Kooperatív játékelmélet

(elektronikus jegyzet)[1]

Forgó Ferenc – Pintér Miklós – Simonovits András – Solymosi Tamás

2006. november 30.

[1]Ezen munka az OTKA T046194 pályázat támogatásával készült.

Tartalomjegyzék

I. Kooperatív játékok **5**

1. Játékok koalíciós formában **7**

1.1. Bevezető példák 8
1.1.1. Feladatok 13
1.2. Játéktípusok 14
1.2.1. Szuperadditív játékok 16
1.2.2. Monoton, szimmetrikus, egyszerű játékok 19
1.2.3. Konvex játékok 21
1.2.4. Feladatok 22
1.3. Kifizetések 23
1.3.1. Elosztások közötti dominancia 28
1.3.2. Feladatok 29

2. A mag **31**

2.1. A mag és a kiegyensúlyozottság 33
2.1.1. Feladatok 37
2.2. Minimális kiegyensúlyozott rendszerek 38
2.2.1. Feladatok 39
2.3. Konvex játékok magja 39
2.3.1. Feladatok 44
2.4. Piacjátékok és a teljes kiegyensúlyozottság 45
2.4.1. Feladatok 48

3. Stabil halmazok **51**

3.1. Háromszemélyes példák 54
3.2. Eredmények és érdekességek 57
3.3. Konvex játékok stabil halmazai 58
3.4. Feladatok 59

4. A Shapley-érték **61**
4.1. Létezés és egyértelműség 61
4.2. Egy költségelosztási alkalmazás 69
4.3. Az Aumann–Shapley árak 77
4.4. Feladatok 78

5. A nukleolusz **81**

6. Kétszemélyes kooperatív játékok **87**
6.1. Feladatok 91

I. rész

Kooperatív játékok

1. fejezet

Játékok koalíciós formában

A játékosok halmaza legyen (továbbra is) a nemüres, véges N halmaz, elemeit legtöbbször csak „megszámozzuk”, azaz $N = \{1, \ldots, n\}$. A játékosok egy $S \subseteq N$ halmazát *koalíciónak* hívjuk, speciálisan, az N a *nagykoalíció*, az $\emptyset$ pedig az *üres koalíció*. Hacsak külön nem kötjük ki, mindig megengedjük, hogy a játékosok bármelyik társulása, azaz 2^N bármelyik eleme létrejöjjön. A nemüres koalíciók halmazát $\mathcal{N}$-nel fogjuk jelölni, azaz $\mathcal{N} = 2^N \setminus \{\emptyset\}$.

A modell megadásának „lényegibb” része az, hogy meg kell határozzuk a szereplők minden szóbajöhető társulására az általuk elérhető kimenetelek halmazát. Ez függ egyrészt attól, hogy a koalíció tagjai mennyire hatékonyan tudnak együttműködni, de nyilván nagyban függ a többi játékos cselekedetétől is, hiszen ők is befolyással bírnak a játék kimenetelére. Nem mindegy az S koalíció számára, hogy az $N \setminus S$-beli döntéshozók miként „reagálnak” az S-beliek „kiválására”. A konkrét helyzettől függ az, hogy a modellezés során mi az adekvát feltételezés. A „kiválás” sok esetben egyébként hipotetikus, inkább csak a jobb elosztási pozíció elérését szolgáló „fenyegetés”. Általános modellek vizsgálatakor – a tradicionális felfogást követve – csak azokat a kimeneteleket tekintjük egy koalíció számára elérhetőnek, amelyek a többi játékos cselekedeteitől függetlenül „bármilyen körülmények között” megvalósulhatnak a társulás tagjainak valamilyen összehangolt ténykedése által.

Továbbra is feltesszük, hogy a játékosok preferenciáit hasznossági függvényekkel ki lehet fejezni, vagyis, hogy minden $i \in N$-re létezik egy valós értékű U_i függvény úgy, hogy tetszőleges a, b kimenetel esetén pontosan akkor $U_i(a) \geq U_i(b)$, ha az i számára az a legalább olyan jó, mint a b. Ekkor egy S társulás által elérhető kimenetelek halmazát a tagjainak valamilyen összehangolt tevékenysége által elérhető hasznosságszint-vektorok $V(S) \subseteq \mathbb{R}^S$ halmazával adjuk meg. A modell így elemzésre kész, hiszen a szereplők döntéseit motiváló egyéni preferenciákat a valós számok közötti standard nagyobb-egyenlő reláció jeleníti meg.

Fontos észrevenni, hogy a modell tartalmaz önkényes, a döntési helyzetből nem következő részleteket, hiszen a játékosok preferenciáit reprezentáló hasznossági függvények nem egyértelműek. Nyilvánvaló, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy szigorúan növő függvény, akkor az $f \circ U$ függvény is ugyanúgy reprezentálja az adott preferencia relációt. Fontos azt is hangsúlyozni, hogy jóllehet a hasznossági függvények mindegyike valós értékeket vesz fel, ez még nem feltétlenül jelenti azt, hogy a különböző szereplők értékelései összevethetők. Sőt, óvatosan kell bánni az egy játékos preferenciáit megjelenítő hasznossági értékekkel végzett műveletekkel is. A valós számokkal való megjelenítés persze kényelmes, de a belőlük képezhető újabb és újabb „mérőszámok" már nem feltétlenül bírnak valóságos tartalommal. Például, hasznossági értékek különbségei, mint valós számok, persze rendezhetők, de ebből az adott kimenetelek közötti preferenciák „intenzitására" következtetni már nem biztos, hogy helyénvaló.

1.1. Bevezető példák

Először lássunk két olyan többszereplős döntési helyzetet, amelyekben az egyéni hasznosságok nem összehasonlíthatók illetve átválthatók, vagy azért mert nincs egy olyan közvetítő eszköz (mint pl. a pénz) ami ezt fizikailag lehetővé tenné, vagy ha van is ilyen a kompenzálást lehetővé tevő médium (side payment), azt a szereplők nem egyforma „mértékben" ítélik meg. Az ilyen kooperatív helyzetek modelljeit *NTU-játékok*nak (nontransferable utility game) fogjuk hívni, követve a leginkább elterjedt terminológiát.

1.1. példa (Edgeworth cseregazdaság)**.** Az $N = \{1, 2\}$-beli mindkét szereplőnek kétféle, tetszőlegesen osztható jószága van, amit szabadon cserélgethetnek, ha az számukra előnyös. Az $i \in N$ szereplő kezdeti jószág-kosarát a nemnegatív $\omega^i = (\omega_1^i, \omega_2^i)$ vektor adja meg. A jószágok eldobhatóságát nem megengedve, a helyzet szóbajöhető (de nem feltétlenül elfogadható) kimeneteleit a $z^1 + z^2 = \omega^1 + \omega^2$ kétdimenziós vektor-egyenlet megoldásai írják le. Ennek megoldásait, az ún. Edgeworth dobozban jeleníthetjük meg. Ha ebben feltüntetjük a szereplők preferenciáit leíró hasznossági függvények indifferenciagörbéit is, a helyzet nagyon szemléletesen elemezhető.

Szemléltetésképpen tegyük fel, hogy kezdetben az egyik szereplő csak az egyik, a másik szereplő pedig csak a másik jószágból rendelkezik valamilyen mennyiséggel (vagy csak ebből van cserére szánt fölöslege), azaz $\omega^1 = (A, 0)$ és $\omega^2 = (0, B)$, ahol $A > 0$ és $B > 0$. Tegyük fel, hogy mindkét szereplőnek a csere eredményeként birtokolt jószágkosarakra vonatkozó preferenciája azonos, mégpedig $(a_1, a_2) \succsim (b_1, b_2) \Leftrightarrow \min\{a_1, a_2\} \geq \min\{b_1, b_2\}$, vagyis két egymást kiegészítő jószágról van szó, amelyek egyenlő arányban társítva érnek csak valamit.

Vegyük észre, hogy naturálisan mindkét jószág átruházható a szereplők között, de egyik jószágra sem igaz, hogy átruházása mindig ugyanakkora (persze ellentétes irányú) hasznossági szint változást okozna a két szereplőnél.

A második NTU példánkban a preferenciák sorrendiek, így majd modelljének elemzése során még az egyedi hasznossági értékek értelmezésével is óvatosan kell bánnunk.

1.2. példa (Házaspárosítás)**.** Sok társadalomban működnek házasságközvetítők, akik – ismerve ügyfeleik elvárásait és preferenciáit – tanácsaikkal megkönnyíthetik azt, hogy a hozzá fordulók megtalálják „életük párját”. A döntési helyzet – amiben a döntéshozók persze csak a házasulandó fiatalok – felfogható egyfajta cseregazdaságnak is, ami persze több szempontból is speciális. Egyrészt a szereplők mindegyike egyetlen oszthatatlan, de egymástól megkülönböztethető jószággal (a házasulandó „egy élete, egy halála”) rendelkezik kezdetben. Másrészt, a szereplők két típusba sorolhatók (fiúk-lányok), és keresletük egyetlen másik típusú szereplő jószágára vagy a sajátjára korlátozódik (pl. egy „eladó sorban lévő” leány egyetlen „vevő”-legény élete párja kíván lenni, esetleg senkié, és fordítva).

