T = \times_{i=1}^n T_i$-re. Az F a T halmazt a 2^T-re képezi és kielégíti a Kakutani-fixponttétel minden feltételét, tehát van fixpontja, vagyis van olyan $\mathbf{x}(\varepsilon)$, hogy $\mathbf{x}(\varepsilon) \in F(\mathbf{x}(\varepsilon))$. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{x}(\varepsilon)$ egy ε-TEP. $\square$

5.17. példa (Áruházlánc játék IV.)**.** Tekintsük a 3.1. példában tárgyalt Áruházlánc játékot. Ennek a normál formája a következő:

		B	
		l	m
N	h	(0,0)	(5,1)
	b	(9/4,9/4)	(5,1)

Határozzuk meg ennek a játéknak a TEP-jeit!

A **N**agyáruház x valószínűséggel **h**arcol, $1-x$-el **b**elenyugszik az új helyzetbe. A **B**elépő y valószínűséggel **l**ép be a piacra és $1-y$ valószínűséggel **m**arad a piacon kívül. Legyen $(x(\varepsilon_k), y(\varepsilon_k))$ egy ε_k-tökéletes egyensúlypont. Ekkor

$$V_N(h \mid (x(\varepsilon_k), y(\varepsilon_k))) > V_N(b \mid (x(\varepsilon_k), y(\varepsilon_k))),$$

vagyis

$$5(1 - y(\varepsilon_k)) > \frac{9}{4} y(\varepsilon_k) + 5(1 - y(\varepsilon_k))$$

soha nem állhat fenn. Ennek az egyenlőtlenségnek a fordítottja viszont mindig fennáll és így az ε_k-TEP definíciója miatt $x(\varepsilon_k) \leq \varepsilon_k$. Másrészről teljesül a

$$V_B(l \mid (x(\varepsilon_k), y(\varepsilon_k))) > V_B(m \mid (x(\varepsilon_k), y(\varepsilon_k))) \tag{5.8}$$

egyenlőtlenség, vagyis

$$\frac{9}{4}(1 - x(\varepsilon_k)) > 1,$$

átalakítva

$$x(\varepsilon_k) < \frac{5}{9},$$

ami $x(\varepsilon_k) \leq \varepsilon_k$ miatt mindig fennáll, ha ε_k elég kicsi. Az ε_k- TEP definíciója miatt ebből $1 - y(\varepsilon_k) \leq \varepsilon_k$, vagyis $y(\varepsilon_k) \geq 1 - \varepsilon_k$ következik. Az (5.8) egyenlőtlenség fordítottja kellően kicsi ε_k mellett soha sem áll fenn. Ha $\varepsilon_k \to 0$, akkor minden ε_k-TEP a (b, l) TEP-hez tart.

Vessük össze ezt az eredményt a 3.11. példában nyert eredménnyel: a fentiekben kapott TEP a játék extenzív formában felírt alakjának részjáték tökéletes egyensúlypontjával egyezik meg, ami legalábbis ebben a játékban azt mutatja, hogy a két egyensúlyfogalom szűkítés ugyanarra az eredményre vezetett. Ez nem véletlen, mert a két „tökéletes egyensúly" között általában is szoros összefüggés van (lásd [Selten (1975)]).

A TEP fogalmának bevezetésével azonban nem feltétlenül küszöbölünk ki minden intuícióval ellentétes NEP-et. Tekintsük a következő példát.

5.18. példa. Bővítsük ki az (5.6) mátrixot egy-egy sorral és oszloppal, amelyeket minden más stratégia szigorúan dominál:

		2. játékos		
		L	C	R
	T	(1,1)	(0,0)	(-9,-9)
1. játékos	M	(0,0)	(0,0)	(-7,-7)
	B	(-9,-9)	(-7,-7)	(-7,-7)

Lássuk be, hogy az (M, C) akciópár TEP!

Legyen ε elég kicsi pozitív szám és tekintsük a

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\varepsilon) &= (\varepsilon, 1 - 2\varepsilon, \varepsilon), \\ \mathbf{y}(\varepsilon) &= (\varepsilon, 1 - 2\varepsilon, \varepsilon) \end{aligned}$$

teljesen kevert stratégiapárosokat. A sorjátékos tiszta stratégiáinak várható kifizetése ekkor:

$$\begin{aligned} T: &\quad -8\varepsilon \\ M: &\quad -7\varepsilon \\ B: &\quad -2\varepsilon - 7 \end{aligned}$$

Elég kis ε-ra mindig M a legjobb válasz, így $x_1(\varepsilon) \leq \varepsilon$, $x_3(\varepsilon) \leq \varepsilon$, ami tényleg fennáll. A szimmetria miatt $y_1(\varepsilon) \leq \varepsilon$, $y_3(\varepsilon) \leq \varepsilon$ is fennáll, és így az $(\mathbf{x}(\varepsilon), \mathbf{y}(\varepsilon))$ stratégiapáros egy ε- TEP. Ha $\varepsilon \to 0$, akkor határértékként az (M, C) akciópárost kapjuk, ami a definíció szerint egy TEP.

Természetesen a (T, L) is egy TEP, de ezt egy másik ε-TEP sorozat határértékeként állíthatjuk elő (lásd az 5.5. feladatot).

Az intuíciónk azt sugallja, hogy az egyetlen „elfogadható" NEP a (T, L) akciópáros, ami természetesen egy TEP, de amint láttuk, nem az egyetlen.

Miért lett egy korábban kiszűrt, nem tökéletes egyensúly elfogadható (tökéletes) azáltal, hogy szigorúan dominált, „rossz” cselekvésekkel bővült mindkét játékos akcióhalmaza?

A Nash-egyensúlyt tovább lehet finomítani, bevezetve a *megfelelő egyensúly* (proper equilibrium) fogalmát (lásd [Forgó et al. (1999)]), amely már kiszűri az (M, C) akciópárost. Lehet azonban olyan példákat találni, ahol még így is maradnak intuitíven nehezen elfogadható NEP-ek. Nem ismeretes olyan általános eljárás, amely kiküszöbölne minden esetben minden intuíció ellenes NEP-et.

5.4. Evolúciósan stabil egyensúly†

A NEP egy fontos finomítása egy speciális egyensúlyfogalom, amelyet *evolúciósan stabil egyensúly*nak neveznek, mert eredetét egy biológiai alkalmazásnak köszönheti. Induljunk ki egy egyszerű modellből, amelyben élőlényeknek egy nagy populációjára koncentrálunk. Ezek az élőlények időnként páronként kapcsolatba lépnek egymással. Minden ilyen találkozáskor egymástól függetlenül „választanak” egy cselekvést az A akcióhalmazból. Ha A különböző viselkedésformákból áll, akkor az élőlények nem tudatosan választanak ezekből, hanem vagy öröklik őseiktől, vagy valamilyen mutáció révén kifejlődik bennük. Feltesszük, hogy van egy f függvény, amely az élőlény túlélési potenciálját méri, vagyis $f(a, b)$ a túlélési potenciál akkor, ha ő egy $a \in A$ cselekvést választ és egy olyan partnerrel találkozik a populációból, amely a $b \in A$ cselekvést választotta. Ha a populációban a potenciális ellenfelek egy p eloszlás szerint választanak cselekvést A-ból, akkor egy élőlény várható túlélési potenciálja $f(a, b)$ várható értéke a p eloszlás szerint. Most tulajdonképpen egy $G = \{A, A; f_1, f_2\}$ kétszemélyes szimmetrikus játékot definiáltunk, ahol $f_1(a, b) = f(a, b)$ és $f_2(a, b) = f(b, a)$, amelynek a kevert bővítése a vizsgálat tárgya. Röviden egy ilyen játékot a $G = \{A; f\}$ formában is meg lehet adni.

Az *Evolúciósan stabil egyensúlypont*ra ($ESEP$) az A cselekvéshalmaz egy a eleme a jelölt, amelynek ki kell elégítenie egy bizonyos követelményt, amelyet informálisan úgy lehet megfogalmazni, hogy a egy olyan cselekvés, amelyet ha az összes élőlény alkalmaz, akkor nincs esélye annak, hogy *mutánsok*[1] alakuljanak ki. Az evolúciós folyamat időnként minden $a \in A$ cselekvés esetében a populáció egy kis részét mutánsokká alakítja, amelyek a-tól eltérő cselekvést választanak. Az evolúciós folyamat egyensúlyban van, ha a mutánsok várható túlélési potenciálja kisebb, mint az $ESEP$ által meghatározott cselekvés esetében.

[1]Mutáns egy olyan egyed, amely tartósan egy másik cselekvést választ.

Tegyük fel, hogy a populáció $\varepsilon > 0$ része mutáns, amelyek egy a cselekvést választanak, míg a többiek az a^* cselekvést alkalmazzák. Ekkor egy mutáns $1-\varepsilon$ valószínűséggel találkozik egy nem mutánssal és ε valószínűséggel egy másik mutánssal. Igy egy mutáns várható kifizetése $(1-\varepsilon)f(a,a^*)+\varepsilon f(a,a)$, míg a nem mutánsok várható kifizetése $(1-\varepsilon)f(a^*,a^*)+\varepsilon f(a^*,a)$. Ahhoz, hogy a^* egy $ESEP$ legyen az alábbi egyenlőtlenség fennállását követeljük meg:

$$(1-\varepsilon)f(a,a^*)+\varepsilon f(a,a) < (1-\varepsilon)f(a^*,a^*)+\varepsilon f(a^*,a)$$

minden elég kis ε-ra. Ez az egyenlőtlenség akkor és csak akkor áll fenn, ha minden $a \neq a^*$esetében vagy $f(a,a^*) < f(a^*,a^*)$, vagy ha $f(a,a^*) = f(a^*,a^*)$, akkor $f(a,a) < f(a^*,a)$. Ennek alapján az $ESEP$ definíciója a következő:

5.19. definíció. Legyen $G = \{A; f\}$ egy evolúciós játék. Az $a^* \in A$ cselekvést (stratégiát) a G játék evolúciósan stabil egyensúlypontjának nevezzük, ha

1. (a^*,a^*) a G egy NEP-je (egyensúlyi feltétel),
2. $f(a,a) < f(a^*,a)$ fennáll az a^*-ra adott minden $a \neq a^*$ legjobb válaszra (stabilitási feltétel).

A definíció azonnali következménye, hogy ha egy (a^*,a^*) cselekvéspár szigorú NEP (a^*-ra a^* az egyetlen legjobb válasz), akkor a^* egyúttal $ESEP$ is. Ha több legjobb válasz is van, akkor a definíció alapján el kell dönteni, hogy vajon egy adott NEP egyúttal $ESEP$ is, vagy nem. Legtöbbször az A akcióhalmaz véges számú „tiszta” akció összes valószínűségi keverése. Ez a helyzet a következő példában is.

5.20. példa (Héja és Galamb)**.** Állatok egy populációjában időnként két állat harcol egy 1 egységet érő zsákmányért. Mindkettő viselkedhet harcosan (H) vagy szelíden (G). Ha mindkettő szelíd, akkor egyenlően osztoznak a zsákmányon. Ha mindkettő harcol, akkor a zsákmány értéke c-vel csökken és a maradékon egyenlően osztoznak. Ha az egyik harcos és a másik szelíd, akkor a harcos mindent elvisz. Az alábbi táblázat mutatja a kifizetéseket:

		2. állat	
		G	H
1. állat	G	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$(0,1)$
	H	$(1,0)$	$(\frac{1}{2}(1-c),\frac{1}{2}(1-c))$

Legyen az A akcióhalmaz a G és H összes valószínűségi keverése. Ha $c > 1$ (mindkét állat „túl keményen harcol", ha harcol egyáltalán), akkor, ahogy az könnyen megmutatható, $(1-1/c, 1/c)$ az egyetlen szimmetrikus NEP. Most belátjuk, hogy ez a cselekvéspáros egyúttal $ESEP$ is.

Ha mindkét játékos x valószínűséggel választja a G cselekvést és $(1-x)$ valószínűséggel a H-t, akkor a kifizetés (bármelyik játékosé)

$$\frac{1}{2}x^2 + x(1-x) + \frac{1}{2}(1-c)(1-x)^2$$

míg, ha az első játékos az $(1-1/c, 1/c)$ valószínűségekkel keveri a G és H cselekvéseket, akkor a várható kifizetése, ha a második játékos $(x, 1-x)$ valószínűségekkel keveri ezeket a cselekvéseket,

$$\frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{c}\Big)x + \frac{1}{c}x + \frac{1}{2c}(1-c)(1-x).$$

A Nash-egyensúlyi stratégiára bármely kevert stratégia legjobb válasz, így ahhoz, hogy ez a stratégia $ESEP$ legyen, az kell, hogy minden $(x, 1-x)$ stratégia esetén a következő egyenlőtlenség fennálljon:

$$\frac{1}{2}x^2 + x(1-x) + \frac{1}{2}(1-c)(1-x)^2 - \frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{c}\Big)x + \frac{1}{c}x + \frac{1}{2c}(1-c)(1-x) \le 0$$

úgy, hogy egyenlőség csak az $x = 1 - \dfrac{1}{c}$ helyen legyen. A bal oldal x-nek kvadratikus függvénye, amelynek a maximuma az $x = 1 - \dfrac{1}{c}$ helyen van, és mivel a függvény kvadratikus, minden egyéb helyen szigorú egyenlőtlenség áll fenn és így valóban az $(1-\dfrac{1}{c}, \dfrac{1}{c})$ $ESEP$.

Van azonban olyan NEP, amelyik nem $ESEP$, sőt vannak olyan játékok, amelyeknek nincs is $ESEP$-jük. Triviális példa erre a konstans kifizetőmátrix, de lehet nem triviális példákat is adni. Nézzük a következő példát:

5.21. példa. Tekintsük a következő bimátrix-játékot amelyben mindkét játékosnak három tiszta stratégiája van, a kifizetőmátrixok pedig a következők (a két táblázatot itt is egybe írtuk):

$$\begin{bmatrix} (\alpha,\alpha) & (1,-1) & (-1,1) \\ (-1,1) & (\alpha,\alpha) & (1,-1) \\ (1,-1) & (-1,1) & (\alpha,\alpha) \end{bmatrix}$$

Az $a^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ kevert stratégia mindkét játékos egyetlen egyensúlyi stratégiája, amely a játékosoknak $\frac{\alpha}{3}$ kifizetést ad. Legyen a egy tetszőleges tiszta stratégia. Természetesen $a \neq a^*$, de $f(a,a) = \alpha \not< f(a^*, a) = \frac{\alpha}{3}$, és ezért a^* nem $ESEP$.

5.5. Feladatok

5.1. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(Z_j)_{j\in N}$ és $(Z'_j)_{j\in N}$ halmazrendszerek mindegyike támogatja az a_i racionalizálható cselekvést, akkor $(Z_j \cup Z'_j)_{j\in N}$ szintén támogatja azt.

5.2. feladat. Bizonyítsuk be az 5.9. segédtételt.

5.3. feladat. Általánosítsuk az 5.12. tételt nem bimátrix-játékokra (tetszőleges normál formában adott játékokra).

5.4. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $V_i(a_i^k \mid \cdot)$ folytonos, akkor az F_i halmazértékű leképezés felülről félig folytonos (lásd az 5.16. tétel bizonyítását).

5.5. feladat. Az 5.18. példában szereplő játékban a (T, L) stratégiaprofil TEP. Szerkesszünk olyan ε-TEP sorozatot, amelynek határértéke (T, L).

5.6. feladat. Mutassuk meg, hogy a korrelált egyensúlyok halmaza konvex halmaz.

5.7. feladat. Adjunk példát olyan játékra, amikor két NEP konvex lineáris kombinációja nem NEP.

5.8. feladat. † Adjunk példát olyan játékra, amelyben legalább egy játékosnak van legalább egy olyan racionalizálható cselekvése, amely egyetlen korrelált egyensúlyban sem szerepel pozitív valószínűséggel (annak a valószínűsége, hogy a játékvezető javasolja ezt az akciót 0).

5.9. feladat. Oldjuk meg az (5.4) egyenlőtlenség rendszer és a

$$12p_{11} + 9p_{12} + 9p_{21}$$

célfügvényből álló maximum feladatot.

5.10. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ a $G = (\mathbf{A}, \mathbf{B})$ bimátrix-játék NEP-je, akkor a $p_{ij} = x_i y_j$, $i \in I$, $j \in J$ korrelált stratégia korrelált egyensúly.

5.11. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{P} = [p_{ij}]$ egy olyan korrelált egyensúly, amelyre fennáll, hogy $p_{ij} = u_i v_j$, $i \in I$, $j \in J$ valamely $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ valószínűségi vektorokra (vagyis a p_{ij} valószínűségekből összeállított $\mathbf{P}$ mátrix rangja 1), akkor az $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ stratégiaprofil egy NEP.

5.12. feladat. Mutassuk meg, hogy a 5.10. példában $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ korrelált egyensúly.

5.13. feladat. Mutassuk meg, hogy az (5.6). játékban a (T, L) stratégiapáros TEP.

5.14. feladat. Mutassuk meg, hogy az (5.6). játékban a (T, L) stratégiapáros az egyetlen TEP.

5.15. feladat. Tekintsük a következő $\Gamma = (\mathbf{A}, \mathbf{B})$ bimátrix-játékot (a kevert bővítést), ahol $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Határozzuk meg a játék összes korrelált egyensúlyát.
2. Meghatározható-e ebben az esetben a korrelált egyensúlyok halmazából a Nash-egyensúlypontok halmaza?

5.16. feladat. Tekintsük az alábbi bimátrix-játékot:

		2. játékos		
		X	Y	Z
	A	(2,0)	(1,1)	(4,2)
1. játékos	B	(3,4)	(1,2)	(2,3)
	C	(1,3)	(0,2)	(3,0)

1. Határozzuk meg a racionalizálható tiszta stratégiákat mindkét játékos számára az őket támogató vélekedésekkel együtt (a támogató vélekedések közül minden racionalizálható stratégiához elég egyet meghatározni).
2. Van-e a játéknak olyan racionalizálható stratégiája, amely egyetlen NEP-ben sem szerepel pozitív súllyal?

6. fejezet

Nem teljes információs játékok

Mindeddig abban az idealizált világban mozogtunk, amelyben a játékosok mindegyike teljes egészében ismerte a játékot, mind a stratégia halmazokat (vagy a játékfát extenzív formában adott játék esetén), mind a kifizetőfüggvényeket és mindez köztudott volt. A valóságban azonban a legtöbb esetben a játékosoknak csak részleges információjuk van a játék egyes összetevőiről. Az ilyen játékokat *nem teljes információs játék*oknak nevezzük.