Szemléltetésképpen tegyük fel, hogy egy kis szigeten a házasságközvetítőt három fiú (A, B, C) és négy lány (X, Y, Z, W) keresi fel a házasságkötésre alkalmasnak tartott nyári időszak előtt. A közvetítő kikérdezi őket a szóbajöhető társaikkal kapcsolatos elképzeléseikről és véleményükről, s ezek alapján a következő táblázatba rendezi az egyéni preferencia sorrendeket:

	X	Y	Z	W
A	$(1,3)$	$(2,1)$	$(3,-)$	$(4,1)$
B	$(2,1)$	$(1,3)$	$(4,1)$	$(3,2)$
C	$(1,2)$	$(3,2)$	$(4,2)$	$(2,-)$

Egy fiú értékelését a sorában lévő elemek első komponense adja, például az A legszívesebben X-t, majd Y-t, utána Z-t, s végül W-t venné nőül. Egy lány rangsorát az oszlopában lévő elemek második komponense adja, például W szíve leginkább A-ért repes, de B-t is el tudná fogadni férjként, C-t viszont nem. A fiatalok sorrendi preferenciáit a modellben megjelenítő számok esetlegessége itt többszörösen is nyilvánvaló.

A helyi erkölcsök szerint a házastársi kapcsolatok eldobhatatlanok és oszthatatlanok. A közvetítőnek ezért a fiúk és lányok között egy olyan párosítást kell megtalálnia és javasolnia, amit a házasulandók – belátva a helyzet általuk nem befolyásolható körülményeiből adódó lehetőségeiket – el tudnak fogadni, sőt a közösség számára is valamiféle stabilitást biztosít. A feladat érdekes, majd még mi is gondolkodunk rajta.

Nagy mértékben megkönnyíti egy kooperatív játékkal modellezhető döntési helyzet vizsgálatát, ha a kimeneteleknek van egy olyan tetszőlegesen osztható eleme, amelyik nemcsak, hogy tetszőlegesen átvihető a szereplők között (ez gyakran a kimenetelek több összetevőjére is teljesül, mint azt az 1.1. példában is láttuk), de átruházása bármely két szereplő között azonos nagyságú, de ellentétes irányú haszonszint változást idéz elő. Ilyen esetben ugyanis az S koalíció által elérhető hasznosságszint-vektorok $V(S) \subseteq \mathbb{R}^S$ halmaza nagyon egyszerű szerkezetű:

$$V(S) = \Big\{ z^S = (z_i)_{i \in S} \in \mathbb{R}^S \mid \sum_{i \in S} z_i \leq v(S) \Big\}, \tag{1.1}$$

ahol $v(S) \in \mathbb{R}$ jelöli a társulás által elérhető maximális összhaszon értékét (feltesszük persze, hogy ez jól meghatározott). Ilyen esetben tehát az együttműködésből származó előnyök halmaza ezzel az egyetlen (esetleg negatív) $v(S)$ valós számmal jellemezhető. Az ilyen kooperatív helyzetek modelljeit *TU-játékok*nak (transferable utility game) fogjuk hívni.

Megjegyezzük, hogy az egyéni preferenciákat reprezentáló hasznossági függvények még ekkor sem egyértelműek, de az „egy-az-egyben" való átválthatóságuk elveszhet, ha nem megfelelő szigorúan monoton transzformációt alkalmazunk rájuk. Erre a kérdésre a modellek stratégiai ekvivalenciájánál még visszatérünk.

A felek közötti közvetítő eszköz szerepét legtöbbször a pénz játssza. Habár tudjuk jól, hogy egy adott pénzmennyiség megszerzése vagy elvesztése nem ugyanazt jelenti egy koldusnak mint egy milliomosnak, mégis számos esetben jogos a szereplők azonos értékelését feltételezni. A továbbiakban mi leginkább csak ilyen helyzetekkel foglalkozunk, ezért kényelmi okokból – hacsak kifejezetten más feltevéseket nem teszünk – pénzen mindig egy ilyen jószágot értünk.

1.3. példa (Termelési cserepiac)**.** Az $N = \{1, \ldots, n\}$-beli szereplők mindegyike képes ugyanazt a terméket előállítani az $M = \{1, \ldots, m\}$-beli erőforrások felhasználásával. Az $i \in N$ szereplő kezdetben rendelkezik a $j \in M$ erőforrásból $\omega_j^i \geq 0$ mennyiséggel, kezdő input-készletét tehát a nemnegatív $\omega^i = (\omega_1^i, \ldots, \omega_m^i) \in \mathbb{R}_+^m$ vektor adja meg. A rendelkezésére álló technológiát pedig az $f^i : \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R}$ termelési függvény írja le, amiről egyelőre csak azt tesszük fel, hogy folytonos. Az output termék minden szereplő számára ugyanaz, s feltesszük, hogy tetszőlegesen osztható illetve átvihető a szereplők között.

A termelési hatékonyságok különbözősége miatt a szereplők egy $S \subseteq N$ társulása számára előnyös lehet, ha a termelés előtt átcsoportosítják input-készleteiket, majd utána elosztják a koalíció tagjai által egyedileg elért összes végterméket valamilyen minden résztvevő által elfogadható módon. Az általuk együttesen elérhető legnagyobb output-mennyiség tehát

$$v(S) = \max\Big\{ \sum_{i \in S} f^i(z^i) \mid \sum_{i \in S} z^i = \sum_{i \in S} \omega^i,\ (z^i)^S \in (\mathbb{R}^m_+)^S \Big\}, \tag{1.2}$$

ami jól meghatározott, hiszen a termelési függvények folytonosak és a kezdeti input-készletek megvalósítható átcsoportosításainak halmaza kompakt.

Felhívjuk a figyelmet, hogy eddig csak a döntési helyzet kimeneteleit adtuk meg, szándékosan ezért nem neveztük pénznek az átadható végterméket, ami ugyan lehetőséget teremt az átadott erőforrások utólagos kompenzációjára, de megítélése nem feltétlenül egységes. Amennyiben feltesszük, hogy az output termék pénznek tekinthető a fentebb tárgyalt értelemben, akkor a (1.2) szerinti számot tekinthetjük az S koalíció által elérhető összhaszonnak. Az így kapott TU-játékot egyszerűen csak *piacjáték*nak fogjuk hívni, hiszen ennél általánosabb piacokat mi nem fogunk vizsgálni.

Külön is vizsgálni fogjuk az alábbi speciális eseteket:

1.4. példa (Kesztyűpiac)**.** A névadó helyzetleírás szerint az ivóban az aranyásók közül egyeseknek egy balkezes kesztyűje van, míg másoknak egy jobbkezes. Értéke viszont csak egy pár kesztyűnek van, mégpedig 1 üveg whisky. Komolyabbra fordítva a szót, cserepiacunkon a szereplők és a jószágok is két típusba sorolhatók, azaz $N = I \cup J$ és $M = \{1, 2\}$. Az $i \in N$ szereplő kezdőkészlete illetve „termelési” függvénye:

$$\omega^i = \begin{cases} (1,0), & \text{ha} \quad i \in I \\ (0,1), & \text{ha} \quad i \in J \end{cases} \text{illetve} f^i(a,b) = \min\{a,b\},$$

ahol (a,b) az a db balkezes és b db jobbkezes kesztyűből álló jószágkosár. Ekkor az S koalíció maximálisan nyilván

$$v(S) = \min\{|S \cap I|, |S \cap J|\} \tag{1.3}$$

üveg whiskyt képes kitermelni.

Amennyiben mindegyik aranyásó azonosan értékel eggyel több / kevesebb kupica whiskyt, vagyis a nedüt tekinthetjük pénznek, akkor a (1.3) szerinti számot tekinthetjük az S koalíció által elérhető összhaszonnak. Az így kapott TU-játékot *kesztyűjáték*nak fogjuk hívni.

1.5. példa (Lineáris termelési piac)**.** Ez a cserepiac csak annyiban speciális, hogy a technológia lineáris. Most $N = \{1, \ldots, n\}$, $M = \{1, \ldots, m\}$, és az $i \in N$ szereplő kezdeti erőforrás-készletét megadó $\omega^i \in \mathbb{R}^m_+$ vektor is tetszőleges. A rendelkezésére álló technológia mindegyik szereplő számára azonos, éspedig egy lineáris programozási feladat megoldásával írható le: bármely $i \in N$ szereplő és $b \in \mathbb{R}^m_+$ erőforrás-vektor esetén

$$f^i(b) = f(b) = \max\{cx \mid Ax \leq b,\ x \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^r\}, \tag{1.4}$$

ahol c ill. A olyan megfelelő méretű adott vektor ill. mátrix, hogy az LP-nek tetszőleges $b \in \mathbb{R}^m_+$-re van optimális megoldása. Mivel az így definiált $f : \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}$ optimumérték-függvény szuperadditív (azaz $f(b^1 + b^2) \geq f(b^1) + f(b^2)$) (lásd 1.4. feladat), az S társulás által a közös technológiával elérhető összes végtermék mennyiségére $\sum_{i \in S} f^i(z^i) = \sum_{i \in S} f(z^i) \leq f(\sum_{i \in S} z^i) = f(\sum_{i \in S} \omega^i)$ áll fenn az S által birtokolt erőforrások bármilyen $\sum_{i \in S} z^i = \sum_{i \in S} \omega^i$ átrendezése mellett. Mivel az f folytonos is (lásd 1.4. feladat), az (1.2) szerinti $v(S)$ optimum jól meghatározott, mégpedig

$$v(S) = f(\sum_{i \in S} \omega^i) = \max\{cx \mid Ax \leq \sum_{i \in S} \omega^i,\ x \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^r\}. \tag{1.5}$$

Amennyiben a termelés átadható végterméke tekinthető pénznek, akkor a (1.5) szerinti $v(S)$ számok ($S \in \mathcal{N}$) közvetlenül egy TU-játékot definiálnak, amire a továbbiakban mint *lineáris termelési játék*ra fogunk utalni.

1.6. példa (Lóvásár)**.** Hárman vannak a vásárban. A-nak van egy eladó lova, amit 200 tallérnál olcsóbban nem hajlandó eladni. B és C mustrálgatja a lovat, B legfeljebb 280 tallért, míg C legfeljebb 300 tallért hajlandó a jószágért adni. Alkudozásuk során persze ezeket az információkat egyikük sem köti a többiek orrára. Most feltesszük, hogy a tallér tényleg pénz, vagyis eggyel több / kevesebb tallér ugyanazt „jelenti" bármelyik szereplőnek.

A kezdeti állapotot tallérban kifejezve kapjuk, hogy $v(A) = 200$, míg $v(B) = 280$ és $v(C) = 300$, hiszen az eladónál lévő tényleges pénzmennyiség nyilván éppúgy érdektelen az esetleges üzlet megítélése szempontjából, mint a vevőknél lévő, a vételár-plafonjukat meghaladó pénzmennyiség. Ha A és B meg tud egyezni abban, hogy a ló p tallér fejében gazdát cserél, akkor együttműködésük eredménye egy olyan helyzet, ami $v(AB) = p + (280 + 280 - p) = 560$ tallért ér, függetlenül az átadott vételártól. Ha A a C-nek adja el a lovat p tallérért, akkor együtt egy $v(AC) = p + (300 + 300 - p) = 600$ tallért érő helyzetbe jutnak, a tényleges pénzmozgás megint nem számít. A két vevő viszont legfeljebb pénzt adhat át egymásnak, de abból többlet-érték nem keletkezik, vagyis $v(BC) = 280 + 300 = 580$ tallér a legtöbb amit elérhetnek. Hárman együttműködve sem tudnak többet kihozni a helyzetből, mint $v(ABC) = 880$ tallér, hiszen többlet-érték csak a ló eladásából származhat, ez pedig maximálisan 300 tallér (amennyiben a ló a C-jé lesz), az üzletre szánt összesen 280+300 tallér újraelosztása ehhez hozzáadni (elvenni) semmit nem tud.

Egyszerűsíthetjük a modellt, ha a kezdeti vagyoni helyzeteket tekintjük azoknak a kiindulópontoknak, amikhez viszonyítják majd a szereplők az egyes kimeneteleket. Ilyenkor a szereplőkhöz hasonlóan minket is csak az érdekel, hogy mennyi az együttműködés hozadéka, aminek elosztásán aztán lehet majd vitatkozni. Ezért a későbbi elemzések során *lóvásár-játék*on a következő TU-játékot értjük:

S	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
$v(S)$	0	0	0	80	100	0	100

ahol pl. az ABC koalíció többlet-potenciálja $880 - (200 + 280 + 300) = 100$-ként adódott.

1.1.1. Feladatok

1.1. feladat. Az 1.1. példában adjuk meg a kapcsolódó NTU-játékot, azaz a $V(S)$ halmazokat minden $S \in \mathcal{N}$-re!

1.2. feladat. Vegyünk egy olyan Edgeworth cseregazdaságot (1.1. példa), amelyikben a kezdőkészletek $\omega^1 = (80, 0)$ és $\omega^2 = (0, 60)$. Tegyük fel, hogy mindkét szereplőnek a csere eredményeként birtokolt jószágkosarakra vonatkozó preferenciája azonos, mégpedig $(a_1, a_2) \succsim (b_1, b_2) \Leftrightarrow a_1 a_2 \geq b_1 b_2$.

1. Adjuk meg az N által elérhető kimetel-kombinációk halmazát az Edgeworth dobozzal, feltüntetve az egyéni preferenciák néhány indifferenciagörbéjét is!

2. Adjuk meg a kapcsolódó NTU-játékot, azaz a $V(S)$ halmazokat minden $S \in \mathcal{N}$-re!

3. Teljesül-e valamelyik jószágra, hogy átadása a szereplők között mindig ugyan mértékű, de ellentétes irányú változást idéz elő a hasznossági függvényekben?

1.3. feladat. Határozzuk meg az egyes koalíciók által elérhető legnagyobb output-mennyiséget (vagyis oldjuk meg az (1.2) alatti optimalizálási feladatot) az alábbi speciális termelési cserepiacok esetén:

1. Szindikátus. $N = (I = \{1,2\}) \cup (J = \{3,4,5\})$, $M = \{1,2\}$,
   $$\omega^i = \begin{cases} (2,0), & \text{ha} \quad i \in I \\ (0,1), & \text{ha} \quad i \in J \end{cases},$$
   $f^i(a,b) = \min\{a,b\}$ minden i-re.

2. Gyáros-munkások: $N = \{0,1,\ldots,n\}$, $M = \{1,2\}$,
   $$\omega^i = \begin{cases} (1,0), & \text{ha} \quad i = 0 \\ (0,1), & \text{ha} \quad i \geq 1 \end{cases},$$
   $f^i(a,b) = \left\{ \begin{array}{lll} 0, & \text{ha} & ab = 0 \\ g(k), & \text{ha} & (a,b) = (1,k) \end{array} \right\}$ minden i-re, ahol g nemcsökkenő és $g(0) = 0$.

1.4. feladat. Igazoljuk, hogy az (1.4) alatti lineáris program $f(b)$ optimumértéke a b jobboldalnak folytonos, szuperadditív (azaz $f(b^1 + b^2) \geq f(b^1) + f(b^2)$) és pozitív 1-homogén (azaz $f(\lambda b) = \lambda f(b)$ minden $\lambda > 0$-ra) függvénye.

1.5. feladat. Írjuk fel a kesztyűpiacot (1.4. példa), mint egy lineáris termelési piacot (1.5. példa), vagyis adjunk meg alkalmas méretű c vektort ill. A mátrixot úgy, hogy az említett két cserepiacon a koalíciók termelési potenciálját megadó függvények megegyezzenek. Miért nem okoz gondot, ha a kesztyűpiacnál kikötjük a jószágok oszthatatlanságát?

1.6. feladat. Írjuk fel a lóvásár játékot (1.6. példa), mint egy lineáris termelési játékot (1.5. példa), vagyis adjuk meg a szereplők „termelési" függvényét. Miért nem okoz gondot, hogy a lóvásárnál a cserélhető jószágok egyike (a ló) oszthatatlan?

1.2. Játéktípusok

A továbbiakban túlnyomórészt átváltható hasznossággal rendelkező kooperatív játékokkal foglalkozunk, ezért játék alatt – hacsak kifejezetten más feltevéseket nem teszünk – mindig ilyen modellt értünk.

1.7. definíció (TU-játék)**.** Egy n-személyes TU-játéknak két összetevője van:

- a *játékosok halmaza*: $N = \{1,\ldots,n\}$, és
- a *koalíciós függvény*: $v : 2^N \to \mathbb{R}$, amire kikötjük, hogy $v(\emptyset) = 0$.

A koalíciós függvény a játékosok tetszőleges $S \subseteq N$ koalíciójára megadja annak $v(S)$ „értékét”, ami az átváltható hasznosságoknak köszönhetően egy (esetleg negatív) valós szám. Hacsak kifejezetten mást nem teszünk fel, $v(S)$-sel azt a pénzmennyiséget jelöljük, amit az S koalíció a helyzet adta lehetőségeken belül elérhet, az $N \setminus S$-beli játékosok cselekedeteitől függetlenül.

Sok esetben egy rögzített játékoshalmazon értelmezett különböző koalíciós függvényeket vizsgálunk. Ilyenkor az egyszerűség kedvéért játéknak mondjuk már a koalíciós függvényt is. $\mathcal{G}^N$ fogja jelölni az N játékoshalmazon értelmezett játékok (koalíciós függvények) halmazát.