A játékosok többnyire többet tudnak saját lehetőségeikről és céljaikról, mint a többi játékoséról és informáltságuk is általában különböző. Az oligopoljátékban például az egyes vállalatok ismerhetik saját költségfüggvényeiket, de bizonytalanok lehetnek a többiek költségfüggvényeinek egyes paramétereiről. Egy politikai konfliktusban sem tudják rendszerint pontosan a résztvevők, hogy mi a többiek motivációja, egyes helyzeteket hogyan értékelnek, milyen eszközöket akarnak bevetni, stb.

6.1. A Harsányi-modell

A nem teljes információs játékok kezelésére Harsányi János adott először általános módszert. Az ő megközelítése a legelfogadottabb mindmáig és ennek a legegyszerűbb változatát tárgyaljuk. Most is a modell alapgondolatára szeretnénk koncentrálni, és olyan dolgokat is példákon, illetve speciális eseteken szemléltetünk, amelyeket általánosabban is lehetne, de csak azon az áron, hogy a bonyolult jelölésrendszer nehezítené a megértést.

Statikus játékokat vizsgálunk, amelyek a

$$G = \{A_1, \dots, A_n, f_1, \dots, f_n\}$$

normál formában adottak. A stratégiahalmazokat most *cselekvéshalmazoknak* nevezzük és ezt a jelöléssel is kifejezzük. A cselekvéshalmazok Descartes-szorzatát *cselekvéstér*nek, ennek elemeit pedig *cselekvésprofiloknak* hívjuk és A-val, illetve $\mathbf{a}$-val jelöljük. Az i játékos elhagyásával kapott A_{-i} szorzathalmazt *csonka cselekvéstér*nek, az $\mathbf{a}_{-i}$ vektort pedig *csonka cselekvésprofil*nak hívjuk. A stratégia kifejezést másra tartjuk fenn.

Mindazt a bizonytalanságot, információhiányt, ami egy nem teljes információs játékban előfordulhat, azzal fejezzük ki, hogy minden játékos több „típusú" lehet és a lehetséges típusok halmazait $T_1, \ldots, T_n$-nel jelöljük. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy ezek véges halmazok. (Például az oligopoljátékban egy játékos (vállalat) működhet alacsony, átlagos és magas költséggel, és így három típusát tudjuk megkülönböztetni.) Egyik alapvető feltételezésünk, hogy minden játékos ismeri a saját típusát, de a többiekét nem ismeri pontosan, „vélekedései" (beliefs) vannak róla. Nevezzük a típushalmazok Descartes szorzatát T *típustér*nek, amelynek $\mathbf{t}$ elemei a *típusprofil*ok. Jelöljük T_{-i}-vel az i játékos kihagyásával keletkezett típusteret (a T_i kivételével az összes típushalmaz Descartes-szorzata) és ennek egy elemét $\mathbf{t}_{-i}$-vel, amit *csonka típusprofil*nak nevezünk. Az i játékos *vélekedése* a többiek típusáról egy $p_i(\mathbf{t}_{-i} \mid t_i)$ feltételes (általában szubjektív) valószínűségeloszlás, amely annak a valószínűsége, hogy a többi játékosnak $\mathbf{t}_{-i}$ a csonka stratégia profilja, feltéve, hogy az ő saját típusa t_i. Az i játékos $f_i : A \times T \longrightarrow \mathbb{R}$ kifizető függvénye egy cselevés- és típusprofilhoz rendel egy valós számot.

6.1. definíció. Egy G_B nem teljes információs játék *bayesi formájának* nevezzük a cselekvéshalmazok, a típushalmazok, a vélekedések és a kifizetőfüggvények együttesét:

$$G_B = \{A_1, \ldots, A_n; T_1, \ldots, T_n; f_1, \ldots, f_n; p_1, \ldots, p_n\}.$$

Alapvető feltevésünk, amelyet szokás *Harsányi doktriná*nak nevezni, hogy van egy p *a priori* valószínűségeloszlás a T típustéren ($p = p_1 = \ldots = p_n$), amely köztudott, és a vélekedéseket ebből a Bayes-tétel segítségével számolják ki a játékosok a következőképpen:

$$p_i(\mathbf{t}_{-i} \mid t_i) = \frac{p(\mathbf{t}_{-i}, t_i)}{\sum_{\mathbf{s} \in T_{-i}} p(\mathbf{s}, t_i)}. \tag{6.1}$$

Ezentúl a G_B játékot *bayesi játéknak* nevezzük, a normál formában pedig az n vélekedés helyett elegendő megadni a p eloszlást:

$$G_B = \{A_1, \ldots, A_n; T_1, \ldots, T_n; f_1, \ldots, f_n; p\}.$$

Ezek után egy bayesi játék „időbeli" lefolyását a következőképpen írhatjuk le:

1. A (V)életlen választ egy $\mathbf{t}$ típusprofilt a T típustérből a p eloszlás szerint.

2. V közli az i játékossal $(i = 1, \ldots, n)$ a saját t_i típusát.

3. A játékosok egymástól függetlenül választanak egy cselekvést saját cselekvés halmazaikból, amely egy $\mathbf{a}$ cselekvésprofilt ad.

4. A játékosok megkapják az $f_i(\mathbf{a}, \mathbf{t})$ kifizetéseiket, $(i = 1, \ldots, n)$.

Tegyük most fel, hogy az A cselekvéstér is véges. Ekkor az előbb leírt játék egy nem tökéletes információs extenzív játék, pontosan olyan, mint amilyet a 3. fejezetben tárgyaltunk. Az információs halmazokat az a feltételezésünk jelöli ki, amely szerint minden játékos ismeri a saját típusát, de nem ismeri a többiekét. Minden játékosnak annyi információs halmaza van, amennyi típusa.

Ebben a játékban az i játékos s_i stratégiái minden egyes információs halmazban előírnak egy cselekvést, tehát ezek a saját típushalmazon értelmezett függvények, amelyeket *normalizált stratégiá*knak nevezünk. Az $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ stratégia profilhoz tartozó kifizetések pedig a p *a priori* típusprofil eloszlással számolt várható kifizetések:

$$h_i(\mathbf{s}) = \sum_{\mathbf{t} \in T} f_i(s_1(t_1), \ldots, s_n(t_n), \mathbf{t}) p(\mathbf{t}).$$

Ha $S_1, \ldots, S_n$ a játékosok így definiált stratégia halmazai, akkor a

$$G_N = \{S_1, \ldots, S_n, h_1, \ldots, h_n\}$$

formában adott játékot *normál formában adott bayesi játék*nak nevezzük.

Egy normál formában adott bayesi játéknak a Nash-egyensúlypontjait hívjuk *bayesi Nash-egyensúlypont*nak (BNE). A BNE tehát egy olyan $\mathbf{s}^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ stratégiaprofil, amelyre fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek:

$$\sum_{\mathbf{t} \in T} f_i(s_1^*(t_1), \ldots, s_{i-1}^*(t_{i-1}), s_i^*(t_i), s_{i+1}^*(t_{i+1}), \ldots, s_n^*(t_n), \mathbf{t}) p(\mathbf{t}) \geq$$
$$\sum_{\mathbf{t} \in T} f_i(s_1^*(t_1), \ldots, s_{i-1}^*(t_{i-1}), s_i(t_i), s_{i+1}^*(t_{i+1}), \ldots, s_n^*(t_n), \mathbf{t}) p(\mathbf{t}),$$

minden $s_i \in S_i$ és minden $i = 1, \ldots, n$ esetében, aminek elégséges feltétele az, hogy

$$\sum_{\mathbf{t}\in T} f_i(s_1^*(t_1),\dots,s_{i-1}^*(t_{i-1}),s_i^*(t_i),s_{i+1}^*(t_{i+1}),\dots,s_n^*(t_n),\mathbf{t})p(\mathbf{t}) \geq$$
$$\sum_{\mathbf{t}\in T} f_i(s_1^*(t_1),\dots,s_{i-1}^*(t_{i-1}),a_i,s_{i+1}^*(t_{i+1}),\dots,s_n^*(t_n),\mathbf{t})p(\mathbf{t}),$$

fennálljon minden $a_i \in A_i$ cselekvésre és minden $i = 1,\dots,n$-re. Ha behelyettesítjük ebbe az egyenlőtlenségbe a (6.1) összefüggésből $p(\mathbf{t})$-t, akkor azt kapjuk, hogy rögzített t_i-re $a_i^* = s_i^*(t_i)$ maximalizálja a

$$\sum_{\mathbf{t}_{-i}\in T_{-i}} f_i(s_1^*(t_1),\dots,s_{i-1}^*(t_{i-1}),a_i,s_{i+1}^*(t_{i+1}),\dots,s_n^*(t_n),\mathbf{t})p(\mathbf{t}_{-i}\mid t_i) \qquad (6.2)$$

függvényt az A_i halmazon. Ez azt jelenti, hogy az i játékos tudván saját típusát, a saját vélekedésével számított várható kifizetését maximalizálja a saját cselekvéshalmazán (ami a bayesi racionalitás). Ugyanakkor, ennek fontos praktikus következménye is van. Ez teszi lehetővé, hogy a bayesi Nash-egyensúly keresése közben szűkíthetjük a szóba jöhető függvények halmazát, mert a maximalizálást nem az összes függvényre, hanem csak a függvényértékekre kell elvégezni. Ez igazán akkor hasznos, mint a későbbiekben látni is fogjuk, ha végtelen típustérrel dolgozunk, amikor is lehetetlen minden függvényt vizsgálni, mint szóba jöhető cselekvés-saját típus függvényt.

A BNE létezésének bizonyítása során hasonló problémákkal szembesülünk, mint a teljes információs, normál formában adott játékok esetében. Itt is a véges eset a legegyszerűbb, mivel a normál forma egy véges játék, amely kevert bővítésének a 2.16. tétel értelmében van egyensúlypontja. Természetesen itt is preferáljuk a tiszta egyensúlypontokat, amelyek létezését konkrét esetben a feladathoz igazított eszközökkel próbáljuk meg bizonyítani.

Felmerülhet a kérdés, hogy ha az i játékos tudja, hogy mi a saját típusa, miért kell törődnie azzal, hogy mit tenne, ha valamilyen másik típusú lenne. Az világos, hogy azzal kell számolnia, hogy mit cselekszenek a többiek. Ez azonban függ attól, hogy ők mit gondolnak arról, hogy az i játékos milyen típusú és ennek függvényében mit fog cselekedni. Így akkor, amikor kiderül az i játékosról, hogy ő milyen típusú, és el kell határoznia mit cselekedjék, azt is figyelembe kell vennie, hogy mit tett volna, ha valamelyik másik típusú lenne.

A vélekedések hasonló rangsorát lehet felállítani ebben az esetben is, mint a köztudott racionalitás esetében. Egy játékosnak nemcsak arról lehet vélekedése, hogy milyen típusúak a többiek, hanem arról is, hogy mi a többiek vélekedése az ő vélekedéséről, és különböző típusúnak tekinti a különböző vélekedésűeket is. Ennek a problémának a precíz matematikai kezelése meghaladja a jegyzet kereteit.

A Harsányi-doktrína bevezetésénél az eddig leírtak fényében logikusabb lenne, ha a bayesi racionalitásból indulnánk ki, amelyhez az kell, hogy minden játékosnak legyen egy vélekedése (egy feltételes eloszlás a csonka típustéren) és feltételezzük, hogy van egy olyan *a priori* valószínűségeloszlás a teljes típustéren, amelyből a Bayes-tétel alapján megkaphatóak az egyes játékosok vélekedései. Maga Harsányi így járt el, és a vélekedéseket *konzisztens*nek nevezte, ha van ilyen *a priori* valószínűségeloszlás és az egyértelmű. Ez úgy is megfogalmazható, hogy minden játékos ugyanazt az *a priori* valószínűségeloszlást rendeli a típustérhez, amit *közös a priori eloszlás*nak (common prior) is nevezhetünk. Ennek a létezése igen általános feltételek mellett bizonyítható (lásd [Harsányi (1967-68)]). A formális bizonyítás elég bonyolult, de Harsányi következő intuitív érvelése elég meggyőző.

Mivel olyan modellel dolgozunk, amelyben az egyes játékosok típusai csak a kifizetőfüggvényeket befolyásolják, gondolhatunk a típusokra úgy, mint paramétervektorokra, amelyek az *a priori* eloszlásukkal objektíve meghatározottak, de a játékosok aszimmetrikus informáltsága miatt az egyes játékosok vélekedései, a posterior valószínűségek, különbözőek lehetnek. Így ha a játékosok vélekedései nem konzisztensek, akkor modellezési hibát vétettünk, amit persze kizárhatunk, mert ilyen szempontból egy „ideális világban" mozgunk. Ennél bonyolultabb a helyzet, ha nem egy objektív paramétertérről van szó, hanem a játékosoknak lehet vélekedésük a többiek tudásáról és informáltságáról is. Ezzel az esettel itt nem foglalkozunk.

6.2. példa (Harsányi példája)**.** Két játékos, A és B játszik egy kétszemélyes zérusösszegű játékot. Mindkettőnek két tiszta stratégiája van: vagy (K)eményen, vagy (P)uhán viselkedik egy adott konfliktus helyzetben (pl. hidegháborús fegyverkezési versenyben). Mindkét játékosnak két típusa van: (E)rős vagy (G)yenge. Mindketten tudják saját magukról, hogy a típusuk E vagy G, de a másik típusáról csak vélekedéseik vannak. A vélekedések az alábbi a priori eloszlásból származtathatóak a Bayes-tétel segítségével (t_A az A, t_B a B játékos típusát jelöli):

		B játékos	
		$t_B = E$	$t_B = G$
A játékos	$t_A = E$	0.4	0.1
	$t_A = G$	0.2	0.3

Ebből számolhatóak a vélekedések (feltételes eloszlások):
Az A játékos vélekedése:

	$t_B = E$	$t_B = G$
$P((t_B = E \text{ vagy } G)\|t_A = E)$	0.8	0.2
$P((t_B = E \text{ vagy } G)\|t_A = G)$	0.4	0.6

A B játékos vélekedése:

	$P((t_A = E \text{ vagy } G)\|t_B = E)$	$P((t_A = E \text{ vagy } G)\|t_B = G)$
$t_A = E$	0.67	0.25
$t_A = G$	0.33	0.75

Az A játékos kifizetéseit minden lehetséges típuspárra az alábbi négy mátrix mutatja (B kifizetései ezeknek a -1-szeresei):

(E, E)	K	P
K	2	5
P	-1	20

(E, G)	K	P
K	-24	-36
P	0	24

(G, E)	K	P
K	28	15
P	40	4

(G, G)	K	P
K	12	20
P	2	13

Az A játékos normalizált stratégiái a bayesi játékban:

- y^{KK} : K, ha az A játékos E, K ha az A játékos G,
- y^{KP} : K, ha az A játékos E, P ha az A játékos G,
- y^{PK} : P, ha az A játékos E, K ha az A játékos G,
- y^{PP} : P, ha az A játékos E, P ha az A játékos G.

A B játékos stratégiái:

- z^{KK}: K, ha a B játékos E, K ha a B játékos G,
- z^{KP} : K, ha a B játékos E, P ha a B játékos G,

- z^{PK} : P, ha a B játékos E, K ha a B játékos G,
- z^{PP} : P, ha a B játékos E, P ha a B játékos G.

A normál formában az A játékos kifizetőmátrixa (A B játékosé itt is ennek a -1-szerese) a következő:

	z^{KK}	z^{KP}	z^{PK}	z^{PP}
y^{KK}	7.6	8.8	6.2	7.4
y^{KP}	7.0	9.1	1.0	3.1
y^{PK}	8.8	13.6	14.6	19.4
y^{KK}	8.2	13.9	9.4	15.1

Például az (y^{KP}, z^{KK}) stratégiapáros kifizetése:

$$(0.4)2 + (0.1)(-24) + (0.2)(40) + (0.3)2 = 7.0.$$

Láthatjuk, hogy a kifizető mátrixnak van nyeregpontja és így a (y^{PK}, z^{KK}) stratégiapáros BNE, vagyis az A játékos Puha, ha ő maga Erős, és Kemény, ha ő maga Gyenge, míg a B játékos minden esetben Kemény. A várható kifizetés 8.8.

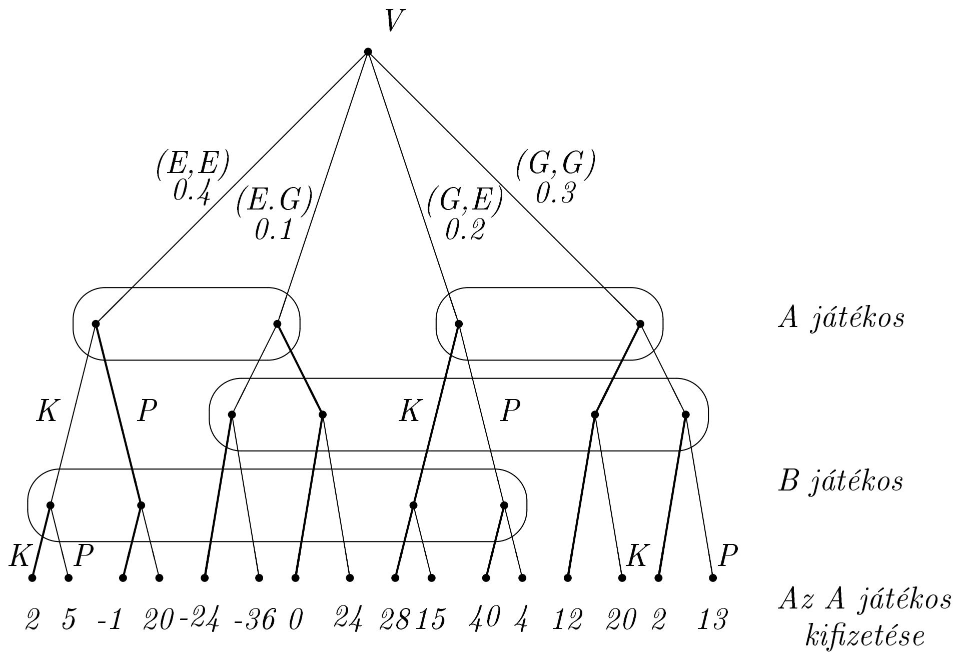
A játékot, mint egy teljes, de nem tökéletes információs extenzív formában adott játékot a 6.1. ábrán látható játékfa szemlélteti. Az információs halmazokat a szokásos módon, a BNE stratégiákat pedig vastag vonalakkal jelöltük.