A lóvásár példában (1.6. példa) már láttuk, hogy leegyszerűsíthetjük a modellünket, ha a szereplők viszonyítási pontjainak (az egyéni hasznossági skálák kezdőpontjainak) a kiinduló vagyoni helyzetüket (a játékosok által egyedül is elérhető értékeket) választjuk. Ezeket az elvárási szinteket levonva, a transzformált modell már közvetlenül mutatja azt, hogy az egyes társulások mekkora többlet elérésére képesek. Mivel most pont ez az elemzés tárgya, a transzformált modell helyzetleíró pontossága nyilván semmit sem csökkent, sőt. Gondolatmenetünket formalizálja a

1.8. definíció. Azt mondjuk, hogy az (N, v) játék

- *0-normalizált*, ha $v(\{i\}) = 0$ minden $i \in N$-re;
- *0-normalizáltja* az (N, v^0) játék, ha $v^0(S) = v(S) - \sum_{i \in S} v(\{i\})$ minden $S \in \mathcal{N}$-re;
- *lényeges*, ha $v(N) > \sum_{i \in N} v(\{i\})$, másképpen, ha $v^0(N) > 0$;
- *(0,1)-normalizált*, ha 0-normalizált és $v(N) = 1$;
- *(0,1)-normalizáltja* az $(N, v^{(0,1)})$ játék, ha $v^{(0,1)}(S) = \frac{v^0(S)}{v^0(N)}$ minden $S \in \mathcal{N}$-re, feltéve persze, hogy $v^0(N) \neq 0$.

A lóvásár példában (1.6. példa) tehát 0-normalizáltuk az elsőként felírt játékot. A lóvásár játék nyilván lényeges, az összes szereplő együttműködése többletet eredményez. Ha tallér helyett dénárban (1 dénár = 100 tallér) adnánk meg a koalíciók értékét, akkor (100-zal végigosztva a koalíciós függvényt) kapnánk egy (0,1)-normalizált játékot.

Röviden nézzük meg az átalakított modellek egyenértékűségét egy kicsit általánosabban is. A játékosok az egyes kimenetelek számukra való hasznosságát – rögzített alapfeltevésünk szerint – pénzben fejezik ki. Mérési skálájuk kezdőpontja és skálaegysége is tetszőleges, vagyis ha az U függvény reprezentálja egy szereplő egyéni preferenciáit, akkor tetszőleges $\alpha > 0$ és $\beta \in \mathbb{R}$ esetén az $\alpha U + \beta$ függvény is éppúgy alkalmas a reprezentálásra. Amennyiben mindegyik játékosra ugyanazt a pénzegység-átváltást használjuk, egy v játékból egy $\alpha v + (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ alakú transzformációval egy egyenértékű modellt kapunk, hiszen sem az egyes játékosok cselekedeteit motiváló ítéletek, sem azok „erőssége” nem változnak. Fordítva, ugyan az intervallum-skálán mért egyéni preferenciák invarianciája megengedné, hogy játékosonként szabadon megválasszuk a skála mindkét paraméterét (skála-egység illetve kezdőpont), de a hasznosságok egy-az-egyben való átválthatósága megköveteli a skálaegységek azonosságát ($\alpha_1 = \ldots = \alpha_n$), s ez $2n$-ről $n+1$-re csökkenti a szabad paraméterek számát.Ezen megfontolások alapján érthető a

1.9. definíció. Azt mondjuk, hogy az (N, v) játék *stratégiailag ekvivalens* az (N, w) játékkal, ha léteznek olyan $\alpha > 0$ és $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ számok, hogy $w(S) = \alpha v(S) + \sum_{i \in S} \beta_i$ teljesül minden $S \in \mathcal{N}$-re.

A definíciókból azonnal adódnak az alábbi megállapítások, belátásukat az Olvasóra hagyjuk.

1.10. állítás.

1. *A stratégiai ekvivalencia valóban egy ekvivalencia-reláció (azaz reflexív, szimmetrikus és tranzitív) a $\mathcal{G}^N$ halmazon.*

2. *A lényeges játékok halmaza zárt a stratégiai ekvivalenciára nézve, azaz egy lényeges játékkal stratégiailag ekvivalens minden játék is lényeges.*

3. *Egy v játék 0-normalizáltja egy, de nem az egyetlen, olyan 0-normalizált játék, amelyik a v-vel stratégiailag ekvivalens.*

4. *Egy lényeges v játék (tehát amire $v^0(N) > 0$ teljesül) (0,1)-normalizáltja az az egyetlen (0,1)-normalizált (tehát lényeges) játék, amelyik a v-vel stratégiailag ekvivalens.*

1.2.1. Szuperadditív játékok

A lineáris termelési játékokhoz (1.5. példa) hasonlóan sok kooperatív döntési helyzet olyan, hogy a szereplők két különálló csoportjának összefogása új együttműködési lehetőségeket, s ezáltal többlet-eredményt teremthet. A kesztyűpiacon (1.4. példa) például egy balkezes illetve egy jobbkezes kesztyűt birtokló aranyásó együttműködve határozottan többet tud elérni, mint külön-külön. Ugyanakkor mindegy, hogy hányan szövetkeznek, ha mindegyiküknek balkezes kesztyűje van, egy cseppel sem tudnak több whiskyhez jutni, mintha egyenként próbálkoznának.

1.11. definíció. Azt mondjuk, hogy az (N, v) játék

- *additív*, ha $v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\})$ minden $S \in \mathcal{N}$-re;
- *szuperadditív*, ha $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$ áll fenn tetszőleges olyan $S, T \in \mathcal{N}$-re, amelyre $S \cap T = \emptyset$.

Additív játékokkal olyan helyzetek modellezhetők, amelyekben a szereplők semmiféle együttműködéséből sem származik mérhető előny. Ilyenkor a koalíciós függvényt egyértelműen meghatározza az egyszemélyes koalíciókon felvett értéke, azaz a $\big(v(\{1\}), \ldots, v(\{n\})\big) \in \mathbb{R}^N$ vektor. Fordítva, tetszőleges $x \in \mathbb{R}^N$ vektor generál egy additív játékot: az $S \in \mathcal{N}$ koalíció értéke $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$, és persze $x(\emptyset) = 0$.

A szuperadditív játékokkal modellezhető döntési helyzetekben bármely két, közös játékost nem tartalmazó koalíció egyesüléséből csak előny származhat. Az általunk tekintett termelési cserepiacok (1.3. példa) mindig ilyenek, ez magyarázza (lásd 1.7. feladat), hogy eddigi példáinkban miért csak szuperadditív TU-játékokkal találkoztunk.

A definíciókból azonnal adódnak az alábbi megállapítások, belátásukat az Olvasóra hagyjuk.

1.12. állítás.

1. *Az additív / szuperadditív játékok halmaza zárt a stratégiai ekvivalenciára nézve, azaz egy additív / szuperadditív játékkal stratégiailag ekvivalens minden játék is additív / szuperadditív.*
2. *Egy v játék pontosan akkor szuperadditív, ha minden $S \in \mathcal{N}$-re és az S bármely $\mathcal{T}$ partíciójára $v(S) \geq \sum_{T \in \mathcal{T}} v(T)$ áll fenn.*
3. *Egy 0-normalizált szuperadditív játék nemnegatív (azaz $v(S) \geq 0$ minden $S \in \mathcal{N}$-re), és pontosan akkor lényeges, ha nem additív.*

Mint már említettük, a játékelméleti modell típusok közül a koalíciós forma a leginkább makrójellegű. Nagy gondban lennénk például, ha még az olyan „konkrét” helyzetekben is mint a lóvásár (1.6. példa) meg kellene adni egy olyan nemkooperatív játékot – akár az események időbeliségét is tükröző extenzív formában, akár az ilyen szempontból kevésbé részletes normál formában – amelyik pontosan leírná a szereplők cselekvési lehetőségeit, a köztük lezajló alkufolyamatot, stb. A másik irányból könnyebb a dolgunk.

Vegyük az $N = \{1, \ldots, n\}$ játékos-halmazon a $\{\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n; f_1, \ldots, f_n\}$ normál formában megadott Γ nem kooperatív játékot. Tegyük fel, hogy mindegyik $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ stratégia-halmaz nemüres és kompakt, valamint, hogy mindegyik $f_1, \ldots, f_n$ kifizetőfüggvény folytonos a stratégia-kombinációk $\Sigma^N = \times_{i \in N} \Sigma_i$ halmazán. Jelölje $F^S(x^S, y^{N \setminus S}) = \sum_{i \in S} f_i(x^S, y^{N \setminus S})$ az S koalíció tagjainak az $((x_i)_{i\in S},(y_j)_{j\in N\setminus S})$ stratégia kombináció esetén jutó összkifizetést. Világos, hogy a játékosok egy $\emptyset \neq S \neq N$ koalíciója mindenképpen el tudja érni a

$$v(S) = \max_{x^S\in\Sigma^S}\ \min_{y^{N\setminus S}\in\Sigma^{N\setminus S}} F^S(x^S, y^{N\setminus S}) \tag{1.6}$$

összkifizetést, még akkor is, ha az $N \setminus S$-beli játékosok összefognak és egy koalíciót alkotva „mindent megtesznek” azért, hogy a lehető legrosszabb helyzetbe hozzák az S-t. Az (1.6) természetes kiterjesztéseként legyen

$$v(\emptyset) = 0 \text{ és } v(N) = \max_{x^N\in\Sigma^N} F^N(x^N). \tag{1.7}$$

Az (1.6) és (1.7) meghatározásokat *maximin-konstrukció*nak mondjuk.

Konstans-összegű nem kooperatív játékok esetén a maximin-konstrukció jogosnak tűnik, nem konstans-összegű játékokban azonban nem feltétlenül valószerű azt feltenni, hogy az $N \setminus S$-beli játékosok érdekét az szolgálja legjobban, hogy mindenáron ártsanak a „szakadár” S-belieknek.

A maximin konstrukciónak egy adott helyzetre való relevanciájának fokától eltekintve, az világos (lásd 1.8. feladat), hogy egy „kellően szabályos” normál formában megadott többszereplős játékból a maximin konstrukcióval egy szuperadditív TU-játékot kaphatunk. Ez az oka annak, hogy bizonyos – főleg a korai – munkákban TU-játékon eleve szuperadditív játékot értenek. Megemlítjük, hogy a játékok koalíciós illetve normál formája között kapcsolatot teremtő maximin konstrukció bizonyos szempontból meg is fordítható, persze csak a szuperadditív játékok vonatkozásában. Igaz ugyanis a következő

1.13. tétel (Neumann és Morgenstern (1944))**.** *Tetszőleges szuperadditív TU-játék előáll, mint egy normál formában megadott nem kooperatív játékból a maximin konstrukcióval származtatott kooperatív játék.*

Bizonyítás. A bizonyítás megtalálható Neumann és Morgenstern (1944) könyvében. □

Megjegyezzük, hogy a hivatkozott bizonyítás konstruktív, de eléggé sematikus: a játékosok egyszerre nyilvánítják ki, hogy melyik koalícióban kívánnának együttműködni, és amennyiben az adott koalíció tagjainak együttműködési szándéka egybehangzó, úgy mindannyian egyenlően részesülnek a létrejövő koalíció értékéből, különben mindenki csak az általa egyedül is elérhető kifizetést kapja.

1.2.2. Monoton, szimmetrikus, egyszerű játékok

A szereplők összefogásának eredményességét bizonyos esetekben csak a koalíció mérete befolyásolja. Egyenlő szavazati jog esetén például csak az számít, hogy minél több szavazásra jogosult támogasson egy adott választási lehetőséget. Vegyük a következő jól ismert többszereplős döntési helyzeteket:

1.14. példa (Egyszerű többségi szavazás)**.** A szavazók N halmazának egy elfogadjuk–elutasítjuk jellegű döntést kell hoznia egy javaslatról. Mindegyik szavazat ugyanannyit ér. A javaslat elfogadásához a szavazatok több mint felének elfogadónak kell lennie (egyszerű többségi elv). Jelöljük 1-el a javaslat elfogadását és 0-val az el nem fogadását jelentő döntést. Ekkor a szavazók egy $S \subseteq N$ halmazának „szavazati ereje” nyilván

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad |S| > |N|/2 \\ 0, & \text{ha} \quad |S| \leq |N|/2 \end{cases} . \tag{1.8}$$

Amennyiben az egyes szavazatok nem ugyanannyit érnek és/vagy a javaslat elfogadásához nem egyszerű többség kell, úgy a következő általánosabb szavazási modellre van szükségünk.

1.15. példa (Súlyozott többségi szavazás)**.** A szavazók N halmazának egy elfogadjuk-elutasítjuk jellegű döntést kell hoznia egy javaslatról. Az $i \in N$ szavazó $p_i > 0$ szavazati súllyal rendelkezik. A javaslat elfogadásához legalább q összsúlyú elfogadó szavazatnak kell összegyűlnie, ahol $0 < q \leq \sum_{i \in N} p_i$ az elfogadási kvóta. Jelöljük 1-gyel a javaslat elfogadását és 0-val az el nem fogadását. Ekkor a szavazók egy $S \subseteq N$ halmazának javaslat elfogadási képessége

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad \sum_{i \in S} p_i \geq q \\ 0, & \text{ha} \quad \sum_{i \in S} p_i < q \end{cases} . \tag{1.9}$$

Természetesen $p_i = 1$ minden $i \in N$-re és $q = \dfrac{|N|+1}{2}$ esetén az egyszerű többségi szavazási modellt kapjuk.

Vegyük észre, hogy a fenti példákban a v függvényt csak mint egy leíró jellegű mérési eszközt használtuk. Ráadásul – eddigi példáinktól eltérően – itt a játékosok tudatos együttműködését sem lenne valószerű általános érvényűen feltenni (gondoljunk egy országos hatókörű népszavazásra). A jogosan felvethető modellalkotási kételyek ellenére a „szavazati erő mértékét” pénznek fogjuk tekinteni, s így beszélni fogunk *egyszerű többségi játék*ról illetve *súlyozott többségi játék*ról, s ezen az (1.8) illetve (1.9) koalíciós függvény által definiált TU-játékot értjük. Egyébként ha egy olyan testületre gondolunk, amelyik egy (köz)pénzelosztási javaslatról határoz, akkor a koalíciók javaslat elfogadási képességét pénznek tekinteni már nem is tűnik különösebben valószerűtlen feltevésnek.

A fenti példákban fellelhető tulajdonságokat foglalja össze a

1.16. definíció. Azt mondjuk, hogy az (N, v) játék

- *monoton*, ha $S \subseteq T \Rightarrow v(S) \leq v(T)$ minden $S, T \in \mathcal{N}$-re;
- *0-monoton*, ha $S \subseteq T \Rightarrow v(S) + \sum_{i \in T \setminus S} v(\{i\}) \leq v(T)$ minden $S, T \in \mathcal{N}$-re;
- *szimmetrikus*, ha $|S| = |T| \Rightarrow v(S) = v(T)$ minden $S, T \in \mathcal{N}$-re, vagyis a koalíciók értéke csak a tagjainak számától függ;
- *egyszerű*, ha $v(N) = 1$ és $v(S) \in \{0, 1\}$ minden $S \in \mathcal{N}$-re.

A monotonitási tulajdonság jól ismert: a koalíciók növekedésével a koalíciós függvény is növekszik. A pozitív szavazati súlyok miatt a fenti szavazási játékok nyilván monoton játékok. Legalább három szavazó esetén az egyszerű többségi játék nyilvánvalóan 0-normalizált, tehát 0-monoton is. Ez általában a súlyozott többségi játékokról nem mondható el. Például a 3-szereplős $\langle q = 2; p_1 = 2, p_2 = p_3 = 1 \rangle$ helyzetet modellező súlyozott többségi játékban $v(23) + v(1) = 1 + 1 > 1 = v(123)$, sérül tehát a 0-monotonitás.

A kétféle monotonitás közül a 0-monotonitás a számunkra fontosabb tulajdonság. A miértre ad választ a

1.17. állítás.

1. *A 0-monoton játékok halmaza zárt a stratégiai ekvivalenciára nézve, azaz egy 0-monoton játékkal stratégiailag ekvivalens minden játék is 0-monoton.*
2. *Tetszőleges játék stratégiailag ekvivalens egy monoton játékkal, következésképpen a monoton játékok halmaza nem zárt a stratégiai ekvivalenciára nézve.*
3. *Egy játék pontosan akkor 0-monoton, ha a 0-normalizáltja monoton.*
4. *Minden szuperadditív játék 0-monoton, de nem minden 0-monoton játék szuperadditív.*
5. *Minden nemnegatív szuperadditív játék monoton.*

Az állítások belátását az Olvasóra hagyjuk (1.9 feladat).

A szimmetria ugyancsak szokásos tulajdonság: a koalíciós függvény csak a koalíciók méretétől függ, tagjainak kibenléte nem számít. Egyenlő szavazati súlyok esetén a súlyozott többségi játékok nyilvánvalóan szimmetrikusak.

Meghatározásából illetve a kvótára tett megkötésből adódóan egy súlyozott többségi játék nyilván mindig egy egyszerű játék. Ugyanakkor egy olyan egyszerű játék, amelyik nem monoton biztosan nem származhat egy súlyozott szavazási helyzetből. Ilyenkor minden egyes koalícióra meg kell mondani, hogy *nyerő* (ha értéke $= 1$) vagy *vesztő* (ha értéke $=0$) koalíció-e. Egy *minimális nyerő koalíció* egy olyan nyerő koalíció, amelyik nem tartalmaz másik nyerő koalíciót. A későbbiekben többször vizsgáljuk majd az egyetlen minimális nyerő koalícióval rendelkező egyszerű játékokat.

1.18. definíció. Azt mondjuk, hogy az (N, u_T) a nemüres $T \in \mathcal{N}$ koalícióhoz tartozó *egyetértési játék*, ha

$$u_T(S) = \begin{cases} 1, & \text{ha } S \supseteq T \\ 0, & \text{különben} \end{cases} . \tag{1.10}$$

Pontosan azok a koalíciók tehát a nyerők, amelyek a T minden tagját tartalmazzák, további szereplőkre nincs is igazából szükség. A T koalíció szerepe az u_T játékban diktatórikus: nélküle egy koalíció vesztes, vele viszont nyertes. Könnyű meggondolni (1.10. feladat), hogy igaz a

1.19. állítás. *Tetszőleges nemüres $T \in \mathcal{N}$ koalícióhoz tartozó u_T egyetértési játék szuperadditív és monoton.*

1.2.3. Konvex játékok

Vannak olyan kooperatív döntési helyzetek, ahol a szereplők két (nem feltétlenül különálló) S és T csoportjának érdemesebb a mindegyiküket tartalmazó $S \cup T$ és a közös tagokat tartalmazó $S \cap T$ koalíciókba szerveződniük, mert így többlet-eredményt érhetnek el. Különösen olyankor van ez így, ha a nagyobb erőforrás-koncentráció nagyobb hatékonysággal jár együtt (lásd például az 1.12. feladatot).