Tegyük most fel, hogy az A játékos Erős. Ekkor a K és P cselekvéseinek a várható kifizetéseit az A játékos vélekedéseivel, mint valószínűségekkel számolva a B minden lehetséges stratégiája mellett a következő táblázat mutatja:

	z^{KK}	z^{KP}	z^{PK}	z^{PP}
K	-3.2	-5.6	-0.8	-3.2
P	-0.8	4.0	16.0	20.8

Például az első sor első elemét a $(0,8)2 + (0,2)(-24) = -3.2$ számolással kaptuk.

Ha a B játékos a z^{KK} BNE stratégiáját játssza, akkor a P cselekvés a legjobb az A játékos számára, amelyet egyébként a saját stratégiája a BNE-ben számára amúgy is előír: Ha Erős vagy, legyen P a cselekvésed! Így ezen a konkrét példán is látjuk a bayesi racionalitás érvényesülését a bayesi egyensúlyban. Hasonló számolással vizsgálhatjuk meg azt az esetet, amikor az A játékos Gyenge és mindkét esetet a B játékos mindkét típusára is. A 6.2. ábrán láthatjuk azt a játékfát, amely abban a döntési pontban kezdődik,



6.1. ábra. Harsányi példája

ahol már tudjuk azt, hogy az A játékos Erős. Itt is vastag vonalak jelzik az egyensúlyi stratégiákat.

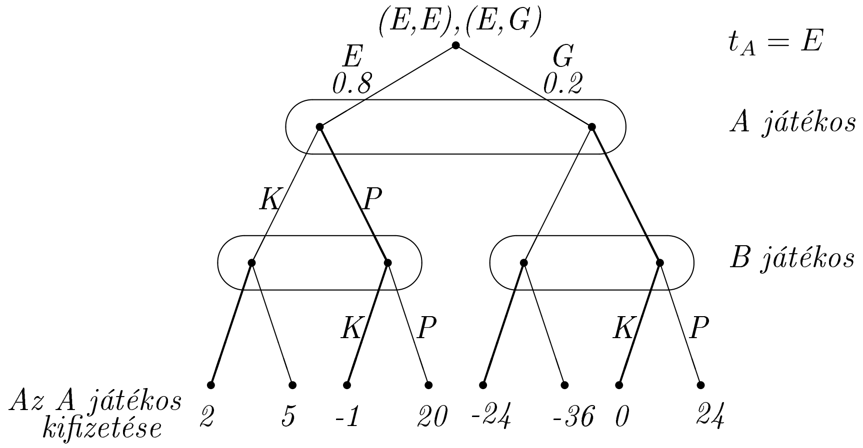
6.2. A korrelált egyensúly, mint bayesi egyensúly†

Egy korábbi fejezetben már megismerkedtünk a korrelált egyensúllyal. Most egy másik modell keretében vizsgáljuk meg ugyanazt a problémát.

Tekintsük a $G = (\mathbf{A}, \mathbf{B})$ bimátrix-játékot, ahol $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ $m \times n$-es mátrixok.

Rendeljünk hozzá a játékosok minden tiszta stratégiájához egy-egy típust. Az A játékos típusai legyenek $A_1, \ldots, A_m$, a B játékosé $B_1, \ldots, B_n$. Legyen $(p_{11}, \ldots, p_{mn})$ egy a priori eloszlás a típustéren, amelynek most mn eleme van. A játékosoknak m illetve n cselekvésük van: A választ egy sort, B egy oszlopot. Bármely típuspár esetén a kifizetéseket az $\mathbf{A}$ és a $\mathbf{B}$ mátrixok adják. Ezekkel az adatokkal egy nem teljes információs játékot definiáltunk. Tekintsük azt a stratégia párost és nevezzük *megfelelési stratégiának* a bayesi normál formában, amely szerint az A játékos az i cselekvést választja, ha A_i típusú ($i = 1, \ldots, m$) a B játékos pedig a j cselekvést, ha B_j típusú ($j = 1, \ldots, n$). Nézzük meg, hogy mi a feltétele annak, hogy ez a stratégia profil BNE legyen!

Tegyük fel, hogy a *Véletlen* az A_i, B_j típuspárt választotta. Ennek a



6.2. ábra. Harsányi példája II.

valószínűsége p_{ij}. Ha az A játékos A_i típusú, akkor A vélekedése a B játékos típusairól:

$$p'_{ij} = \frac{p_{ij}}{\sum_j p_{ij}}. \tag{6.3}$$

feltéve, hogy a nevező nem nulla, amit bátran feltehetünk. Ahhoz, hogy a megfelelési stratégia páros BNE legyen az kell, hogy az i játékosnak ne érje meg az i cselekvésről áttérni bármelyik másik k cselekvésre, vagyis a (6.2) egyenlőtlenségnek megfelelően

$$\sum_j p'_{ij} a_{ij} \geq \sum_j p'_{ij} a_{kj}$$

egyenlőtlenségnek fenn kell állnia minden i-re és k-ra, vagy ami ezzel ekvivalens, mivel a (6.3) formulában a jobboldal nevezője nem függ j-től,

$$\sum_j p_{ij} a_{ij} \geq \sum_j p_{ij} a_{kj} \tag{6.4}$$

minden i-re és k-ra. Ugyanezt felírva a B játékosra, azt kapjuk, hogy ahhoz, hogy a megfelelési stratégia páros BNE legyen, fenn kell állni a

$$\sum_i p_{ij} b_{ij} \geq \sum_i p_{ij} b_{is} \tag{6.5}$$

egyenlőtlenségnek minden j-re és s-re. Világos, hogy ha fennállnak a (6.4) és (6.5) egyenlőtlenségek, akkor a megfelelési stratégiapáros egy BNE. A $(p_{11}, \ldots, p_{mn})$ a priori eloszlás pedig pontosan az 5.2. alfejezetben definiált korrelált egyensúly.

A korrelált egyensúly nem teljes információs játékként való értelmezése azért érdekes, mert rámutat arra, hogy a korrelált egyensúly tulajdonképpen a bayesi racionalitás kifejezése egy speciális modell keretében. Vegyük észre a NEP és a BNE közötti összefüggést: A NEP esetében az i játékos *tudja* (100 százalékig biztos benne), hogy milyen csonka cselekvésprofilt akarnak a többi játékosok játszani és így maximalizálja a saját kifizetését. A BNE esetében *nem tudja biztosan*, de van egy (többnyire szubjektív) vélekedése arról, hogy mire készülnek a többiek és a várható kifizetését maximalizálja. Meg lehet figyelni, hogy a legtöbb játékban a játékosok a valóságban tényleg így gondolkodnak. A legtöbb döntéselméleti modell a bayesi racionalitást axiómaként kezeli.

6.3. Végtelen típustér

Sok olyan alkalmazás van, majd látunk erre példát is, ahol a cselekvéstér és/vagy a típustér nem véges és nagyon kényelmetlen lenne véges terekkel közelíteni. A Harsányi-modell erre az esetre elvben könnyen kiterjeszthető, hiszen a bayesi játék normál formájában csak annyi változtatásra van szükség, hogy a p a priori eloszlást, amelyből a játékosok vélekedéseit a Bayes-tétel segítségével kapjuk, végtelen típustéren kell értelmezni. Ha csökkenteni akarjuk a matematikai nehézségeket, akkor célszerű csak véges dimenziós típustereket (többnyire n-dimenziós téglákat) és az ezeken definiált folytonos eloszlásokat tekinteni.

Amit a végtelen cselekvés és/vagy típustér esetében elvesztünk, az az extenzív forma szemléletessége. Ezen felül még arra is kell ügyelnünk, hogy a stratégiák, mint a lehetséges típusokon értelmezett függvények, még ha csak egy intervallumon is vannak definiálva, akár a „legvadabb” tulajdonságúak is lehetnek. Ezért a BNE-ket általában egy szűkebb függvényosztályban (pl. lineáris függvények, differenciálható függvények, folytonos függvények stb.) keressük, valamennyi BNE meghatározása még a legegyszerűbb esetekben is szinte lehetetlen feladat. Annak szemléltetésére, hogy hogyan lehet kezelni végtelen cselekvés és típustérrel rendelkező nem teljes információs játékokat, két példát veszünk.

6.3. példa (Nemek harca II.)**.** Tekintsük a korábbiakban már vizsgált Nemek harca játékot (lásd az 1.4. példát). Jancsi és Juliska tiszta stratégiáit (Opera, vagy Kosármeccs) és kifizetéseit az alábbi táblázat mutatja (az első szám Jancsi kifizetése):

		Juliska	
		K	O
Jancsi	K	$(2,1)$	$(0,0)$
	O	$(0,0)$	$(1,2)$

Változtassuk meg a kifizetéseket egy kicsit. Noha Jancsi és Juliska elég jól ismerik egymást, de azért nem teljesen biztosak a másik kifizetőfüggvényében. Juliska az Operát $2+t_2$, míg Jancsi a Kosármeccset $2+t_1$ hasznosságra értékeli, ahol t_1 és t_2 a $[0,x]$ intervallumon definiált, független, egyenletes eloszlású valószínűségi változók, x pedig egy kis pozitív szám, ami köztudott. A többi kifizetések változatlanok. Jancsi tudja t_1-et, de t_2-ről csak az a vélekedése van, hogy egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[0,x]$ intervallumon. Juliska informáltsága és vélekedése hasonló: tudja t_2-t, és úgy vélekedik t_1-ről, mint Jancsi t_2-ről.

Most már minden összetevője megvan a bayesi játék normál formájának:

- mindkét játékos (véges) cselekvés halmaza: $\{O,K\}$,
- mindkét játékos típus halmaza: $[0,x]$,
- a vélekedések *a priori* eloszlása: egyenletes a $[0,x]\times[0,x]$ négyzeten,
- a kifizetések az alábbiak:

		Juliska	
		K	O
Jancsi	K	$(2+t_1,1)$	$(0,0)$
	O	$(0,0)$	$(1,2+t_2)$

Tegyük fel, hogy Jancsi egy olyan s_1 stratégiát játszik, amely szerint K a cselekvése, ha t_1 meghalad egy c_1 kritikus értéket, egyébként pedig O a cselekvése. Ugyanígy Juliska s_2 stratégiája: O-t játssza, ha t_2 meghalad egy c_2 kritikus értéket, egyébként K-t játssza.

Tegyük fel, hogy Juliska az s_2 stratégiát játssza. Ekkor, ha Jancsi választása K, akkor az ő várható kifizetése $\frac{c_2}{x}(2+t_1)$, ha pedig a választása O, akkor $1-\frac{c_2}{x}$. Így Jancsi számára a K cselekvés választása akkor és csak akkor optimális, ha

$$t_1 \geq \frac{x}{c_2} - 3 = c_1. \tag{6.6}$$

Hasonló módon számolhatjuk ki, hogy Juliska számára az O cselekvés választása akkor és csak akkor optimális, ha

$$t_2 \geq \frac{x}{c_1} - 3 = c_2. \tag{6.7}$$

A (6.6) és (6.7) összefüggésekből azt kapjuk, hogy $c_1 = c_2$ és $c_2^2+3c_2-x = 0$, amiből

$$c_1 = c_2 = \frac{-3 + \sqrt{9+4x}}{2}$$

és így annak a valószínűsége, hogy Juliska O-t, Jancsi pedig K-t játssza

$$1 - \frac{-3 + \sqrt{9+4x}}{2x}.$$

Ez a valószínűség $\frac{2}{3}$-hoz tart, ha x tart a 0-hoz, vagyis, ha a „bizonytalanság" eltűnik, akkor a játékosok az egyetlen szimmetrikus kevert stratégiát játsszák: mindenki a kedvenc szórakozását választja $\frac{2}{3}$ valószínűséggel.

A 6.3. példa új megvilágításba helyezi a kevert stratégiákat. A játékosoknak nem kell a sok esetben nehezen elképzelhető és fizikailag gyakran megvalósíthatatlan sorsolást megtartaniuk, mielőtt egy tiszta stratégiát választanak. A fenti példában egy tiszta bayesi stratégia diktálja, hogy mi a teendő és tetszőleges közel lehet jutni egy egyensúlyi kevert stratégiához. Ez a modell feloldja azt az ellentmondást, hogy miért kell kevert stratégiát alkalmazni, amikor a többi játékos minden stratégiája ellen van egy tiszta stratégia legjobb felelet. Lehet tiszta stratégiák alkalmazásával is keverést megvalósítani úgy, hogy a saját cselekedet kiválasztásában ne legyen semmi bizonytalanság, és csak a bizonytalanság fő forrása, a többiek kifizetőfüggvényeinek nem teljes ismerete maradjon meg a modellben. A kevert stratégiák ilyen értelmezése nemcsak a fenti példában, hanem általában is lehetséges, mint ahogyan azt [Harsányi (1973)] megmutatta.

6.4. példa. [Vickrey (1961)] Egy értékes tárgyat (kép, olajmező, stb.) n számú licitáló (játékos) akar megszerezni az eladótól. Egyedisége miatt a tárgy értékét jobban ismerik a licitálók, mint az eladó, ezért célszerű árverésen értékesíteni a tárgyat. Olyan árverést vizsgálunk, amelyben mindenki egy ajánlatot tehet lepecsételt borítékban.

Tegyük fel, hogy az i licitáló e_i-re (valós szám) értékeli a tárgyat, és ennek függvényében b_i (valós szám) ajánlatot nyújt be, $i = 1, \ldots, n$. A határidő lejárta után az eladó kinyitja a borítékot, és annak adja el a tárgyat, aki a legnagyobb ajánlatot tette és az ajánlat a vételi ár. Ha több legjobb ajánlat van, akkor véletlenszerűen választ egyet a legjobb ajánlattevők közül. Feltesszük, hogy az értékelések valószínűségi értelemben függetlenek egymástól és az i játékos haszna (a kifizetés) az értékelés és az ajánlat különbsége: $f_i = e_i - b_i$.

Ha a játékosok ismernék egymás értékeléseit, akkor egy olyan $G = \{S_1, \ldots, S_n; f_{1,\ldots,}f_n\}$ játékkal tudjuk modellezni az árverést, amelyben a játékosok stratégiahalmazai a lehetséges ajánlatok, a kifizetés pedig a haszon. Ebben a játékban minden játékosnak az a célszerű, ha a legtöbbre értékelő licitáló a második legtöbbre értékelő licitáló értékelésénél egy egészen kicsivel nagyobb ajánlatot tesz és elviszi a tárgyat. A többiek mindegy, hogy mit ajánlanak a saját értékelésük alatt. (Az egyszerűség kedvéért feltettük, hogy az értékelések mind különbözőek). Minden ilyen stratégiaprofil NEP.

A most vizsgált árverési játékban viszont az a probléma, hogy a játékosok csak a saját értékelésüket ismerik, a többiekét nem. Ha most mindenki őszinte, akkor a győztes (különböző értékelések esetében!) megátkozza magát, hogy túl sokat fizetett a tárgyért. Világos, hogy itt egy nem teljes információs játékkal van dolgunk. A játékosok típusai az értékelésük. Tegyük fel, hogy a típusok vektorának együttes a priori eloszlása köztudott. Ekkor az i licitáló várható nyeresége: $u_i(b_1, \ldots, b_n) = P(b_i > b_j,\ \text{minden}\ j \neq i)(e_i - b_i)$, ahol $P(b_i > b_j,\ \text{minden}\ j \neq i)$ annak az eseménynek a valószínűsége, hogy az i ajánlat a legnagyobb. Vegyük észre, hogy minden licitáló várható nyeresége függ az összes többi licitáló ajánlatától is, ez a játék.

A Harsányi-modellt alkalmazva, a nem teljes információs játékot teljes, de nem tökéletes információs játékká alakítjuk át. Itt a *Véletlen* először kisorsolja a játékosok típusát, majd utána mindenki licitál. A kifizetések a várható nyereségek lesznek. Ebben a játékban minden játékos stratégiája egy függvény, amely a saját értékelésének függvényében megadja a licitálást.

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az egyes értékelések egyenletes eloszlású valószínűségi változók a $[0, 1]$ intervallumon. Az egyensúlyi ajánlat-értékelés függvényeket a következő függvényosztályban keressük:

- a szimmetria miatt feltesszük, hogy minden licitáló azonos $b = B(e)$ értékelés-ajánlat függvénnyel számol,

- a B függvény szigorúan monoton növő és folytonosan differenciálható a $[0, 1]$-et tartalmazó nyílt intervallumon.

Mivel $B(e)$ szigorúan monoton növő függvény, ezért van inverze: $e = V(b)$. Ekkor kiszámolható, hogy $P(b_i > b_j, j \neq i) = e_i^{n-1} = V(b_i)^{n-1}$ és így az i játékos várható haszna (a kifizetése a bayesi játékban) $u_i(b_i, \mathbf{b}_{-i}) = V(b_i)^{n-1}(e_i - b_i)$. Elhagyva az indexeket $u(b) = V(b)^{n-1}(e - b)$ az a függvény, amelynek a maximumát kell keresnünk rögzített e mellett. Az elsőrendű feltétel:

$$u'(b) = (n-1)V(b)^{n-2}V'(b)(e-b) - V(b)^{n-1} = 0.$$

Behelyettesítve ebbe az $e = V(b)$ egyenlőséget, a

$$(n-1)V'(b)[V(b) - b] = V(b)$$

differenciálegyenletet kapjuk. Ennek a $V(b) = \frac{n}{n-1}b$ függvény megoldása. Visszatérve az eredeti értékelés-ajánlat függvényhez, azt kapjuk, hogy $b = B(e) = \frac{n-1}{n}e$. Visszaírva az indexeket: $b_i = \frac{n-1}{n}e_i$ minden i-re.

Összegezve: A fenti árverési modellben az a stratégia, amely szerint minden licitáló a saját értékelésének $\frac{n-1}{n}$-szeresét licitálja BNE. Vegyük észre, hogy n növekedésével, az egyensúlyi stratégia egyre közelebb kerül az „igazmondáshoz”.