1.20. definíció. Azt mondjuk, hogy az (N, v) játék *konvex*, ha $v(S)+v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T)$ teljesül minden $S, T \in \mathcal{N}$-re.

Könnyű meggondolni (1.11. feladat), hogy igaz a következő állítás.

1.21. állítás.

1. *A konvex játékok halmaza zárt a stratégiai ekvivalenciára nézve, azaz egy konvex játékkal stratégiailag ekvivalens minden játék is konvex.*

2. *A v játék pontosan akkor konvex, ha* $v(S\cup\{i\})-v(S) \leq v(T\cup\{i\})-v(T)$ *teljesül minden* $i \in N$*-re és* $S \subseteq T \subseteq N \setminus \{i\}$*-re.*

3. *A v játék pontosan akkor konvex, ha* $v(S\cup R)-v(S) \leq v(T\cup R)-v(T)$ *teljesül minden* $R \in \mathcal{N}$*-re és* $S \subseteq T \subseteq N \setminus R$*-re.*

4. v *additív* $\Rightarrow$ v *konvex* $\Rightarrow$ v *szuperadditív, de az implikációk nem megfordíthatók.*

5. *Tetszőleges* $T \in \mathcal{N}$ *koalícióhoz tartozó* u_T *egyetértési játék konvex.*

1.2.4. Feladatok

1.7. feladat. Igazoljuk, hogy az (1.2) által definiált koalíciós függvény szuperadditív!

1.8. feladat. Igazoljuk, hogy a maximin-konstrukció (1.6), (1.7) egy normál formában megadott játékhoz egy szuperadditív TU-játékot rendel!

1.9. feladat. Lássuk be az 1.17. állításokat! Zárt-e a stratégia ekvivalenciára nézve a sziimetrikus illetve az egyszerű játékok halmaza?

1.10. feladat. Lássuk be az 1.19. állítást!

1.11. feladat. Lássuk be az 1.21. állításokat!

1.12. feladat. *(Gyáros-munkások)* Tekintsük az 1.3. feladatban szereplő gyáros-munkások termelési piachoz tartozó TU-játékot. A játékosok halmaza $N = \{0, 1, \ldots, n\}$, 0 jelöli a gyárost, $1, \ldots, n$ pedig az egyforma hatékonyságú munkásokat.

1. Igazoljuk, hogy a koalíciós függvény

$$v(S) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad 0 \notin S \\ g(|S|-1), & \text{ha} \quad 0 \in S \end{cases},$$

ahol a g termelési függvény nemcsökkenő, és $g(0) = 0$.

2. Mutassuk meg, hogy ha a g függvény konvex, akkor a v játék konvex.

1.13. feladat. *(Csődjáték)*

*Csődhelyzet*nek nevezzük azt a többszereplős elosztási problémát, amelyben valamilyen $E \geq 0$ értékű tetszőlegesen felosztható vagyonnal szemben az $N = \{1, \ldots, n\}$-beli szereplők rendre $d_1, \ldots, d_n > 0$ jogos követeléssel lépnek fel, de $E < \sum_{i=1}^{n} d_i$. Sok esetben jól modellezhető a helyzet a következő TU-játékkal:

$$v(S) = \max\{E - \sum_{j \in N \setminus S} d_j, 0\}$$

minden $S \subseteq N$-re. Az elv világos: ha az $N \setminus S$-beli követeléseket teljes mértékben kielégítettük, a vagyon megmaradt része már kizárólag az S-belieket illeti. Azt mondjuk, hogy az (N, v) egy *Csődjáték*, ha éppen egy $\langle E; d_1, \ldots, d_n \rangle$ csődhelyzethez a fenti módon rendelt játék.

1. Mutassuk meg, hogy minden csődjáték konvex játék!
2. Adjunk példát olyan konvex játékra, amelyik nem csődjáték!

1.3. Kifizetések

Egy társulás létrejöttéhez elengedhetetlen, hogy a benne résztvevő szereplők meg tudjanak egyezni az együtt elérhető legnagyobb összhaszon mindegyikük számára elfogadható elosztásában. Egyelőre csak olyan helyzeteket vizsgálunk amelyekben joggal feltételezhető, hogy az egyéni hasznosságukat maximalizálni törekvő játékosok mindegyike a többiekkel való együttműködést választja és létrejön a nagykoalíció.

Például, egy szuperadditív játékkal modellezhető helyzetben bármely két, közös játékost nem tartalmazó koalíció egyesüléséből csak előny származhat, s így megvan a késztetés arra, hogy egyre nagyobb koalíciók jöjjenek létre, s végső soron megvalósuljon az összes játékost magában foglaló nagykoalíció. Ugyanakkor a csak 0-monoton vagy lényeges játékkal modellezhető helyzetekben ez már nem feltétlenül igaz, hiszen olyankor már nem zárható ki, hogy a szereplők egy valódi részhalmaza számára előnyösebb legyen a kooperáció mint a nagykoalícióban. Megjegyezzük, hogy a játékosok koalíciókba szerveződésének modellezése ennél jóval összetettebb probléma. Akár egy egyébként szuperadditív játékként megfogható helyzetben is felmerülhetnek olyan szempontok, amelyek miatt a nagykoalíció esetleg mégsem jön létre. Ezzel a kérdéskörrel kapcsolatban kezdetnek Aumann és Dreze (1974) cikkét, illetve Greenberg (1994) tanulmányát ajánljuk.

Egy szuperadditív koalíciós függvénnyel modellezhető helyzetben tehát bármilyen társulás-konfigurációhoz képest előnyösebb a nagykoalíció, már ami az elérhető legnagyobb összhasznot illeti (lásd 1.12. állítás). De nézzük annak elosztását.

Természetesen mindegyik szereplő a saját részesedését kívánja növelni, ami persze csak a többiek kárára történhet. Ugyanakkor a többi szuverén szereplő együttműködése nélkül nincs miből részesedni, ezt pedig csak kellő önkorlátozással lehet elérni. E két egymással ellentétes cél közül most tehát az együttműködést lehetővé tevő kellő mértékű visszafogottság az elsődleges fontosságú, a relatíve legkedvezőbb részesedés megszerzése pedig csak másodlagos motiváló tényező lehet.

Egyelőre *feltesszük, hogy létrejön az N nagykoalíció*, és a kérdés már „csak" az általa elérhető $v(N)$ érték minden játékos számára elfogadható elosztása. A feltételezett közös hasznosság-skálán mérve jelölje $x_i\, in\mathbb{R}$ az $i \in N$ játékos részesedését. Az egyszerűség kedvéért azt mondjuk, hogy x_i az i játékos *kifizetése*. Ekkor a v koalíciós függvény által leírt kooperatív döntési helyzet egy lehetséges kimenetelét egyszerűen a játékosok kifizetéseit tartalmazó $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^N$ vektorral jellemezzük. (Általában, a létrejövő koalíció-struktúra és a kifizetés-vektor együtt írja le a kimenetelt.)

1.22. definíció. Azt mondjuk, hogy az (N, v) játékban az $x = (x_1, \dots, x_n)$ kifizetés-vektor

- *elérhető* az S koalíció számára, ha $\sum_{i\in S} x_i \leq v(S)$;
- *elfogadható* az S koalíció számára, ha $\sum_{i\in S} x_i \geq v(S)$;
- *előnyösebb* az S számára mint az $y = (y_1, \dots, y_n)$ kifizetés-vektor, ha minden tagja számára határozottan jobb, azaz ha $x_i > y_i$ minden $i \in S$-re;
- *az S koalíción keresztül dominálja az $y = (y_1, \dots, y_n)$ kifizetés-vektort*, ha az S számára az x elérhető, ugyanakkor előnyösebb mint az y, (jelölés: $x\mathrm{dom}_S y$);
- *nem dominált az S koalíción keresztül*, ha nincs olyan az S számára elérhető z kifizetés-vektor, amire $z\mathrm{dom}_S x$;
- *dominálja az $y = (y_1, \dots, y_n)$ kifizetés-vektort*, ha létezik egy olyan S koalíció amelyre $x\mathrm{dom}_S y$, (jelölés: $x\mathrm{dom} y$);
- *nem dominált*, ha egyetlen S koalíción keresztül sem dominált.

Idézzük fel, hogy egy TU-játékban egy koalíció értékén általában azt a legnagyobb pénzmennyiséget értjük, amit a koalíció tagjai együttműködve mindenképpen meg tudnak szerezni, függetlenül a többi játékos cselekedétől. Ennek fényében nem igényel magyarázatot az elérhetőség (megvalósíthatóság) fogalma. Az elfogadhatóság értelmezéséhez esetleg még arra kell emlékeznünk, hogy egyik alapfeltevésünk szerint a szereplők bármelyik társulása létrejöhet, ha azt a tagjai szuverén döntéshozóként egyöntetűen akarják. Ezt a kettős „akarjuk-és-tudjuk” helyzetet ragadja meg a dominancia fogalma. A nagykoalíció létrejöttét nem lehet garantálni egy dominált kifizetés-vektorral, hiszen akkor vannak olyan szereplők, akik – mint racionális, informált és intelligens döntéshozók – nem lesznek restek egy önálló koalícióba szerveződni és egy mindegyikük számára előnyösebb kimenetelt elérni. Éppen ezért több megoldási koncepció bizonyos dominált kimenetelek kizárásán alapul.

A definíciókból azonnal adódik (1.14. feladat), a következő állítás.

1.23. állítás.

1. *Az $x \in \mathbb{R}^N$ kifizetés-vektor pontosan akkor elfogadható az S koalíció számára, ha az x az S-en keresztül nem dominált.*

2. *Tetszőleges $S \in \mathcal{N}$ esetén a* dom_S *egy szigorú parciális rendezés (azaz aszimmetrikus (s így irreflexív) és tranzitív reláció) a kifizetés-vektorok $\mathbb{R}^N$ halmazán.*

3. *A* dom *reláció mindig irreflexív, de még egy szuperadditív játékban sem feltétlenül aszimmetrikus vagy tranzitív.*

Fontos hangsúlyozni, hogy az elfogadhatóság definíciója csak az átváltható hasznosságokkal rendelkező kooperatív játékokban értelmes, míg a dominancia általánosabb modellekben is könnyen értelmezhető, csak az elérhetőséget és az előnyösséget kell alkalmasan meghatározni. Gondoljunk a házaspárosítási a 1.2. példára. Ott egy fiú és egy lány koalíciója meghiúsíthatja a közvetítő ajánlatát, ha mindkettőjüknek olyan partnert javasol, akikkel kevésbé szeretnének frigyre lépni, mint egymással.

A nagykoalíció számára elérhető kifizetés-konfigurációkon belül a koalíciók általi elfogadhatóság szempontjából a következő hierarchiát szokás felállítani.

1.24. definíció. Azt mondjuk, hogy az (N, v) játékban az $x = (x_1, \ldots, x_n)$ kifizetés-vektor

- *szétosztás*, ha $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$, vagyis az N számára elfogadható és elérhető;

- *elosztás*, ha $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$ és $x_i \geq v(\{i\})$ minden $i \in N$-re, azaz olyan szétosztás, amelyik minden egyszemélyes koalíció (vagyis játékos) számára elfogadható;

- *mag-elosztás*, ha $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$ és $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$ minden $S \in \mathcal{N}$-re, azaz olyan szétosztás, amelyik minden koalíció számára elfogadható.

Egy adott (N, v) játékban jelölje $\mathbf{I}^*(N, v)$ a szétosztások halmazát, $\mathbf{I}(N, v)$ az elosztások halmazát, és $\mathbf{C}(N, v)$ a mag-elosztások halmazát, röviden a játék magját.

Könnyen meggondolható (1.15. feladat) a következő állítás.

1.25. állítás.

1. *A szétosztások $\mathbf{I}^*(N, v)$ halmaza tetszőleges (N, v) játék esetén egy hipersík, tehát nem üres.*

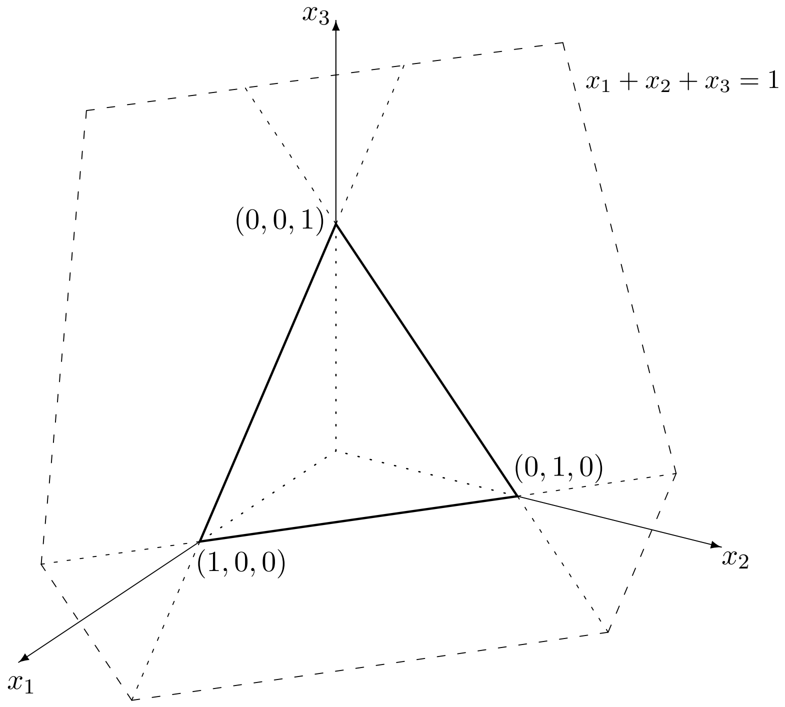
2. *Egy (N, v) játékban az elosztások $\mathbf{I}(N, v)$ halmaza pontosan akkor nem üres, ha $v(N) \geq \sum_{i \in N} v(\{i\})$ (ilyenkor azt mondjuk, hogy a koalíciós függvény gyengén lényeges, mivel $v^0(N) \geq 0$). Továbbá,*

   - *ha $v^0(N) = 0$, akkor $\mathbf{I}(N, v)$ egyetlen eleme a $\big(v(1), v(2), \ldots, v(n)\big)$ kifizetés-vektor;*

   - *ha $v^0(N) > 0$, akkor $\mathbf{I}(N, v)$ egy olyan $(n-1)$-dimenziós korlátos poliedrikus halmaz (poliéder), amelyiknek n extremális pontja van: a $\big(v(1) + v^0(N), v(2), \ldots, v(n)\big)$, $\big(v(1), v(2) + v^0(N), \ldots, v(n)\big)$, $\big(v(1), v(2), \ldots, v(n) + v^0(N)\big)$ kifizetés-vektorok.*

Példaképpen legyen (N, v) egy 3-szereplős $(0, 1)$-normalizált játék. Ekkor a szétosztások $\mathbf{I}^*(N, v)$ halmaza az $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ egyenlet megoldás-vektoraiból álló hipersík, és ebben az elosztások $\mathbf{I}(N, v)$ halmaza az $\big(1, 0, 0\big)$, $\big(0, 1, 0\big)$, $\big(0, 0, 1\big)$ csúcspontokkal rendelkező háromszög.
A 1.1. ábrán a szétosztás-hipersíkból csak egy hatszögletű darabot tüntettünk fel szaggatott vonallal, de ebből csak a pozitív térnyolcadba eső elosztás-háromszög látszik.

Az általunk egyelőre vizsgált helyzetekben (pl. a szuperadditív játékkal modellezhetőkben) tehát biztosan léteznek olyan kimenetelek amelyek stabilak a nagykoalíció illetve az egyedi szereplők minél előnyösebb pozícióra való törekvésével szemben. Hamarosan látni fogjuk, hogy az összes koalíció számára elfogadható kimenetelek (mag-elosztások) már nem feltétlenül léteznek.



1.1. ábra. A szétosztás-hipersík és az elosztás-háromszög

A továbbiak szempontjából fontos megállapítani, hogy miként változnak a fenti kifizetés halmazok akkor, ha egy játékról – például az elemzés megkönnyítése céljából – áttérünk egy vele stratégiailag ekvivalens játékra. Most – és persze a továbbiakban tárgyalandó megoldások esetén is – alapvető, hogy a modell önkényesen megválasztható paramétereitől a megoldás „lényegileg” ne függjön, és a „jogos transzformációval” nyert modell megoldásából ugyancsak „megengedhető” átalakítással megkaphassuk az eredeti modell megoldását. A megnyugtató választ mondja ki a következő állítás.