6.4. Feladatok

6.1. feladat. A *második ár* (second price) aukciós szabály szerint az a licitáló kapja meg a tárgyat, aki a legtöbbet kínálja érte, de csak a második legnagyobb licitet kell kifizetnie. Mutassuk meg, hogy a 6.4. példában ismertetett szituációra a második ár aukciós szabályt alkalmazva az igazmondás (minden játékos esetében ajánlat=értékelés) az egyetlen BNE.

6.2. feladat. Tegyük fel, hogy két vállalat egy piacon duopóliumot alkot. Ha a két vállalat kibocsátása $q_1$és q_2, akkor a p árat a $p(q_1+q_2) = 1-q_1- q_2$ inverz keresleti függvény határozza meg. Mindkettő költségfüggvénye lineáris és a c_1, c_2 egységköltségek egymástól független valószínűségi változók: $1/2 - 1/2$ valószínűséggel a és m (alacsony és magas), ahol $a < m$. Mindkét vállalat ismeri a saját költségét, de a másik költségének csak az eloszlását ismeri.

1. Határozzuk meg a profitmaximalizáló vállalatok BNE-jét.
2. Milyen matematikai feltételeknek kell teljesülniük, hogy az eredmény közgazdaságilag értelmes legyen?

6.3. feladat. Tekintsük a következő bimátrix-játékot (gyáva nyúl típusú játék):

		2. játékos	
		Kitér	Nem tér ki
1. játékos	Kitér	(2,2)	(1,3)
	Nem tér ki	(3,1)	(s,t)

ahol s és t köztudott, független, a $[0, x]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók (rendre a játékosok típusai). Mindkét játékos ismeri a saját típusát, de nem ismeri a másikét. Azt is feltesszük, hogy $0 < x < 1$.

Alkalmazzuk a Harsányi-modellt és határozzunk meg egy bayesi Nash-egyensúlypontot. (Útmutatás: keressük a BNE-t az olyan stratégiák között, amelyek szerint az 1. játékos kitér, ha s alatta marad egy bizonyos kritikus c értéknek, egyébként nem tér ki, ugyanígy a 2. játékos kitér, ha a t alatta marad egy bizonyos kritikus d értéknek, egyébként nem tér ki)

Mi a helyzet, ha $x \to 0$?

6.4. feladat. Tekintsük a következő bimátrix-játékot (gyáva nyúl típusú játék):

		2. játékos	
		Kitér	Nem tér ki
1. játékos	Kitér	(2,2)	(1,3)
	Nem tér ki	(3,1)	(s,t)

Mindkét játékos típusa B(átor), vagy G(yáva) és csak saját maga tudja, hogy melyik. Köztudott viszont, hogy az emberek 30%-a B, 70%-a pedig G. A két játékost egymástól függetlenül, véletlenszerűen választjuk ki. A B típus a (Nem tér ki, Nem tér ki) kimenetelt 0-ra, a G típus -1-re értékeli.

1. Írjuk fel ennek a nem teljes információs játék extenzív formájának játékfáját.

2. Adjuk meg a normál forma tiszta stratégiáit és számítsuk ki a stratégiapárok kifizetéseit.

7. fejezet

Szekvenciális egyensúly†

7.1. Tökéletes bayesi-egyensúly

A nem teljes információs játékok bayesi Nash-egyensúlyát (a Harsányi-modell keretében) normál formában adott játékokra definiáltuk eddig. Mi a helyzet akkor, ha egy játék természetes modellje elsődlegesen az extenzív formát kívánja, és nem minden játékosnak van teljes információja a játék minden összetevőjéről?

Természetesen mindig rendelkezésünkre áll a lehetőség, hogy áttérjünk az extenzív formáról a normál formára és a már megismert modellt alkalmazzuk. Ez azonban még egészen egyszerű játékok esetében is óriási méretnövekedéshez vezet, és elveszítjük azt a természetes közeget, amelyben az eredményeinket közvetlenül értelmezni tudnánk.

Lehet azonban egy másik utat is követni. Megmaradunk az extenzív formánál és Harsányi módszerét közvetlenül alkalmazzuk. Legyen tehát G egy játék extenzív formában, T pedig a játékfa. Minden valódi játékos (a *Véletlen* nem!) típusa (ezekből véges számú van) a játék leírásának része. Minden játékos ismeri a saját típusát, de a többiekét nem, de van a többi játékos csonka típusprofiljairól egy vélekedése, amely a csonka típusprofilok halmazán értelmezett (szubjektív) valószínűségeloszlás. A Harsányi-doktrína értelmében ezek az eloszlások a típusprofilok terén adott *a priori* eloszlás peremeloszlásai. A már tanultak szellemében alakítjuk át a nem teljes információs játékot teljes, de nem tökéletes információs játékká.

Mint láttuk, a bayesi játékokban egy döntés racionalitása azt jelenti, hogy minden játékos úgy választ stratégiát, hogy a többiek lehetséges stratégiáihoz egy szubjektív valószínűségeloszlást (vélekedést) rendel, és egy olyan stratégiát választ, amelynek ezen eloszlással számított várható kifizetése maximális. Extenzív formában adott játéknál a vélekedéseket legtermészetesebb a döntési pontoknál (az információs halmazoknál) kialakítani, és ekkor a bayesi racionalitás azt jelenti, hogy az adott információs halmazhoz rendelt játékos azt az élt választja, amely az adott információs halmazhoz tartozó vélekedésével számított várható kifizetést maximalizálja. Ha az egyes információs halmazokhoz tartozó vélekedések rendszerét, a *vélekedésrendszer*t nem tekintjük a játék leírásához tartozónak, akkor egész furcsa, intuícióval ellentétes részjáték tökéletes NEP-ek is előfordulhatnak.

Kibővítjük a játékfát azzal, hogy a *Véletlen* az adott *a priori* eloszlás szerint kisorsol egy típusprofilt. Ez át fogja alakítani a játék információs struktúráját. Eddig egyelemű információs halmazok többeleműekké válhatnak, hiszen az a játékos, akinek egy ilyen új információs halmazban dönteni kell, nem tudhatja bizonyossággal, hogy a többiek milyen típusprofiljával találkozik, és ezért nem tudja, hogy az információs halmaz melyik pontjában van. Ebben a bővített extenzív játékban a NEP-et a szokásos módon definiáljuk. Nem lesz a dolog azonban probléma mentes. Mielőtt erre rátérnénk, nézzünk egy példát.

7.1. példa (Áruházlánc játék V.)**.** Bővítsük ki a már ismert Áruházlánc játékot (3.1. példa) azzal, hogy a B vállalkozó két típusú lehet: tőkeerős t vagy nem tőkeerős n és ez B döntésétől függ. Az N nagy áruház nem tudja, hogy B milyen típusú. A játékot a 7.1. ábra szemlélteti.

Az egyetlen nem triviális információs halmaz B két típusát tartalmazza. A kifizetések, amelyek közül a felső szám B-é, az alsó pedig N-é, azt tükrözik, hogy N-nek jobb egy n típus ellen harcolni, ha árharcra kerül sor, mint egy t típus ellen, és B számára jobb, ha ő maga t típusú az árharc esetén, mintha n típusú lenne. A játék normál formában:

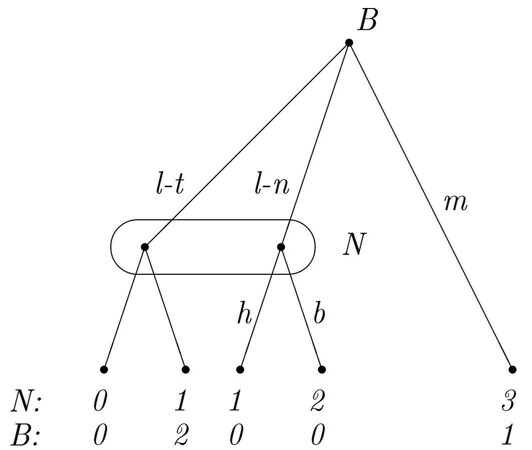
		N	
		b	h
	l-t	(2,1)	(0,0)
B	l-n	(0,2)	(0,1)
	m	(1,3)	(1,3)

(l-t a belép és tőkeerős, míg l-n a belép és nem tőkeerős stratégiákat jelenti, az első szám B, a második N kifizetése).

Mivel csak egyetlen részjáték van (részjáték nem kezdődhet nem triviális információs halmazzal), ezért minden NEP részjáték tökéletes. Két NEP van: az *(l-t,b)* és az (m, h) stratégiapárosok. Az utóbbi azon a hiteltelen fenyegetésen alapszik, hogy ha B belép a piacra, akkor N harcolni fog.

Tegyük most fel, hogy N-nek van vélekedése arról, hogy mi a típusa B-nek. Úgy gondolja, hogy p a valószínűsége annak, hogy B tőkeerős és $1 - p$ annak, hogy nem tőkeerős. Ezekkel a szubjektív valószínűségekkel számolva

N várható kifizetése, ha a b stratégiát alkalmazza $p \cdot 1 + (1-p) \cdot 2 = 2-p$, míg ha a h stratégiát, akkor $p \cdot 0 + (1-p) \cdot 1 = 1-p$. Mivel $2-p > 1-p$ minden p értékre, ezért N sohasem fog harcolni. Ezért ha megköveteljük, hogy N-nek legyen (bármilyen!) vélekedése B típusáról és a bayesi racionalitást, akkor ki tudjuk szűrni az intuícióval ellentétes második NEP-et.



7.1. ábra. Áruházlánc játék V.

A fenti példában láttuk azt, hogy milyen fontos az, hogy a játékosoknak legyen vélekedésük a nem triviális információs halmazokhoz rendelt játékosok típusáról. Ebben a példában mindegy, hogy mi a vélekedés, nem mindig van azonban ez így. Ha több nem triviális információs halmaz van, akkor a vélekedéseknek konzekvenseknek kell lenniük és konzisztens rendszert kell alkotniuk. A konzekvenciát a „bayesi értelemben” követeljük meg, de még így is lehetünk többé vagy kevésbé szigorúak. Kezdjük néhány definícióval.

7.2. definíció. Legyen G egy extenzív formában adott játék és $\mathbf{e}$ egy stratégiaprofil. Azt mondjuk, hogy egy U információs halmaz az $\mathbf{e}$-*úton* van, ha pozitív annak a valószínűsége, hogy a játék eléri U-t, amennyiben a játékosok az $\mathbf{e}$ stratégiaprofilt játsszák. Ellenkező esetben U *nincs az* $\mathbf{e}$-*úton*.

Legyen $\mathbf{e}$ a G extenzív formában adott játék stratégiaprofilja, U az i játékos olyan információs halmaza, amely rajta van az $\mathbf{e}$-úton, és minden pontjából k él indul ki. Tegyük fel, hogy ha a játékosok az $\mathbf{e}$ stratégiaprofilt játsszák, akkor a játék az egyes élek mentén $q_1, \ldots, q_k$ valószínűséggel halad tovább (ezek közül legalább az egyik pozitív!).

7.3. definíció. Az i játékos U információs halmazára vonatkozó $p_1, \ldots, p_k$ vélekedését *konzisztensnek* nevezzük, ha

$$p_j = \frac{q_j}{\sum_{m=1}^{k} q_m}, \quad j = 1, \ldots, k. \tag{7.1}$$

A konzisztencia megkövetelése nem mond semmit arról, hogy milyenek legyenek a vélekedések olyan információs halmazokban, amelyek nincsenek rajta az **e**-úton. Ha szigorúbbak akarunk lenni, akkor olyan információs halmazoknál is megköveteljük a konzisztenciát, amelyek nincsenek rajta az **e**-úton, már amennyiben ez lehetséges, hiszen ekkor a (7.1) képletben a nevező 0 is lehet, amikor a konzisztencia értelmét veszíti.

7.4. definíció. Egy G extenzív formában adott játékhoz tartozó vélekedésrendszert *szekvenciálisan racionálisnak* nevezünk az **e** stratégiaprofilra vonatkozóan, ha az **e**-úton elhelyezkedő valamennyi információs halmazhoz tartozó vélekedések konzisztensek.

Most már készen állunk arra, hogy definiáljuk a tökéletes bayesi egyensúlyt.

7.5. definíció. Az **e** stratégiaprofilt és a V vélekedésrendszert együtt a G extenzív formában adott játék *tökéletes bayesi-egyensúlyának* (TBE) nevezzük, ha

1. **e** a G részjáték tökéletes NEP-je,
2. V szekvenciálisan racionális **e**-re vonatkozóan,
3. minden játékos bayesi értelemben racionális.

A TBE kiszámítására általában nem lehet használni a visszafele indukciót, mivel az egyensúlyi stratégia függ a vélekedésektől és a vélekedések is függenek az egyensúlyi stratégiaprofiltól. Konkrét játékok esetében a TBE definíciójában szereplő követelmények és a játék specialitásának kihasználása több-kevesebb leleményességgel párosulva hozhatja meg a sikert, mint azt a következőkben látni fogjuk.

7.2. Jelzéses játékok

A jelzéses játékok (signaling games) tipikus alkalmazási területe a TBE-nek. A jelzéses játék legegyszerűbb formájában két játékos van, a Feladó (Sender) és a Címzett (Receiver). A játék lefolyása a következő:

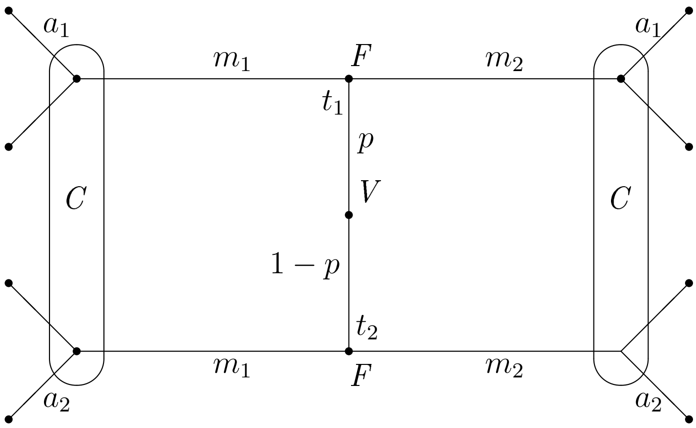
1. A Véletlen az F egy t_i típusát választja ki a véges $T = \{t_1, \ldots, t_I\}$ halmazból, egy p valószínűségeloszlás szerint,

2. F megfigyeli saját t_i típusát, majd választ egy m_j *üzenetet* a lehetséges üzenetek $M = \{m_1, \ldots, m_J\}$ véges halmazából,

3. C megfigyeli az m_j üzenetet (de F típusát nem) és választ egy a_k cselekvést a lehetséges cselekvések véges $A = \{a_1, \ldots, a_K\}$ halmazából,

4. Megtörténnek az $f_F(t_i, m_j, a_k)$ és $f_C(t_i, m_j, a_k)$ kifizetések.

Egy egyszerű példát, ahol a T, M, A halmazok mind kételeműek, a 7.2. ábrán láthatunk.



7.2. ábra. Jelzéses játék I.

A *munkaerő-piaci jelzéses játék* tipikus jelzéses játék. Itt F a munkát kereső dolgozó, C a potenciális munkaadó, F típusa az értéktermelő képessége, az üzenet az iskolai végzettsége, a cselekvés pedig a munkabér, amit a munkáltatótól kap.

A jelzéses játékban is, mint minden nem teljes információs játékban amelyben a Harsányi-modellt használjuk, a játékosok stratégiái a teljes magatartás tervek a saját típus függvényében. A 7.2. ábrán látható játékban ezek a következők.

F stratégiái:

1. Válaszd m_1-et, ha V a t_1-et választotta, és válaszd m_1-et, ha V a t_2-őt választotta,

2. Válaszd m_1-et, ha V a t_1-et választotta, és válaszd m_2-őt, ha V a t_2-őt választotta,

3. Válaszd m_2-őt, ha V a t_1-et választotta, és válaszd m_1-et, ha V a t_2-őt választotta,

4. Válaszd m_2-őt, ha V a t_1-et választotta, és válaszd m_2-őt, ha V a t_2-őt választotta.

C stratégiái:

1. Válaszd a_1-et, ha F az m_1-et választotta, és válaszd a_1-et, ha F az m_2-őt választotta,
2. Válaszd a_1-et, ha F az m_1-et választotta, és válaszd a_2-őt, ha F az m_2-őt választotta,
3. Válaszd a_2-őt, ha F az m_1-et választotta, és válaszd a_1-et, ha F az m_2-őt választotta,
4. Válaszd a_2-őt, ha F az m_1-et választotta, és válaszd a_2-őt, ha F az m_2-őt választotta.

Az egyszerűség kedvéért, most csak tiszta stratégiákkal foglalkozunk. F azon stratégiáit, amelyben mindig ugyanazt az üzenetet küldi, bármilyen legyen a típusa is, *gyűjtő* (pooling) stratégiáknak, azokat, amelyekben minden típus esetén más üzenetet küld, *szétválasztó* (separating) stratégiáknak nevezzük. Több, mint két típus esetében, amikor a típusok egy legalább kételemű valódi részhalmaza esetében küldi F ugyanazt az üzenetet, *részlegesen gyűjtő* (partially pooling) stratégiáknak nevezzük. A fenti példában F első és negyedik stratégiája gyűjtő, míg a második és harmadik szétválasztó.

Ahhoz, hogy a jelzéses játék tökéletes bayesi-egyensúlyát definiálni és kiszámítani tudjuk, a játék leírását ki kell egészíteni a vélekedésekkel. Miután C megfigyelte az m_j üzenetet, kell legyen egy vélekedése arról, hogy vajon melyik típus küldhette ezt. A vélekedés a $\mu(t_i \mid m_j)$ valószínűségek összessége, ahol

$$\sum_{t_i \in T} \mu(t_i \mid m_j) = 1$$

fennáll minden $m_j \in M$-re.

Ha adott az F játékos m_j üzenete, akkor C maximalizálja a várható kifizetését és ennek megfelelően választja azt az $a^*(m_j)$ cselekvést, amely megoldása a

$$\max_{a_k \in A} \sum_{t_i \in T} \mu(t_i \mid m_j) f_C(t_i, m_j, a_k)$$

maximumfeladatnak.

Az F játékos $m^*(t_i)$ egyensúlyi stratégiája legjobb felelet a C egyensúlyi stratégiájára, vagyis a

$$\max_{a_k \in A} \sum_{m_j \in\ M} f_F(t_i, m_j, a^*(m_j))$$

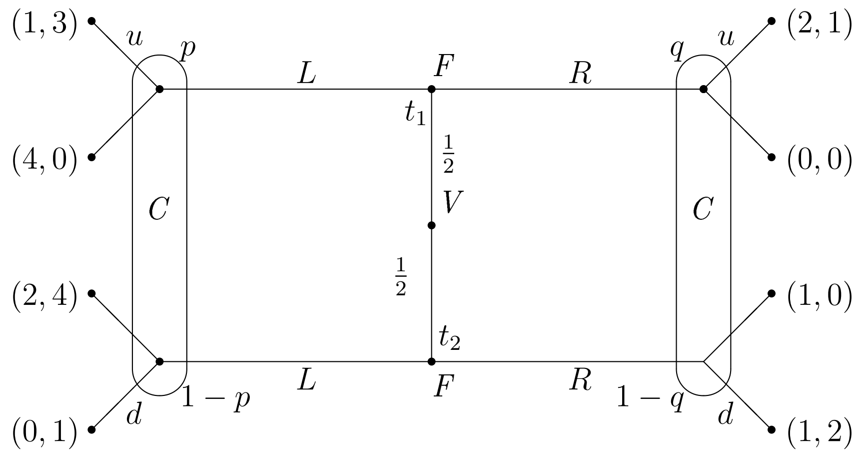
maximumfeladat megoldása.

Most már csak a C vélekedéseit kell a típusok p eloszlásával összehangolni. Legyen m_j egy olyan üzenet, amelyet az F típusainak egy T_j nem üres részhalmaza küld $m^*(t_i)$ szerint, vagyis minden $t_i \in T_j$ esetén $m^*(t_i) = m_j$. (Azokkal az üzenetekkel, amelyeket egyetlen típus sem küld, nem kell foglalkozni, mert azok nincsenek az egyensúlyi úton). A TBE definíciója szerint C vélekedését az alábbi képlettel kell kiszámolni:

$$\mu(t_i \mid m_j) = \frac{p(t_i)}{\sum_{t_r \in T_i} p(t_r)}.$$

A jelzéses játék TBE-je (a tiszta stratégiák halmazán) tehát egy olyan ($m^*(t_i)$, $a^*(m_j)$) stratégiapáros és $\mu(t_i \mid m_j)$ vélekedés, amely a fenti követelményeknek eleget tesz. Nincsen semmi garancia általában arra, hogy a TBE létezik a tiszta stratégiák halmazán, így a definíciót ki kellene terjeszteni a kevert esetre is, amivel mi itt nem foglalkozunk. Az alkalmazásokban első sorban a tiszta stratégiák az igazán érdekesek.

A TBE meghatározását a 7.2. ábrán látható játékon mutatjuk meg. A 7.3. ábrán ugyanezt a játékot látjuk, de a játékfa végpontjainál feltüntettük a kifizetéseket (az első érték az F, a második a C játékoshoz tartozik) és az információs halmazoknál C egyelőre ismeretlen vélekedéseit $(p, 1-p, q, 1-q)$.



7.3. ábra. Jelzéses játék II.

1. Először megnézzük, hogy van-e olyan TBE amelyben F gyűjtő stratégiája az, hogy L-et játszik mindkét típusa esetén. Tegyük tehát fel, hogy van olyan TBE, amelyben F stratégiája (L, L). Itt az (m', m'') jelölés azt jelenti, hogy F az m' üzenetet választja, ha t_1 típusú, és az m'' üzenetet választja, ha t_2 típusú. Így C bal oldali információs halmaza az egyensúlyi úton van és ezért a vélekedése $p = \frac{1}{2}$ kell legyen. C legjobb válasza bármilyen vélekedés esetén, ha F az L-et választja, u, így F típusai a felső ágon 1, az alsón 2 kifizetést kapnak.

   Annak meghatározásához, hogy vajon F mindkét típusa L-et fogja-e választani, meg kell néznünk, hogyan reagál C az R választására. Ha C válasza u, akkor a t_1 típus kifizetése, ha R-et játszik, 2, ami több, mint 1, amennyit akkor kap, ha L-et játszik. Ha viszont C válasza d, akkor az F mindkét típusa nagyobb kifizetéshez jut, ha L-et játszik, mint ha R-et játszana. Így, ha van olyan TBE, amelyben F stratégiája (L, L), akkor C válasza R-re d kell legyen, ezért C stratégiája (u, d), ahol (a', a'') annak a rövid jelölése, hogy C az a'-t játssza, ha F az L-et játszotta és a''-t, ha az R-et.

   Nézzük most C vélekedését az R-hez tartozó információs halmaznál. Mivel d az optimális választás ebben az információs halmazban, ezért $q \leq \frac{2}{3}$ fenn kell álljon, és így az $[(L, L), (u, d), \frac{1}{2}, q]$ stratégia és vélekedés együttes TBE minden $q \leq \frac{2}{3}$ esetén.

2. Nézzük meg most, hogy van-e olyan TBE, amelyben F gyűjtő stratégiája az, hogy R-et játszik mindkét típusa esetén. Ekkor $q = \frac{1}{2}$ kell legyen és C legjobb válasza R-re d, ami t_1 típus esetében 0, míg t_2 típus esetében 1 kifizetést biztosít F-nek. De F t_1 típusa 1 kifizetést is kaphat, ha L-et játszik, mert erre C legjobb válasza u. Ezért nem lehet olyan TBE, amelyben F stratégiája (R, R).

3. Van-e F-nek (L, R) típusú szétválasztó egyensúlyi stratégiája? Ekkor C mindkét információs halmaza az egyensúlyi úton van és ezért $p = 1$, $q = 0$. A C legjobb válaszai ezekre a vélekedésekre rendre u és d, így F mindkét típusa 1 kifizetést kap. Most már csak azt kell ellenőrizni, hogy F-nek az (L, R) stratégiája legjobb felelet-e C-nek az (u, d) stratégiájára. Azonnal látszik, hogy nem, mert az F t_2 típusa nagyobb kifizetést kap, ha R-et L-re cseréli.

4. Mi a helyzet, ha F az (R, L) szétválasztó stratégiát játssza? Ekkor C mindkét információs halmaza az egyensúlyi úton van és ezért $p = 0$, $q = 1$. A C legjobb válaszai ezekre a vélekedésekre rendre u és u, így F mindkét típusa 2 kifizetést kap. Könnyű látni, hogy az (L, R) legjobb

válasza F-nek a C játékos (u, u) stratégiájára, hiszen ha bármelyik típus esetén is eltérne, csak 1 kifizetést kapna. Így az $[(R, L), (u, u), 0, 1]$ stratégia és vélekedés együttes TBE.

7.3. Feladatok

7.1. feladat. Adjunk példát arra, hogy egy $\mathbf{e}$ stratégiaprofil mellett, egy V vélekedésrendszer nem szekvenciálisan racionális.

8. fejezet

Ismételt játékok

8.1. Általános modell és alapfogalmak

Mint azt korábban láttuk, az extenzív formában adott játékok modellje jó eszköz az olyan játékok elemzésére, amelyekben fontos szerepet játszik az idő, a játékosok egyes lépéseinek sorrendisége. Főleg az utóbbin van a hangsúly, a játékfában különböző utakon lévő lépések időbeli összehasonlítása nem része a modellnek és mint ilyen irreleváns. Sokszor azonban az idődimenzió meghatározó, hiszen fontos, hogy minden lépés időben is összehasonlítható legyen. Az ilyen játékokat gyűjtőnéven *dinamikus játék*oknak nevezzük.

A dinamikus játékok leírását azzal kezdjük, hogy rögzítjük az időskálát. Mi csak diszkrét idővel foglalkozunk, feltesszük, hogy a $t = 0, 1, 2, \ldots$ időpontokban legalább egy játékos „lép" (hoz valamilyen döntést). A játék tarthat véges vagy végtelen ideig. Azt is feltesszük, hogy minden lépés és annak minden lehetséges következménye köztudott, a konkrét lépések és következményeik megfigyelhetőek. Emiatt bármely időpontban meghozott döntés függvénye a játék „múltjának", vagyis a megelőző időpontokban meghozott döntéseknek. Feltesszük a teljes informáltságot, a játék minden eleme köztudott, beleértve a *Véletlen* lépéseinek valószínűségeloszlását is.

Attól függően, hogy milyen kapcsolat van az egyes időpontokban fennálló döntési helyzetek között, a dinamikus játékok több fajtáját különböztetjük meg. Ezek közül ebben a fejezetben olyan játékokkal foglalkozunk, amelyekben minden időpontban ugyanazt a G játékot játsszák a játékosok. Nevezzük a G játékot *alapjáték*nak (stage-game, one-shot game), az ezekből összeállított játékot *ismételt játék*nak (repeated game).

A közismert kártyajátékok közül például egy ulticsata ismételt játék, de a kanasztában a pontszám emelkedésével nő a letevéshez szükséges minimális érték, tehát ez nem ismételt játék.

Ha egy játékot sorozatban (véges, vagy végtelen) játszanak a játékosok és későbbi időpontokban módjuk van reagálni a többiek korábbi cselekvéseire, akkor a stratégiai lehetőségek kitágulnak. Mint azt látni fogjuk, lehetőség van olyan kimenetelek Nash-egyensúlyként való elérésére, amelyek mindenki számára kedvezőbbek, mint az alapjátékban elérhető kifizetés.

Mielőtt a pontos matematikai definíciót megadjuk, nézzünk egy példát.

8.1. példa. Tekintsük azt a G alapjátékot (bimátrix-játék), amelyben az *1.* játékos tiszta stratégiái F és A, a *2.* játékosé J és B, a kifizetéseket pedig az alábbi táblázatban láthatjuk (az első szám az *1.* játékos, mig a második a *2.* játékos kifizetése):

		2. játékos	
		J	B
1. játékos	F	(3,3)	(4,2)
	A	(2,4)	(5,5)

A tiszta stratégiák halmazán ennek a játéknak két NEP-je van: (F, J) és (A, B).

Tekintsük most azt a játékot, amelyben a G játékot két egymást követő időpontban játsszák a játékosok, kifizetésük pedig a két játékban kapott kifizetések összege.

Melyek lesznek ebben az ismételt játékban a játékosok stratégiái? Például az *1.* játékosnak el kell döntenie, hogy az első időpontban mit lép (F vagy A), a második időpontban pedig azt kell eldöntenie, hogy az első időpontban lehetséges kimenetelek $(F, J), (F, B), (A, J), (A, B)$ függvényében mit lép, F-et vagy A-t. Ez csak a második időpontban 16 lehetőséget jelent, amihez hozzá véve az első időpont két lehetséges döntését, 32 tiszta stratégiája van az *1.* játékosnak (és nyilván a *2.* játékosnak is). Ezt a játékot fel lehet természetesen írni normál formában, de a két 32×32-es mátrix felírásától itt eltekintünk, aki azonban nem sajnálja a fáradságot ezt megtenni, látja majd, hogy milyen sok egészen „furcsa" NEP keletkezett.

Ezeket a NEP-eket nem fogjuk mind megvizsgálni, csak két megfigyelést teszünk:

1. Könnyű igazolni, hogy az a stratégiapáros, amely szerint az 1. játékos az első időpontban az F-et játssza, a másodikban is az F-et, függetlenül attól, hogy mi volt a kimenetele az első időpontban az alapjátéknak, a *2.* játékos pedig ugyanígy mindkét időpontban a J-t, NEP-et ad az ismételt játékban.

2. Tekintsük a következő stratégiapárost:

1. játékos: az első időpontban A-t lép, a másodikban A-t, ha az első időpont alapjátékának kimenetele (A, J) volt és F-et egyébként.

2. játékos: az első időpontban J-t lép, a másodikban B-t, ha az első időpont alapjátékának kimenetele (A, J) volt és J-t egyébként.

Ez a stratégiapár egy NEP, mert ha pl. az *1.* játékos el akarna térni, akkor a második időpontban ezt nem érdemes megtennie, mert az (A, B) NEP az alapjátékban, az első időpontban pedig azért, mert minden eltérés az (F, J) kimenetelhez vezet, ami az alapjátékban NEP és ugyanakkor rosszabb kifizetést (3-at) ad mint az egyébként elérhető 5.

A fenti példában a két időpontban elért kifizetéseket egyszerűen összeadtuk és úgy kaptuk meg az ismételt játék kifizetéseit. Így nem vettük figyelembe a kifizetések jelenértékét, vagyis hogy a későbbi időpontokban kapott kifizetések kevesebbet érnek, mint a korábbiakban kapottak. Végtelen időhorizont esetében a kifizetések egyszerű összeadása egyébként is értelmét veszti.

Tegyük fel, hogy van egy $0 < \delta < 1$ diszkonttényező, amellyel minden „kifizetés folyamot" a $t = 0$ időpontbeli kifizetésként tudunk megadni. Például, ha r a kamatláb, akkor $\delta = 1/(1 + r)$. Tehát, ha $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ jelöli az egyes időpontokban valamelyik játékos kifizetéseit, akkor ennek a 0 időpontra számított jelenértéke:

$$a_0 + \delta a_1 + \delta^2 a_2 + \delta^3 a_3 + \dots .$$

Ezt az összegzést véges és végtelen időhorizontú játékokra is el lehet végezni, mivel a δ diszkonttényező 1-nél kisebb. Ha a játékonkénti átlagos kifizetésekkel akarunk dolgozni, akkor pl. végtelen időhorizont esetén a fenti összeget az $(1 - \delta)$ konstanssal kell megszoroznunk. A játékosok használhatnak egyénenként különböző diszkonttényezőket, ami jobban megfelel annak a feltételezésünknek, hogy a nem kooperatív játékokban a hasznosságoknak nem kell összemérhetőknek lenni. Az egyszerűség kedvéért azonban a következőkben egységes diszkonttényezőt használunk.

Felmerülhet még az a kérdés, hogy milyen realitása van a végtelen időhorizontnak. A végtelen időhorizont annak a helyzetnek a modellezésére is használható, amikor a játék ugyan véges ideig tart, de nem tudjuk pontosan meddig, csak a befejezési időpont valószínűségeloszlását ismerjük. Tegyük fel, hogy az ismételt játékot „türelmetlen" játékosok játsszák, és a játék minden időpontban p valószínűséggel véget ér és $1-p$ valószínűséggel folytatódik tovább. Ekkor a t időpontban a $t+1$ időpont kifizetése $(1-p)\delta a_{t+1}$-t ér csak (most várható kifizetéssel számolunk) és dolgozhatunk egy olyan végtelen időhorizontú modellel, amelyben a diszkonttényező$(1 - p)\delta$.

Most formálisan is definiáljuk az ismételt játékokat. Legyen $G = \{S_1, \ldots, S_n; f_1, \ldots, f_n\}$ az alapjáték normál formában, amelyet T-szer ($T = \infty$ megengedett) egymás után játszanak le, az egyes időpontokban a kifizetéseket pedig a $0 < \delta < 1$ diszkonttényezővel jelenértékre számítják át a játékosok. A $\Gamma = \{G, \delta, T\}$ szimbólum jelöli az *ismételt játék*ot. Jelöljük $\mathbf{s}_t$-vel azt a stratégiaprofilt, amelyet a játékosok a t időpontban választottak. Nevezzük a $\mathbf{h}_t = (\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_{t-1})$ vektort a *játék történet*ének a t időpontban, ($t \geq 1$). A játék történetét minden játékos látja, vagyis pontosan emlékszik arra, hogy milyen stratégiaprofilok fordultak korábban elő. Célszerű a 0 időpontban is definiálni a $\mathbf{h}_0$ történetet, amelyet az $\mathbf{s}_{-1}$ stratégiaprofil jelent. Ez akkor hasznos, ha a játékot már megelőzte valami, és a 0 időpontban úgy indul, hogy a játékosoknak már lehet reagálniuk egy megelőző ismételt játékban (amelyben ugyanaz volt az alapjáték) kialakult stratégiaprofilra. A $\mathbf{h}_0$ kezdeti történetet a játék leírásához tartozónak tekintjük.

Legyen $H_0 = \emptyset$, $H_t = \{\mathbf{h}_t\}$ a t időpontban a játék lehetséges történeteinek halmaza ($t \geq 0$). A v_{it} függvényt az i játékos *döntési függvény*ének nevezzük a t időpontban, ha v_{it} a H_t minden eleméhez az S_i stratégiahalmaz egy elemét rendeli. Jelöljük V_{it}-vel az i játékos összes döntési függvényeinek halmazát. A

$$\sigma_i = (v_{i0}, \ldots, v_{iT}), \quad v_{it} \in V_{it},\ t = 0, 1, \ldots, T$$

vektort az i játékos egy *teljes stratégiá*jának nevezzük a Γ ismételt játékban. Jelöljük Σ_i-vel az i játékos teljes stratégiáinak halmazát. Definiáljuk az i játékos $g_i : \Sigma = \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_n \rightarrow \mathbb{R}$ kifizetőfüggvényét a Γ ismételt játékban úgy, mint az egyes időpontokban a kifizetések diszkontált összegét:

$$g_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \sum_{t=0}^{T} \delta^t f_i(v_{1t}(\mathbf{h}_t), \ldots, v_{nt}(\mathbf{h}_t)).$$

Ekkor a $\mathbf{h}_0$ kezdeti történetű Γ ismételt játékot normál formában a következőképpen adjuk meg:

$$\Gamma = \{\mathbf{h}_0, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_n; g_1, \ldots, g_n\}.$$

A normál formában a NEP-et a szokásos módon definiáljuk: teljes stratégiák olyan profilja, amelytől egyik játékosnak sem éri meg eltérni, feltéve, hogy a többiek a NEP stratégiájukat játsszák.

A teljes stratégiák közül bizonyos speciális stratégiákat érdemes külön megemlíteni. Az i játékos egy σ_i stratégiáját *stacioner*nek nevezzük, ha nem függ a t időtől, vagyis az alapjátéknak ugyanazt az $s_i \in S_i$ stratégiáját rendeli hozzá minden történethez bármely időpontban.

Az i játékos egy σ_i stratégiáját *reaktív vagy Markov-stratégiá*nak nevezzük, ha az i játékos v_{it} döntési függvénye csak az $\mathbf{s}_{t-1}$-től függ minden $t = 1, \ldots, T$ -re. Az a játékos, aki ilyen stratégiát követ, nem törődik azzal, hogy hogyan jutottak el a játékosok a $t-1$ időpontig, csak a $t-1$ időpontban létrejött stratégiaprofiltól függ a döntése.

Az i játékos egy σ_i stratégiáját *ugró (trigger) stratégiá*nak nevezzük, ha van olyan t^* időpont, hogy $v_{it}(\mathbf{h}_t) = s_i \in S_i$ minden $t = 0, 1, \ldots, t^* - 1$ esetén, és $v_{it}(\mathbf{h}_t) = r_i \in S_i$, $r_i \neq s_i$ minden $t = t^*, t^* + 1, \ldots, T$ esetén. Ilyen stratégia alkalmazásakor az i játékos egy ideig ugyanazt a stratégiát játssza az alapjátékban, majd egyszer valamilyen hatásra „meghúzza a ravaszt" (innen az angol trigger elnevezés) és áttér (átugrik) egy másik stratégiára az alapjátékban, ami mellett aztán végig kitart.

Ha adott egy $\Gamma = \{G, \delta, T\}$ ismételt játék, akkor jelöljük $\Gamma(k)$-val, és nevezzük *részjáték*nak azt az ismételt játékot, amelyik a $t = k$ időpontban kezdődik és a T időpontban végződik, egyebekben ugyanaz, mint a $\Gamma = \Gamma(0)$. A $\Gamma = \{G, \delta, T\}$ ismételt játék egy $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ NEP-jét *részjáték tökéletes*nek nevezzük, ha a σ korlátozása a $\Gamma(k)$ játékra a $\Gamma(k)$-nak is NEP-je, minden $k = 0, 1, \ldots, T$-re. Ez a definíció szinte azonos az extenzív játékoknál bevezetett részjáték tökéletességgel, és az elsődleges célja olyan NEP-ek kizárása, amelyek nem hihető fenyegetéseket tartalmaznak.

A stacioner stratégiák között csak „triviális" NEP-ek vannak.

8.2. tétel. *Legyen σ^* a Γ ismételt játék olyan stacioner stratégiaprofilja, hogy a játékosok minden időpontban az $\mathbf{s}^*$ stratégiaprofilt játsszák. Ekkor σ^* pontosan akkor részjáték tökéletes NEP-je Γ-nak, ha $\mathbf{s}^*$ az alapjáték NEP-je.*

Bizonyítás. Lásd a 8.2. feladatot. □

A fenti tételből következik, hogy, ha az alapjátéknak csak egyetlen NEP-je van, akkor az a stratégia, amely minden időpontban ezt írja elő, az egyetlen stacioner stratégia, amely részjáték tökéletes NEP-je az ismételt játéknak.

8.2. Ugró stratégiák

A stacioner stratégiák igazából nem nagyon érdekesek, mert segítségükkel nem lehet olyan kimeneteleket előállítani NEP-ként az ismételt játékban, amelyek minden játékosnak jobbak, mint amit az alapjátékban, minden ismétlés nélkül, el lehet érni.

Az ugró stratégiák ebből a szempontból sokkal érdekesebbek. Ha van egy olyan nem egyensúlyi stratégiaprofil az alapjátékban, amely nagyobb kifizetést ad minden játékosnak, mint amelyet az alapjáték egy NEP-jében el lehet érni, akkor az alábbi „ötletet” lehet alkalmazni: Játssza mindenki azt a stratégiáját, amelyet az alapjátéknak a jobb kifizetést adó, nem egyensúlyi stratégiaprofilja határoz meg, mindaddig, amíg mindenki ezt teszi. Ha ettől legalább egy játékos eltér, akkor ettől kezdve „büntetésképpen” mindenki áttér a NEP-re. Ahhoz, hogy ez az ugró stratégia NEP legyen az ismételt játékban, az kell, hogy a büntetésnek legyen visszatartó ereje, vagyis a „jövő” számítson, a jövőbeli nagyobb kifizetések kompenzálják azt az átmeneti hasznot, amely a hallgatólagos egyetértés felmondásából esetleg keletkezik. Ehhez az kell, hogy a diszkonttényező elég nagy legyen és maradjon elég idő a büntetésre. Biztosan elég idő van a büntetésre, ha az időhorizont végtelen. Erről szól a következő tétel.

8.3. tétel. *Legyen $\Gamma = \{G, \delta, \infty\}$ egy ismételt játék, amelynek a G alapjátékában $\mathbf{s}^*$ egy NEP, $\mathbf{r}$ pedig egy olyan stratégiaprofil, amelyre $f_i(\mathbf{s}^*) < f_i(\mathbf{r})$ minden $i = 1, \ldots, n$ esetén. Ekkor az az ugró stratégia, amely szerint az $\mathbf{r}$ stratégiaprofilt kell játszani mindaddig, amíg a történet csak ezt a stratégiaprofilt tartalmazza, és azonnal át kell térni az $\mathbf{s}^*$-ra, ha a történet tartalmaz legalább egy $\mathbf{r}$-től különböző stratégiaprofilt, részjáték tökéletes NEP, ha*

$$\delta \geq \frac{B_i(\mathbf{r}) - f_i(\mathbf{r})}{B_i(\mathbf{r}) - f_i(\mathbf{s}^*)}\ , \quad i = 1, \ldots, n, \tag{8.1}$$

ahol

$$B_i(\mathbf{r}) = \max_{s_i \in S_i} f_i(s_i, \mathbf{r}_{-i}), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy mindenki az adott ugró stratégiát (röviden US) játssza. Ekkor az i játékos az $f_i(\mathbf{r})$ kifizetést kapja minden időpontban a végtelen időhorizonton és így a kifizetése az ismételt játékban egy végtelen mértani sor összege, vagyis $f_i(\mathbf{r})/(1-\delta)$. Tegyük fel, hogy mindenki az $\mathbf{r}$ szerinti stratégiáit játssza egészen a $t-1$ időpontig, de a t időpontban az i játékos eltér. Minthogy a $t+1$ időponttól kezdve már az $\mathbf{s}^*$ stratégiaprofilt játsszák a játékosok mindörökké, az i játékos kifizetése nem lehet több, mint

$$(1 + \delta\alpha + \delta^2 + \cdots + \delta^{t-1}) f_i(\mathbf{r}) + \delta^t B_i(\mathbf{r}) + (\delta^{t+1} + \delta^{t+2} + \ldots) f_i(\mathbf{s}^*) =$$
$$\frac{1-\delta^t}{1-\delta} f_i(\mathbf{r}) + \delta^t B_i(\mathbf{r}) + \frac{\delta^{t+1}}{1-\delta} f_i(\mathbf{s}^*).$$

Ha ezt összevetjük az US stratégia $f_i(\mathbf{r})/(1-\delta)$ kifizetésével és megoldjuk δ-ra, akkor a (8.1) egyenlőtlenséget kapjuk.

Azt kell még belátnunk, hogy az US stratégiaprofil részjáték tökéletes. Tegyük fel, hogy a részjáték a $t = k$, $(k \geq 1)$ időpontban indul, ahol a történet $\mathbf{h}_k$. Ekkor két eset lehetséges:

1. A $\mathbf{h}_k$ csak az $\mathbf{r}$ stratégia profilokat tartalmazza. Ebben az esetben eddig az időpontig mindig az $\mathbf{r}$ stratégiaprofil valósult meg, és így a k időpontban kezdődő szintén végtelen horizontú játékban az egész játékban alkalmazott US stratégiaprofil korlátozása a részjátékra ugyanaz az US stratégia profil lesz, mivel a részjátékban a 0 időpontban a történet $\mathbf{r}$, a játékosok az $\mathbf{r}$ stratégiaprofilt játsszák mindaddig, amíg valaki el nem tér, ettől való eltérés esetén pedig a „büntető” $\mathbf{s}^*$ stratégiaprofilt.

2. Valaki már eltért az $\mathbf{r}$-től, mielőtt a részjáték megkezdődött volna, és így a részjátékban az induló történet $\mathbf{s}^*$. Ekkor mind az US stratégiaprofil korlátozása a részjátékra, mind pedig a részjátékban definiált US stratégiaprofil ugyanazt írja elő: mindvégig az $\mathbf{s}^*$-ot játszani.

Mindkét esetben az US stratégiaprofil részjáték tökéletes NEP. □

8.4. példa (Fogolydilemma II.)**.** Nézzük azt a végtelen sokszor ismételt játékot, amelynek az alapjátéka a már ismert *Fogolydilemma* (lásd 1.2. példa). Az alapjáték kifizetőfüggvénye:

		2. fogoly	
		N	V
1. fogoly	N	(-2,-2)	(-10,-1)
	V	(-1,-10)	(-5,-5)

Amint tudjuk, ennek a játéknak az egyetlen (domináns) NEP-je a (V, V) stratégiaprofil. Ugyanakkor, a 8.2. tétel alapján, mivel az (N, N) stratégiaprofil ezt szigorúan dominálja, az ismételt játékban elég nagy diszkonttényező mellett az az ugró stratégia, amely szerint mindkét játékos mindaddig játssza az N stratégiát, amíg a másik el nem tér és utána mindketten áttérnek a V-re, részjáték tökéletes NEP.

A diszkonttényező minimumát a (8.1) formulából határozzuk meg. Az ottani jelölést használva:

$$\begin{aligned} f_i(\mathbf{s}^*) &= -5, & \\ f_i(\mathbf{r}) &= -2, & i = 1,2 \\ B_i(\mathbf{r}) &= -1, & i = 1,2 \end{aligned}$$

tehát

$$\delta \geq 1/4.$$

8.5. példa. Tekintsünk egy Bertrand-oligopóliumot termék megkülönböztetéssel, ahol egy vállalat terméke iránti kereslet a saját termék árától és a többi piaci szereplő által kért ártól is függ: ha a saját ár csökken, akkor a kereslet növekszik, ha a konkurensek által kért ár növekszik, akkor ugyancsak növekszik a kereslet, minden egyéb tényező változatlansága mellett, de a saját árnak nagyobb szerepe van, mint a többiekének együttvéve. Tegyük fel, hogy a piacon 3 vállalat van, valamennyien 0 költséggel termelnek és az i vállalat keresleti függvénye a következő:

$$q_i = 100 - 3p_i + \sum_{j \neq i} p_j, \quad i = 1, 2, 3.$$

Ekkor egy periódusban az i vállalat profitja:

$$f_i(\mathbf{p}) = 100p_i - 3p_i^2 + p_i \sum_{j \neq i} p_j, \quad i = 1, 2, 3.$$

Az alapjátékban a vállalatok stratégiahalmazai a nemnegatív árak (felső korlátot nem kötünk ki az árakra), a kifizetőfüggvények pedig a profitfüggvények. Mivel a vállalatok között nincs különbség, a megoldás (a NEP) is szimmetrikus és a vállalatok ugyanazt az árat kérik, termelésük azonos és ugyanakkora profitot realizálnak az egyetlen NEP-ben. Könnyű számolással kapjuk, hogy a NEP-ben $p_i = 25$, $q_i = 75$, $f_i = 1875$ minden i-re. Ha az összprofitot maximalizáljuk, akkor a $p_i = 50$ árak mellett a kereslet $q_i = 50$, amely $f_i = 2500$ profitot ad minden vállalatnak. Ha egy vállalat a $p_i = 50$ ártól eltér, akkor egy periódus alatt a $p_i = \frac{100}{3}$ ár választásával és $q_i = 100$ termeléssel, (feltéve, hogy a másik kettő továbbra is $p_i = 50$-en tartja az árakat) $f_i = \frac{10000}{3}$ profitot tud elérni.

Ha ebből az alapjátékból építünk fel egy ismételt játékot, akkor a (8.1) egyenlőtlenséget használva azt kapjuk, hogy ha a diszkont paraméter $\delta \geq \frac{4}{7}$, akkor az az US, amely szerint mindenki 50-et kér az árujáért, amíg a többiek is ezt teszik, de ha valaki ettől eltér, akkor leszállítja az árat 25-re, részjáték tökéletes NEP az ismételt játékban.

Az ugró stratégia eredményessége többek között azon múlik, hogy marad-e elég idő a hallgatólagos megegyezés alapján játszott stratégiától való eltérést megbüntetni. Egy végtelen időhorizontú ismételt játékban mindig van elég idő. Mi a helyzet véges időhorizont esetén?

8.6. tétel. *Ha a G alapjátéknak csak egyetlen $\mathbf{s}^*$ egyensúlypontja van, akkor a $\Gamma = \{G, \delta, T\}$ ismételt játéknak (T véges) az $\mathbf{s}^*$ stacioner stratégia az egyetlen részjáték tökéletes NEP-je.*

Bizonyítás. A T időpontban egyik játékosnak sem érdeke eltérni az $\mathbf{s}^*$-tól, mivel G legutolsó lejátszásakor már nincs alkalom a büntetésre. De akkor a $T-1$ időpontban sem éri meg egyiknek sem eltérni, és így tovább visszafelé a legelső időpontig.

s^* stacioner stratégia egyértelműsége közvetlen következménye annak, hogy G-nek egyetlen NEP-je van. □

A fenti bizonyításban is az extenzív formában adott játékoknál már megismert visszafelé indukció gondolatmenetét használtuk. Vegyük észre, hogy ha a G alapjátéknak több egyensúlypontja van, akkor a Γ ismételt játéknak lehetnek nem stacioner NEP-jei is, mint ahogy azt a 8.4. példában láttuk is.

Ha az ugró stratégiáknál bonyolultabb stratégiákat is megengedünk, akkor az alapjáték „szinte minden" egyénileg racionális kifizetésvektora előáll, mint az ismételt játék egy részjáték tökéletes NEP-jének kifizetésvektora. A

$$G = \{S_1, \ldots, S_n; f_1, \ldots, f_n\}$$

(alap)játékban az i játékos kifizetését a többiek a

$$v_i = \min_{\mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}} \max_{r \in S_i} f_i(r, \mathbf{s}_{-i}), \tag{8.2}$$

szintre tudják szorítani, feltételezve, hogy a min és max létezik. Ezekből a v_i minmax értékekből összeállíthatunk egy $\mathbf{v}$ vektort. Egy $\mathbf{u}$ vektort a G játék *individuálisan racionális kifizető vektor*ának nevezünk, ha van olyan $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ stratégiaprofil, hogy $\mathbf{u} = (f_1(\mathbf{s}), \ldots, f_n(\mathbf{s}))$ és $\mathbf{u} \geq \mathbf{v}$, ha pedig $\mathbf{u} > \mathbf{v}$, akkor *szigorúan individuálisan racionális kifizető vektor*nak hívjuk. Az $\mathbf{u}$ kifizetésvektort realizáló stratégiaprofilt pedig *(szigorúan) individuálisan racionális stratégiaprofil*nak hívjuk.

Az 1960-as évek óta ismeretesek olyan tételek, amelyek állítása a következőképpen hangzik:

A G alapjáték bizonyos szigorúan individuálisan racionális kifizető vektorai előállíthatók a $\Gamma = \{G, \delta, T\}$ ($T = \infty$ is lehet) ismételt játék egy részjáték tökéletes NEP-jének kifizető vektoraként a G-re, δ-ra és T-re tett bizonyos feltételek mellett. Ezeket a tételeket *néptétel*eknek (folk theorems) szokás nevezni, mivel az első ilyen típusú tétel szerzője és eredete ismeretlen.

A néptételek üzenete világos: szinte minden kooperációval elérhető kimenetelt nemkooperatív körülmények között, egy alkalmas ismételt játék részjáték tökéletes Nash-egyensúlypontjaként is elő lehet állítani. Ezzel magyarázatot kapunk arra is, hogy miért bizonyulnak stabilnak olyan stratégiák sokszor ismételt játékokban, amelyek az alapjátékban nem azok és csak kooperációval (elkötelező szerződések kötésével és betartásával) lennének biztosíthatóak.

Más kérdés az, hogy az ismételt játékban ezek a NEP-ek általában igen bonyolultak, így külön jelentősége van annak, hogy „egyszerű" stratégiákkal lehessen előállítani egy individuálisan racionális kifizetésvektort.

8.3. Automaták és néptételek†

Az ismételt játékok tanulmányozásában általában és a néptételek megfogalmazásában és bizonyításában különösen hasznos, hogy bizonyos stratégiákat és az egyensúlyt az eddigiektől egy kicsit eltérő modell keretében írjunk le. Abból a megjegyzésből indulunk ki, amelyet még az extenzív formában adott játékoknál tettünk a sakkra vonatkozóan. Az összes stratégia számbavétele a praktikus játék szempontjából felesleges, még a redukált normál forma is tartalmaz egy csomó felesleges stratégiát. A sakkjátékost ugyanis csak az érdekli, hogy egy adott állás esetében mit kellene lépni, és amikor már ott tart a játék, nem érdekli, hogy milyen utakon jutott a játék odáig (általában nagyon sok különböző stratégiát követve is eljuthatunk ugyanahhoz az álláshoz, kivéve azokat a nem túl fontos eseteket, amikor háromszori ismétlődésnél a játék döntetlennel véget érhet, vagy ha 50 lépésen keresztül nem történik ütés vagy gyalogtolás, amikor döntetlen az eredmény). A játékos stratégiája abból áll tehát, hogy bármilyen a sakktáblán előforduló esetre, amikor ő van lépésen, egy megengedett lépést választ ki (különböző helyzetnek tekintjük a sakk különleges szabályai miatt azokat az állásokat, amelyeknél lehetséges vagy nem az en passant ütés, vagy a sáncolás). Ha van egy ilyen értelemben vett stratégia, akkor azt egy gép (automata) is le tudja játszani, és ha minden stratégiához hozzárendelünk egy automatát, akkor a stratégiák halmaza a lehetséges automaták halmazából áll és a stratégia választás egy automata kiválasztását jelenti. Ha minden játékos ezt csinálja, akkor a játékot formálisan automaták játsszák le, az intellektuális feladat a megfelelő automata kiválasztása. Ezt a gondolatot alkalmazzuk most végtelen időhorizontú ismételt játékokra. A $G = \{ A_1, \ldots, A_n; f_1, \ldots, f_n\}$ alapjátékban most a stratégiákat cselekvéseknek nevezzük, A a cselekvésprofilok halmaza.

8.7. definíció. A $\Gamma = \{G, \delta, \infty\}$ ismételt játékban az i játékoshoz rendelt automatának (röviden i automatának) az alábbi komponensei vannak:

1. a Q_i állapothalmaz,
2. egy $q_i^1 \in Q_i$ induló állapot,
3. a $\varphi_i : Q_i \to A_i$ output függvény, amely minden állapothoz egy cselekvést rendel,
4. a $\tau_i : Q_i \times A \to Q_i$ átmeneti függvény, amely minden állapot-stratégiaprofil pároshoz egy állapotot rendel.

A játék lefolyása a fenti definíciót és az ott bevezetett jelölést használva a következő: Az i automata az első periódusban a q_i^1 induló állapotban az

$a_i^1 = \varphi_i(q_i^1)$ cselekvést választja. Az összes automata cselekvésválasztása adja az első periódus $\mathbf{a}^1$ cselekvésprofilját. A második periódusban az i automata a $q_i^2 = \tau_i(q_i^1, \mathbf{a}^1)$ állapotba kerül és a játék így folytatódik tovább. A kifizetés az egyes periódusok cselekvésprofiljaihoz tartozó kifizetések δ tényezővel jelenértékre diszkontált összege.

8.8. példa. Tekintsük azt az ismételt játékot, amelyben az alapjáték a *Fogolydilemma* (lásd 1.2. példa).

Nézzük először az egyik (mondjuk az első) játékos „szigorú” stratégiáját: N-et választja mindaddig, amig mindketten N-et választottak és V-t minden egyéb esetben. Ennek a stratégiának a következő automatát feleltetjük meg:

$$\begin{array}{lcl} Q_1 & = & \{N, V\} \\ q_1^1 & = & N \\ \varphi_1(N) & = & N \text{ és } \varphi_1(V) = V \\ \tau_1(N,(N,N)) & = & N \text{ és } \tau_1(X,(Y,Z)) = V, \text{ ha } (X,(Y,Z)) \neq (N,(N,N)) \end{array}$$

Ha a második játékosnak is ezt az automatát feleltetjük meg, akkor a két automata egyike sem fog soha sem vallani.

Vegyük most azt az esetet, amikor az első és a második játékos stratégiái különbözők és ezeket két különböző automata valósítja meg. Az első játékos stratégiája: N-et játszik mindaddig, amíg a második játékos N-et játszik. Amikor a második V-t játszik, akkor három perióduson keresztül V-t, majd utána ismét N-et. Ezt a stratégiát úgy is interpretálhatjuk, hogy az első játékos a második nem kooperatív viselkedését azzal bünteti, hogy valahányszor a második játékos „barátságtalan” és V-t játszik, ő maga is háromszor egymás után V-t játszik függetlenül attól, hogy mit játszik a másik játékos, majd megbocsát, és ismét a barátságos N-et játssza. Az első játékos ezen stratégiáját például az alábbi M_1 automatával lehet megvalósítani:

$$\begin{array}{lcl} Q_1 & = & \{P_1, P_2, P_3, P_4\} \\ q_1^1 & = & N \\ \varphi_1(P_1) & = & N, \\ \varphi_1(P_2) & = & V, \\ \varphi_1(P_3) & = & V, \\ \varphi_1(P_4) & = & V, \\ \tau_1(P_1,(N,N)) & = & P_1, \\ \tau_1(P_1,(N,V)) & = & P_2, \\ \tau_1(P_1,(V,N)) & = & P_1, \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
\tau_1(P_1,(V,V)) & = & P_2, \\
\tau_1(P_2,(N,N)) & = & P_3, \\
\tau_1(P_2,(N,V)) & = & P_3, \\
\tau_1(P_2,(V,N)) & = & P_3, \\
\tau_1(P_2,(V,V)) & = & P_3, \\
\tau_1(P_3,(N,N)) & = & P_4, \\
\tau_1(P_3,(N,V)) & = & P_4, \\
\tau_1(P_3,(V,N)) & = & P_4, \\
\tau_1(P_3,(V,V)) & = & P_4, \\
\tau_1(P_4,(N,N)) & = & P_1, \\
\tau_1(P_4,(N,V)) & = & P_1, \\
\tau_1(P_4,(V,N)) & = & P_1, \\
\tau_1(P_4,(V,V)) & = & P_1.
\end{array}$$

Vegyük észre, hogy a stratégia megvalósításához M_1-nek legalább négy állapotára van szükség (ennyit is használtunk) és olyan esetekre is definiáltuk az állapotfüggvényt, amelyek a választott stratégia mellett soha sem fordulhatnak elő. Például a $\tau_1(P_1,(V,N)) = P_1$ „felesleges”, csak az automata definíciójához való ragaszkodás miatt adtuk meg.

A második játékos stratégiája „mohó”. N-nel indul és valahányszor az első játékos N-et játszik, a következő periódusban ő V-t, ha pedig az első V-t, akkor ő N-et. Például, az alábbiakban definiált M_2 automata is ezt a stratégiát valósítja meg:

$$\begin{array}{lcl}
Q_2 & = & \{R_1, R_2\} \\
q_2^1 & = & N \\
\varphi_2(R_1) & = & N, \\
\varphi_2(R_2) & = & V, \\
\tau_2(R_1,(N,N)) & = & R_2, \\
\tau_2(R_1,(N,V)) & = & R_2, \\
\tau_2(R_1,(V,N)) & = & R_1, \\
\tau_2(R_1,(V,V)) & = & R_1, \\
\tau_2(R_2,(N,N)) & = & R_2, \\
\tau_2(R_2,(N,V)) & = & R_2, \\
\tau_2(R_2,(V,N)) & = & R_1, \\
\tau_2(R_2,(V,V)) & = & R_1.
\end{array}$$

A játék ezek után a két automata között hat periódusból álló ciklusokban folyik. Egy ciklust az alábbi táblázattal lehet megadni:

periodus	M_1 állapota	M_2 állapota	kimenetel	kifizetések
1	P_1	R_1	N, N	$(-2, -2)$
2	P_1	R_2	N, V	$(-10, -1)$
3	P_2	R_2	V, V	$(-5, -5)$
4	P_3	R_1	V, N	$(-1, -10)$
5	P_4	R_1	V, N	$(-1, -10)$
6	P_1	R_1	N, N	$(-2, -2)$

A fenti példa jól szemléltette, hogy az automaták „Markov-stratégiákat" valósítanak meg, amennyiben az átmenet függvény értékei csak a megelőző állapotpárostól és az ehhez tartozó cselekvéspártól függenek. Ha az állapotok halmaza véges, akkor szükségképpen lesz ciklikus a játék lefolyása. Persze nem minden ismételt játékot lehet véges állapothalmazú automatákkal lejátszatni.

A Γ ismételt játékban minden játékos minden stratégiájához hozzárendelünk egy automatát. Jelöljük az i játékos lehetséges automatáinak halmazát M_i-vel, $i = 1, \ldots, n$. Az ismételt játékot a játékosok úgy játsszák le, hogy minden játékos választ egy automatát a lehetséges automatáinak halmazából, a kifizetést pedig az eredeti Γ játék paraméterei egyértelműen meghatározzák. Nevezzük az így definiált játékot *automata játéknak* és jelöljük Γ_a-val.

Egy Γ_a automata játékban nemcsak az érdekelheti a játékosokat, hogy a Nash-egyensúly mekkora kifizetéseket ad nekik, hanem az is, hogy azok a stratégiák, amelyekkel ezt el lehet érni milyen bonyolultak. Bonyolult stratégiákat realizáló automatákat nehéz kivitelezni és működtetni. Az automatamodell azért is előnyös, mert egy stratégia bonyolultságát elég jól lehet jellemezni az automata állapotainak számával. Ezt költségként akár a kifizetőfüggvénybe is be lehet építeni. Legegyszerűbb, ha lineáris függvényt alkalmazunk. Ha β_i az i játékos $m_i \in M_i$ automatájának egy állapotához tartozó egységköltség, akkor a $(m_1, \ldots, m_n)$ stratégia (automata) profilhoz tartozó kifizetést a $c_i(\mid Q_i \mid) = \beta_i \mid Q_i \mid$ költséggel csökkentjük, ahol $\mid Q_i \mid$ az m_i automata lehetséges állapotainak száma. Természetesen más kifizetőfüggvények (költségfüggvények) is elképzelhetők, például az úgynevezett lexikografikus kifizetőfüggvény, amely csak az azonos eredeti kifizetéseket adó egyensúlypontok halmazán minimalizálja az állapotok számát.

Az automata játékok viszonylag egyszerű néptételek megfogalmazását és bizonyítását teszik lehetővé. Tekintsünk egy olyan $\Gamma = \{G, \delta, \infty\}$ ismételt játékot, amelyben az alapjáték $G = \{\ A_1, \ldots,\ A_n; f_1, \ldots, f_n\}$ és feltesszük, hogy a kifizetések felülről korlátosak. A játékot automaták játsszák. A néptétel a Γ_a automata játékra vonatkozik.

Legyen

$$v_i \;=\; \min_{\mathbf{a}_{-i}\in A_{-i}} \max_{a_i\in A_i} f_i(a_i, \mathbf{a}_{-i}).$$

Jelöljük $\mathbf{p}_{-i} \in A_{-i}$-vel a fenti minimumfeladat egy megoldását, $b_i(\mathbf{a}_{-i})$-vel pedig az i játékosnak az $\mathbf{a}_{-i}$ csonka stratégiaprofilra adott egyik legjobb válaszát (feltesszük, hogy ezek mind léteznek). N jelöli a játékosok halmazát.

8.9. tétel. *Legyen* $\mathbf{a}^*$ *egy szigorúan individuálisan racionális cselekvésprofilja a* $G = \{A_1, \dots, A_n; f_1, \dots, f_n\}$ *alapjátéknak . Tegyük fel, hogy a kifizetések felülről korlátosak és vannak olyan szigorúan individuálisan racionális* $\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^n$ *cselekvésprofilok, hogy minden* $i = 1, \dots, n$*-re fennáll, hogy*

$$\begin{aligned} f_i(\mathbf{a}^i) \;&<\; f_i(\mathbf{a}^*) \\ f_i(\mathbf{a}^i) \;&<\; f_i(\mathbf{a}^j) \text{ minden } j \neq i\text{-re.} \end{aligned}$$

Ekkor van olyan $\delta' < 1$*, hogy minden* $\delta' < \delta < 1$ *esetén a* $\Gamma = \{G, \delta, \infty\}$ *ismételt játéknak (pontosabban a* Γ_a *automata játéknak) van olyan részjáték tökéletes NEP-je, amelyben minden periódusban az* $\mathbf{a}^*$ *cselekvésprofil realizálódik.*

Bizonyítás. A bizonyítás konstruktív, vagyis megfelelő automatákat konstruálunk, amelyek elég nagy diszkontfaktor esetén semelyik játékosnak sem teszik kifizetődővé, hogy egy másik automatát válasszon, feltéve, hogy a többiek nem változtatnak.

Kényelmi szempontból bevezetjük az $a_i^0 = a_i^*$ jelölést, $i \in N$. Az i játékos automatáját a következőképpen definiáljuk (L egy a későbbiekben meghatározandó pozitív egész szám):

Állapot halmaz: $\{C(j) \mid j \in \{0\} \cup N\} \cup \{P(j,t) \mid j \in N \text{ és } 1 \le t \le L\}$.

Kezdeti állapot: $C(0)$.

Output függvény: $C(j)$ állapotban válasszuk a_i^j-t. A $P(j,t)$ állapotban válasszuk a $(\mathbf{p}_{-j})_i$ cselekvést, ha $j \neq i$ és $b_i(\mathbf{p}_{-i})$-t, ha $i = j$.

Átmenet függvény: Ha $\mathbf{a} \in A$, akkor:

- ha $C(j)$-ben voltunk, maradjunk $C(j)$-ben, kivéve, ha pontosan egy játékos (mondjuk k) eltért a_k^j-tól, amikor is menjünk át $P(k, L)$-be,
- ha $P(j,t)$-ben voltunk és pontosan egy játékos (mondjuk $k \neq j$) eltér $(\mathbf{p}_{-j})_k$-tól, akkor menjünk $P(k, L)$-be, minden egyéb esetben menjünk $P(j, t-1)$-be ha $t \geq 2$ és $C(j)$-be, ha $t = 1$.

Most meghatározzuk a δ' és L értékeket. Jelölje M a kifizetések egy felső korlátját. Legyen L egy elég nagy pozitív egész szám ahhoz, hogy

$$M - f_i(\mathbf{a}^j) < L(f_i(\mathbf{a}^j) - v_i)$$

fennálljon minden $i \in N$-re és $j \in \{0\} \cup N$-re. A fenti egyenlőtlenség jobb oldalán $f_i(\mathbf{a}^j) - v_i > 0$, mivel $f_i(\mathbf{a}^i) < f_i(\mathbf{a}^j)$ minden $j \neq i$-re és $\mathbf{a}^i$ szigorúan individuálisan racionális, így L mindig létezik.

Nézzük most, hogy mi történik, ha az i játékos a $C(j)$ állapotban eltér és nem az a_i^j stratégiát játssza. Ekkor az eltéréskor legfeljebb M-et ér el, majd mivel utána átmegyünk a $P(k, L)$ állapotba, a legjobb esetben is L perióduson keresztül v_i lesz a kifizetés, majd $f_i(\mathbf{a}^j)$ mindörökké. A δ diszkonttényezőt használva az i játékos kifizetése a legjobb esetben is

$$M + \sum_{k=2}^{L+1} \delta^{k-1} v_i + \sum_{k=L+2}^{\infty} \delta^k f_i(\mathbf{a}^j).$$

Ha nem tér el, akkor mindig $f_i(\mathbf{a}^j)$-t kap, vagyis a diszkontált kifizetése az egész időhorizontra

$$f_i(\mathbf{a}^j) + \sum_{k=2}^{L+1} \delta^{k-1} f_i(\mathbf{a}^j) + \sum_{k=L+2}^{\infty} \delta^k f_i(\mathbf{a}^j).$$

Így akkor nem éri meg eltérni, ha

$$M - f_i(\mathbf{a}^j) < \sum_{k=2}^{L+1} \delta^{k-1} (f_i(\mathbf{a}^j) - v_i) < L(f_i(\mathbf{a}^j) - v_i)$$

ami mindig fennáll, ha δ elég közel van 1-hez.

Ha az i játékos a $P(i, t)$ állapotban akarna eltérni, akkor a számára előírt $b_i(\mathbf{p}_{-i})$ legjobb feleletnél nem tudna jobbat találni, ezért elég azt az esetet vizsgálnunk, amikor az i játékos a $P(j, t)$ állapotban, $j \neq i$, akarna eltérni. Ekkor, amikor eltér maximum M-et kap, majd L perióduson keresztül v_i -t és utána legjobb esetben is (ha többé nem tér el) $f_i(\mathbf{a}^i)$-t. Így a diszkontált kifizetése a teljes időhorizonton a következő:

$$M + \sum_{k=1}^{L-1} \delta^{k-1} v_i + \sum_{k=L}^{\infty} \delta^{k-1} f_i(\mathbf{a}^i).$$

Ha nem tér el, akkor L perióduson keresztül az $f_i(b(\mathbf{p}_{-j}), \mathbf{p}_{-j})$ kifizetés jut neki, majd a fennmaradó periódusokban $f_i(\mathbf{a}^j)$. Tehát az egész időhorizonton a diszkontált kifizetés:

$$f_i(b(\mathbf{p}_{-j}), \mathbf{p}_{-j}) + \sum_{k=1}^{L-1} \delta^{k-1} f_i(b(\mathbf{p}_{-j}), \mathbf{p}_{-j}) + \sum_{k=L}^{\infty} \delta^{k-1} f_i(\mathbf{a}^j).$$

Ennek nagyobbnak kell lenni annál, amit eltérés esetén kaphat az i játékos, vagyis fenn kell állni az

$$M + \sum_{k=1}^{L-1} \delta^{k-1} v_i + \sum_{k=L}^{\infty} \delta^{k-1} f_i(\mathbf{a}^i) < f_i(b(\mathbf{p}_{-j}), \mathbf{p}_{-j}) + \sum_{k=1}^{L-1} \delta^{k-1} f_i(b(\mathbf{p}_{-j}), \mathbf{p}_{-j}) + \sum_{k=L}^{\infty} \delta^{k-1} f_i(\mathbf{a}^j)$$

egyenlőtlenségnek, amelyet átrendezve kapjuk az

$$M - f_i(b(\mathbf{p}_{-j}), \mathbf{p}_{-j}) + \sum_{k=1}^{L-1} \delta^{k-1}(v_i - f_i(b(\mathbf{p}_{-j}), \mathbf{p}_{-j})) < \sum_{k=L}^{\infty} \delta^{k-1}(f_i(\mathbf{a}^j) - f_i(\mathbf{a}^i))$$

egyenlőtlenséget. Mivel

$$M - f_i(b(\mathbf{p}_{-j}), \mathbf{p}_{-j}) + \sum_{k=1}^{L-1} \delta^{k-1}(v_i - f_i(b(\mathbf{p}_{-j}), \mathbf{p}_{-j})) \leq \sum_{k=1}^{L} \delta^{k-1}(M - f_i(b(\mathbf{p}_{-j}), \mathbf{p}_{-j})),$$

ezért ha

$$\sum_{k=1}^{L} \delta^{k-1}(M - f_i(b(\mathbf{p}_{-j}), \mathbf{p}_{-j})) < \sum_{k=L}^{\infty} \delta^{k-1}(f_i(\mathbf{a}^j) - f_i(\mathbf{a}^i))$$

fennáll, akkor nem érdemes eltérnie az i játékosnak.

A fenti egyenlőtlenségnek a $\delta = 1$ esetben a bal oldala véges, míg a jobb oldala végtelen, amiből az következik, hogy van olyan 1-hez közeli δ, hogy az egyenlőtlenség fennálljon.

Ezzel beláttuk, hogy semmilyen állapotban sem érdemes egyetlen játékosnak sem eltérni a megadott stratégiáktól, vagyis ezek a stratégiák (automaták) NEP-et alkotnak.

A részjáték tökéletesség azonnal adódik abból, hogy a NEP stratégiaprofil Markov-stratégiaprofil (lásd a 8.8. feladatot). □

A bizonyítás menetét jobban megértjük akkor, ha némi nem formális magyarázatot is fűzünk hozzá. Az automatáknak háromféle állapotuk van. A $C(0)$ állapotban mindenki a „megcélzott" $\mathbf{a}^*$ cselekvésprofilnak megfelelő cselekvést választja. A $C(j)$, $j \neq 0$, állapot a j játékost büntető büntetéssorozat utáni „megnyugvás" állapota, amikor a játszandó akcióprofil $\mathbf{a}^j$. A $P(j,t)$ egy olyan állapot, amikor a j játékos büntetéséből (vagyis kifizetésének a v_j szinten tartásából) még t periódus van hátra. Egy büntetéssorozat L periódusból áll. Ha az i játékos a büntetés fázisában eltér, amikor a j játékost kellene büntetnie, akkor az i játékost büntető sorozatra térünk át, amelynek elmúltával örökre megmaradhat egy „enyhe" büntetés, mivel a $C(i)$ állapotban kötünk ki, ahol az i játékos $f_i(\mathbf{a}^i)$ kifizetése kisebb, mint a $C(j)$ állapotban megszerezhető $f_i(\mathbf{a}^j)$. Röviden és frappánsan azt lehet mondani, hogy ez a néptétel azon alapszik, hogy büntetjük a célállapottól eltérőket, és büntetjük a büntetést szabotálókat. Ez utóbbit úgy is be lehet állítani, hogy jutalmazzuk a büntetést engedelmesen végrehajtókat.

A 8.9. (nép)tételben az állapotokat a cselekvésprofilok helyett lehetne a kifizetésprofilokkal is jellemezni, természetesen megkövetelve egy olyan mechanizmus létezését, amely egy adott kifizetésprofilt realizálni tud. Ha minden kifizetésprofil a játékosok cselekvésprofiljaival előállítható, akkor a változtatás csak formai. Ha azonban megengedjük például, hogy kifizetésprofilok tetszőleges konvex lineáris kombinációja is lehetséges kifizetésprofil legyen, akkor bővülnek a lehetőségek, de szükség van valamilyen mechanizmusra (például egy játékvezetőre), aki sorsolással választja ki a kívánt kifizetésprofilt és mindenhol át kell térni a várható kifizetésekre.

A tétel feltételei között van egy lényeges, nevezetesen a kívánt tulajdonságú $\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^n$ cselekvésprofilok létezését megkívánó, feltétel. Ez a feltétel még akkor sem teljesül automatikusan, ha az alapjáték egy véges játék kevert bővítése. Anélkül, hogy a részletekbe mennénk, azt lehet mondani, hogy ebben az esetben elég gyenge feltételek mellett lehet biztosítani ennek a feltételnek a teljesülését, ha a lehetséges kifizetésprofiloknak a „tiszta" kifizetések konvex burkát tekintjük. Ilyen néptételre találhatunk példát [Forgó et al. (1999)]-ban.

8.4. Feladatok

8.1. feladat. Írjuk fel a 8.1. példa ismételt játékát normál formában, és állapítsuk meg a NEP-jeit.

8.2. feladat. Bizonyítsuk be a 8.2. tételt.

8.3. feladat. Adjunk példát arra, hogy egy ismételt játékot nem lehet véges állapothalmazú automatákkal lejátszani.

8.4. feladat. Tekintsük azt a végtelen időhorizontú ismételt játékot, amelyben az alapjáték az alábbi bimátrix-játék (*Gyáva nyúl*) kevert bővítése:

		Pál	
		K	N
Péter	K	(6,6)	(2,7)
	N	(7,2)	(0,0)

Adjunk meg egy olyan ugró stratégiaprofilt, amely legalább 6 kifizetést biztosít mindkét játékosnak elég nagy diszkontráta esetén.

8.5. feladat. Tekintsük azt a végtelen időhorizontú játékot, amelyben az alapjáték egy olyan Cournot-duopólium, amelyben a költségmentesen termelő vállalatok termékének piacán az inverz keresleti függvény $p(q_1, q_2) = 1 - q_1 - q_2$. Milyen diszkontráta mellett realizálható ugró stratégiapárossal mindkét játékos számára legalább $\frac{1}{8}$ profit?

8.6. feladat. Adjunk meg a 8.8. példában egy M_1-től különböző, de az M_1 automatával megegyező stratégiát (az első játékos stratégiája) játszó automatát.

8.7. feladat. Adjunk meg a 8.8. példában egy M_2-től különböző, de az M_2 automatával megegyező stratégiát (a második játékos stratégiája) játszó automatát.

8.8. feladat. Mutassuk meg, hogy ha egy Markov-stratégiákból álló stratégiaprofil NEP, akkor az részjáték tökéletes NEP.

8.9. feladat. Adjunk példát arra, hogy egy részjáték tökéletes NEP nem Markov-stratégiaprofil.

A. függelék

Feladatmegoldások

A.1. megoldás. Az 1.3. feladat megoldása:

1. Nincs szigorúan domináló stratégia.
2. Ha (bármelyik) játékos 0 vagy 100 Ft-ot kér, akkor az gyengén dominált stratégia.
3. Nincs.

A.2. megoldás. A 2.17. feladat megoldása:

1. Mindketten a szakasz felezőpontjában.
2. Szimmetrikusan a végpontoktól 1/4 távolságra.
3. Nincs.

A.3. megoldás. A 2.18. feladat megoldása:
$q_1^* = q_2^* = \dfrac{1}{\sqrt{8}}$, a profitot a profitfüggvénybe való behelyettesítéssel kapjuk.

A.4. megoldás. A 3.9. feladat megoldása:
Az egyetlen részjáték tökéletes NEP-ben az első napon A megtart magának $100 - 100\beta(1-\alpha)$ forintot és felajánl B-nek $100\beta(1-\alpha)$ forintot, amit ő elfogad.

A.5. megoldás. Az 5.8. feladat megoldása.
Tekintsük azt az **A** mátrixjátékot, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Itt a sorjátékos harmadik akciója racionalizálható, mert az első két akció semmilyen konvex kombinációja sem dominálja szigorúan. Ugyanakkor a játéknak egyetlen korrelált egyensúlya van:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

amelyben a harmadik akció nulla valószínűséggel szerepel.

A.6. megoldás. A 6.1. feladat megoldása:

Indirekten tegyük fel, hogy az igazmondás nem BNE. Így van olyan k játékos aki az e_k értékelése helyett egy $b_k \neq e_k$ értéket licitál. Ha $b_k < e_k$, akkor ha ehelyett e_k-t licitál, akkor növekszik az aukció megnyerésének valószínűsége, miközben a kifizetendő összeg nem nő, hiszen az a második legmagasabb licittől függ. Ekkor tehát növekszik a várható haszon is, hiszen a kifizetendő összeg nem lehet nagyobb, mint az értékelés. Ha $b_k > e_k$, akkor érdemes ehelyett e_k-t licitálnia, hiszen így pont azokban az esetekben nem nyeri meg az aukciót (a b_k licithez képest), amikor a b_k licitnél az értékelésénél többet kellene kifizetnie. Tehát ekkor is növekszik a várható haszon. Ellentmondásra jutottunk, az igazmondás BNE. Hasonló meggondolással belátható, hogy az igazmondás az egyetlen BNE.

A.7. megoldás. A 6.2. feladat megoldása:

1. $$q_i(c_i) = \frac{2 - 3c_i + \frac{a+m}{2}}{6}, \quad i = 1, 2$$

2. $m < 1$.

A.8. megoldás. A 8.4. feladat megoldása:

A kevert NEP kifizetései $(4\frac{2}{3}, 4\frac{2}{3})$, amihez képest a (K, K) profil Pareto-i értelemben javítás, így $\delta > \frac{3}{7}$ esetben az az ugró stratégia, amelyben a játékosok a (K, K) stratégiapárost játsszák mindaddig, amíg legalább az egyik ettől eltér, onnan kezdve viszont az alapjáték kevert egyensúlyi stratégiapárosát, egy részjáték tökéletes NEP.

A.9. megoldás. A 8.5. feladat megoldása:

$\delta > \frac{9}{17}$.

B. függelék

Fixponttételek

Ebben a részben néhány olyan tételt mondunk ki, amelyek fontos szerepet játszanak a könyvben, és általában nem képezik anyagát a sztenderd egyetemi analízis kurzusoknak. A bizonyításokat nem tárgyaljuk bonyolultságuk és hosszúságuk miatt, de az érdeklődő olvasó számára pontos referenciákat adunk, ahol kellő türelemmel és figyelemmel végig lehet követni a bizonyításokat.

B.1. tétel (Brouwer-fixponttétel)**.** *Legyen* $K \subseteq \mathbb{R}^n$ *nem üres, konvex, kompakt halmaz,* $f : K \to K$ *folytonos függvény. Ekkor van olyan* $\mathbf{x} \in K$*, hogy* $\mathbf{x} = f(\mathbf{x})$*.*

A következő tétel megfogalmazásához szükségünk van egy definícióra.

B.2. definíció. Legyen $S \subseteq \mathbb{R}^n$ nem üres halmaz és $f : S \to 2^S$ halmazértékű leképezés. Az f-et felülről félig folytonosnak nevezzük, ha a leképezés $G_f = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{x} \in S,\ \mathbf{y} \in f(\mathbf{x})\}$ gráfja zárt.

B.3. tétel (Kakutani-fixponttétel)**.** *Legyen* $K \subseteq \mathbb{R}^n$ *nem üres, konvex, kompakt halmaz, és* F *olyan felülről félig folytonos leképezés, amely* K *minden pontjához a* K *egy nem üres, zárt, konvex halmazát rendeli. Ekkor van olyan* $\mathbf{x} \in K$*, hogy* $\mathbf{x} \in F(\mathbf{x})$*.*

C. függelék

A Gale-Nikaido–tétel

C.1. tétel (Gale és Nikaido)**.** *Legyen* $K \subseteq \mathbb{R}^n$ *nem üres, konvex, nyílt halmaz,* $f : K \to \mathbb{R}^n$ *folytonosan differenciálható függvény, amelynek a* $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ *Jacobi-mátrixára igaz, hogy* $\mathbf{J}(\mathbf{x}) + \mathbf{J}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})$ *negatív definit minden* $\mathbf{x} \in K$*-ra. Ekkor minden* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$*-ra,* $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ *esetén* $f(\mathbf{x}) \neq f(\mathbf{y})$*.*

Irodalomjegyzék

[Aliprantis és Border (1999)] Aliprantis, C. D., K. C. Border *Infinite Dimensonal Analysis, A Hitchhiker's Guide*, Springer-Verlag, (1999)

[Allais (1953)] Allais, M., *Le comportement de l'homme rationnel devant le risqué critique des postulates et axiomes de l'école Americain*, Econometrica **21**, (1953), 503–546.

[Aumann (1959)] Aumann, R., *Acceptable points in general cooperative n-persons game*, in Contributions to Game Theory IV, Annals of Mathematics Study **40** (R. D. Luce és A. W. Tucker, szerkesztők) Princeton University Press, Princeton NJ., 287–324. (1959)

[Bertrand (1883)] Bertrand, J., *Théorie Mathématique de la Richesse Social*, Journal des Savants (1883), 499–508.

[Bondareva (1963)] Bondareva, O. N., *Some applications of linear programming methods to the theory of cooperative games*, Problemi Kibernyetiki **10**, (1963), 119–139.

[Border (1983)] Border, K., *Fixed point theorems with application to economic and game theory*, Cambridge University Press, Cambridge UK, (1983)

[Borel (1921)] Borel, E., *La theorie du jeu et les equations integrales a noyau symetrique*, Comptes Rendus Hebdomadaires des Scéances de l'Académie des Sciences (Paris), 173, (1921), 1304–1308.; Angol nyelven: *The Theory of Play and Integral Equations with Skew Symmetric Kernels*, Econometrica **21**, (1953), 101– 115.

[Brouwer (1912)] Brouwer, L.E.J., *Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten*, Mathematische Annalen **71**, (1912), 97-115.

[Cournot (1838)] Cournot, A., *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses*, (1838); Angol nyelven: *Researches into the*

Mathematical Principles of the Theory of Wealth, New York, Macmillan, (1897)

[Forgó et al. (1999)] Forgó, F. J. Szép, F. Szidarovszky, *Introduction to the theory of games: concepts, methods, applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1999)

[Forgó és Zalai (2003)] Forgó F., Zalai E., *Neumann János hozzájárulása a játékelmélethez és a matematikai közgazdaságtanhoz*, Ki volt Igazából Neumann János? 99–137. Nemzeti Tankönyvkiadó, (2003)

[Friedman (1977)] Friedman, J. W., *Oligopoly and the theory of games*, North-Holland, Amsterdam, (1977)

[Friedman (1989)] Friedman, J. W., *Game theory with applications to economics*, Oxford University Press, Oxford, (1989)

[Fudenberg és Tirole (1998)] Fudenberg, D., J. Tirole, *Game theory*, The MIT Press, Cambridge, Mass. (1998)

[Gale és Nikaido (1965)] Gale, D., H. Nikaido, *The Jacobian Matrix and the Global Univalence of Mappings*, Mathematische Annalen **159**, (1965) 81–93.

[Gibbons (2005)] Gibbons, R., *Bevezetés a játékelméletbe*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, (2005)

[Harsányi (1967-68)] Harsányi J., *Games with incomplete information played by Bayesian players part I., II., III.*, Management Science **14**,(1967-1968), 159–182., 320–334., 486–502.

[Harsányi (1973)] Harsányi J., *Games with randomly disturbed payoffs: A new rationale for mixed-strategy equilibrium points*, International Journal of Game Thoery **2**, (1973),1–23.

[Hotelling (1929)] Hotelling, H., *Stability of Competition*, Economic Journal **39**, (1929), 41–57.

[Kakutani (1941)] Kakutani, S., *A generalization of Brouwer's fixed point theorem*, Duke Journal of Mathematics **8**, (1941), 457-459.

[Kahnemann és Tverski (1979)] Kahnemann, D., A., Tverski, *Prospect Theory: An Analysis of Decision under Uncertainty*, Econometrica **47**, (1979), 263–291.

[Kalmár (1928-29)] Kalmár, L., *Zur Theorie der abstracten Spielen*, Acta Litterarum ac Scientiarum, Regiae universitatis Hungaricae Francisco–Josephianae. Sectio Scientiarum Mathematicarum. Szeged, **IV**, (1928–29), 65–85.

[König (1927)] König, D., *Über eine Schlussweise aus dem endlichen ins unendliche*, Acta Litterarum ac Scientiarum, Regiae universitatis Hungaricae Francisco–Josephianae. Sectio Scientiarum Mathematicarum. Szeged, **III**, (1927), 121–130.

[Kuhn (1953)] Kuhn, H. W., *Extensive games and the problem of information*, in Kuhn, H. W, Tucker, A.W. (ed.) Contributions to the theory of games II., Princeton University Press, Princeton New Jersey, (1953).

[Leonard (1995)] Leonard, R. I., *From Parlor Games to Social Science: von Neumann, Morgenstern and the Creation of Game Theory 1928–1944*, Journal of Economic Literature **33**, (1995), 730–769.

[Lucas (1968)] Lucas, W., *A Game with No Solution*, Bulletin of American Mathematical Society **74**, (1968), 237–239.

[Mas-Colell et al. (1995)] Mas-Colell, A., M. D. Whinston, J. R. Green, *Microeconomic Theory*, New York, Oxford University Press (1995)

[Maynard-Smith (1974)] Maynard-Smith, J., *The Theory of Games and the Evolution of Animal Conflict*, Journal of Theoretical Biology **47**, (1974), 209–221.

[Nash (1950)] Nash, J.F. Jr., *Equilibrium points in n-person games*, Proceedings of the National Academy of Sciences USA **36** (1950), 48-49.

[Nash (1951)] Nash, J.F. Jr., *Noncooperative games*, Annals of Mathematics **54**, (1951) 286–295.

[Neumann (1965)] Neumann, J., *Válogatott előadások és tanulmányok*, Bp., KJK, (1965)

[Nikaido és Isoda (1955)] Nikaido, H., K. Isoda, *Note on noncooperative convex games*, Pacific Journal of Mathematics **5**, (1955) 807–815.

[Osborne és Rubinstein (1994)] Osborne, M. J., A. Rubinstein, *A course in game theory*, The MIT Press, Cambridge, Mass. (1994)

[Peleg és Tijs (1996)] Peleg, B., S. Tijs, *The consistency principle for games in strategic form*, International Journal of Game Theory **25**, (1996),13–34.

[Rosen (1965)] Rosen, J.B., *Existence and uniqueness of equilibrium points for concave n-person games*, Econometrica **33**, (1965) 520–534.

[Rubinstein (1982)] Rubinstein, A., *Perfect Equilibrium in a Bargaining Model*, Econometrica **50**, (1982), 97–110.

[Selten (1965)] Selten, R., *Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfragetragheit*, Zeitschrift für Gesamte Staatswissenschaft **121**, (1965), 301-324.

[Selten (1975)] Selten, R., *Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games*, International Journal of Game Thoery **4**, (1975),25–55.

[Selten (1978)] Selten, R., *The Chain Store Paradox*, Theory and Decision **9**, (1978), 127–159.

[Shapley (1953)] Shapley, L., *A Value for n-Person Games*, Contributions to the Theory of Games Volume II (Annals of Mathematical Studies **28**, szerk.: Kuhn, H.W.–Tucker, A.W.) 307–317. (1953)

[Shapley (1967)] Shapley, L, S., *On Balanced Sets and Cores*, Naval Research Logistic Quarterly **14**, (1967), 453–460.

[Schelling (1960)] Shelling, T. C., *The Strategy of Conflict*, Cambridge, MA, Harvard University Press (1960)

[Simonovits (2000)] Simonovits, A., *Bevezetés a játékelméletbe: vázlat*, BME Matematikai Intézet, (2000).

[Szép és Forgó] Szép, J., Forgó, F., *Bevezetés a játékelméletbe*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, (1974)

[Tirole (1988)] Tirole, J., *The Theory of Industrial Organization*, Cambridge, MA, MIT Press (1988)

[Varian (1992)] Varian, H. R., *Macroeconomic Analysis*, 3rd edition, New York, Norton (1992)

[Varian (2001)] Varian, H. R., *Mikroökonómia középfokon*, Bp. KJK–Kerszöv, (2001) [Vickrey (1961)] Vickrey, W. *Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders*, Journal of Finance **16**, (1961), 8–37.

[Neumann és Morgenstern (1944)] von Neumann, J., O. Morgenstern, *Theory of games and economic behavior*, Princeton University Press, Princeton New Jersey, (1944).

[Neumann (1928)] von Neumann, J., *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*, Mathematische Annalen **100**, (1928), 295-320.; Magyar nyelven: [Neumann (1965)], 121–156.

[Weibull (1995)] Weibull, J. W., *Evolutionary Game Theory*, Cambridge MA, MIT Press (1995)

[Zermelo (1913)] Zermelo, E., *Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schaschspiels*, Proceeding of the Fifth International Congress of Mathematicians, Cambridge, **II**, (1913) 501–504.