1.26. állítás. *A szétosztások, az elosztások és a mag-elosztások halmaza kovariáns a pozitív affin transzformációkkal, azaz ha a v és w játékok stratégiailag ekvivalensek mert van olyan $\alpha > 0$ és $\beta \in \mathbb{R}^n$ amikkel $w = \alpha v + \beta$, akkor $\mathbf{I}^*(w) = \alpha\mathbf{I}^*(v) + \beta$, $\mathbf{I}(w) = \alpha\mathbf{I}(v) + \beta$ és $\mathbf{C}(w) = \alpha\mathbf{C}(v) + \beta$.*

Bizonyítás. Egy $\sum_{i\in S} x_i \geq v(S)$ lineáris egyenlőtlenség megoldás-halmaza nyilvánvalóan tetszőleges $\alpha > 0$ és $\beta_i \in \mathbb{R}$ $(i \in N)$ esetén megegyezik a $\sum_{i\in S}(\alpha x_i + \beta_i) \geq \alpha v(S) + \sum_{i\in S} \beta_i$ lineáris egyenlőtlenség megoldás-halmazával. Mivel mindhárom kifizetés halmaz véges sok ilyen jellegű lineáris egyenlőtlenség megoldás-halmazának a metszete, az állítás azonnal adódik. □

1.3.1. Elosztások közötti dominancia

Az 1.23. állítás 1. kijelentése szerint a kifizetés-vektorok $\mathbb{R}^N$ halmazán az elfogadhatóság és a nem-domináltság ekvivalens fogalmak. Neumann és Morgenstern (1944) óta azonban szokás a lehetséges kimenetelek halmazát az elosztások halmazára korlátozni, eleve kizárva a nagykoalíció illetve az egyszemélyes koalíciók által reálisan javítható kifizetés-vektorokat. Domináltság alatt ilyenkor egy elosztás általi domináltságot értenek, eleve figyelmen kívül hagyva a minimális stabilitási elvárásokat sem teljesítő kimenetelek (a nem-elosztások) általi javíthatóságot. Ilyenkor az elfogadhatóság és a nem-domináltság már nem feltétlenül ekvivalensek.

Jelölje a (lényeges) v játékban az elosztások által nem dominált elosztások halmazát $\mathbf{C}^I(v)$, azaz $\mathbf{C}^I(v) = \{x \in \mathbf{I}(v) : \nexists y \in \mathbf{I}(v),\ y\mathrm{dom}x\}$. Egyszerűen adódik (1.16. feladat) a következő állítás.

1.27. állítás.

1. *Tetszőleges v játék esetén $\mathbf{C}(v) \subseteq \mathbf{C}^I(v)$, de a tartalmazás lehet szigorú is.*

2. *Ha $v(N) \geq v(S) + \sum_{j \in N \setminus S} v(\{j\})$ minden $S \subseteq N$-re, akkor $\mathbf{C}(v) = \mathbf{C}^I(v)$.*

3. *Ha $\mathbf{C}(v) \neq \mathbf{C}^I(v)$, akkor szükségképpen $\mathbf{C}(v) = \emptyset$.*

Szerencsére a második pontban szereplő speciális 0-monotonitás a nagykoalíció létrejöttét feltevésünk szerint biztosító játékokban mindig teljesül. Egyelőre tehát nem kell különbséget tennünk a kétféle nem-domináltság között, és jellemezhetjük egy játék magját úgy is, mint a nem-dominált elosztások halmazát.

Röviden kitérünk még a hagyományos Neumann-Morgenstern-i megközelítés egy fontos kérdésére. Azt mondjuk, hogy a v és w lényeges játékok *izomorfak*, ha létezik olyan $f : \mathbf{I}(v) \to \mathbf{I}(w)$ bijektív leképezés, ami megőrzi a koalíciókkénti dominancia-relációt, azaz minden $x, y \in \mathbf{I}(v)$-re és minden $S \in \mathcal{N}$-re $x\mathrm{dom}_S^v y \Leftrightarrow f(x)\mathrm{dom}_S^w f(y)$. Nyilvánvaló, hogy az izomorfia egy ekvivalencia-reláció az N játékoshalmazon értelmezett koalíciós függvények (játékok) $\mathcal{G}^N$ halmazán. Mint láttuk (1.10. állítás 1. pont), a stratégiai ekvivalencia szintén a $\mathcal{G}^N$ egy osztályozását adja. A két reláció közötti kapcsolatot mondja ki a következő tétel.

1.28. tétel (McKinsey (1950)). *Két lényeges játék pontosan akkor izomorf, ha stratégiailag ekvivalensek.*

Bizonyítás. Rögtön adódik, hogy ha v és w stratégiailag ekvivalensek, mert van olyan $\alpha > 0$ és $\beta \in \mathbb{R}^N$, hogy $w = \alpha v + \beta$, akkor egyrészt $\mathbf{I}(w) = \alpha \mathbf{I}(v) + \beta$, másrészt az $f(x) = \alpha x + \beta$ olyan bijekció az $\mathbf{I}(v)$ és $\mathbf{I}(w)$ között, ami megőrzi a dominancia-relációt, tehát v és w izomorfak is.

A megfordítás bizonyítása azonban már korántsem ilyen egyszerű, lásd McKinsey (1950) cikkét. □

1.3.2. Feladatok

1.14. feladat. Lássuk be az 1.23. állításokat!

1.15. feladat. Lássuk be az 1.25. állításokat!

1.16. feladat. Lássuk be az 1.27. állításokat!

2. fejezet

A mag

Egy n-személyes játékban az elosztáshalmazhoz hasonlóan (vö. 1.25. állítás 2. pont) a mag is egy korlátos poliedrikus halmaz (poliéder) az $\mathbb{R}^n$-ben, s így előáll mint véges sok extremális pontjának a konvex burka. Az elosztáshalmaztól eltérően azonban a nemüresség kérdése már nem olyan egyszerű, az extremális pontjainak megadásától már nem is beszélve.

Nézzük a következő példát, ami egy olyan 3-szereplős szavazási helyzetet modellez, amelyben a döntéshozatal egyszerű többségi alapon, azaz a szavazók több mint felének egyetértése alapján történik (lásd 1.14. példa).

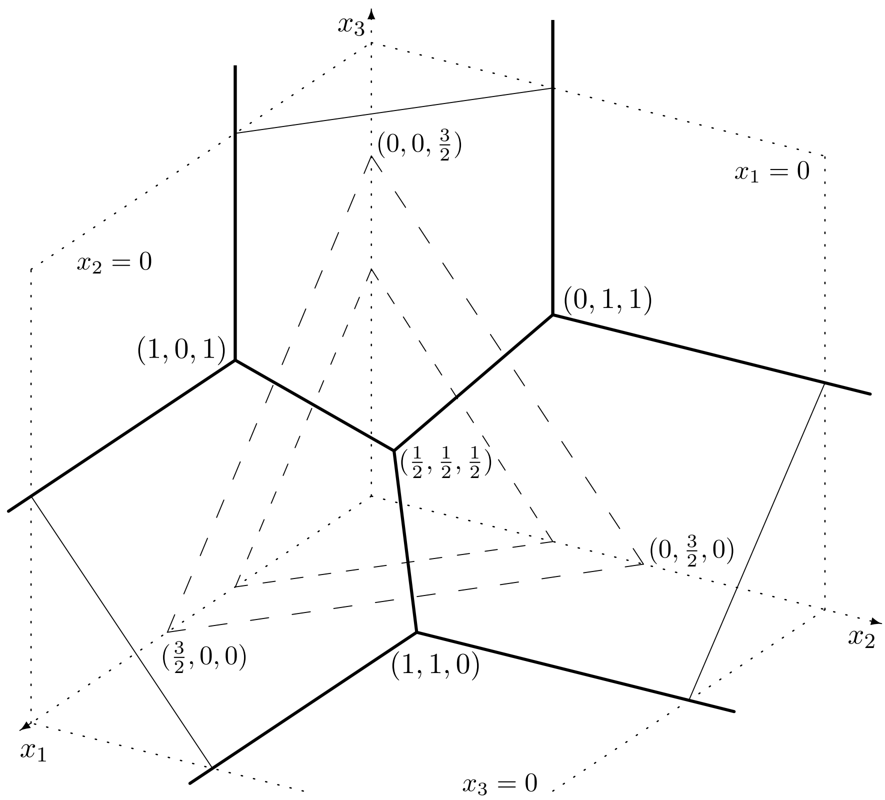
2.1. példa (3-személyes egyszerű többségi játék)**.** A játékosok halmaza $N = \{1, 2, 3\}$, a koalíciós függvény pedig

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad |S| \geq 2 \\ 0, & \text{ha} \quad |S| \leq 1 \end{cases} .$$

A játék szuperadditív, az elosztáshalmaz az $\mathbb{R}^3$-beli egységszimplex. Ezen belül viszont egy (x_1, x_2, x_3) elosztás csak akkor elfogadható a kétszemélyes koalíciók mindegyike számára, ha $x_1 + x_2 \geq 1$, $x_1 + x_3 \geq 1$ és $x_2 + x_3 \geq 1$ is teljesül. E három feltételt összegezve kapjuk, hogy $x_1 + x_2 + x_3 \geq 3/2$ kell legyen, ami pedig a nagykoalíció számára nem elérhető. Ebben a játékban tehát nincs mag-elosztás.

Az előző példában a mag azért üres, mert a nagykoalíció értéke „nem elég nagy" a többi koalíció értékéhez képest. Könnyű látni, hogy ha 3/2-re növeljük a $v(N)$-t, de nem változtatunk a többi koalíció értékén, akkor az így kapott 3-személyes, szimmetrikus, 0-normalizált és szuperadditív (de persze már nem egyszerű) játékban a mag nemüressé válik, mégpedig egyetlen elemként az $(1/2, 1/2, 1/2)$ elosztást tartalmazza.

Ezt szemlélteti a 2.1. ábra, ahol az „eseményeket" a pozitív térnyolcad egy távoli magaslati pontjából nézzük. A játékok 0-normalizáltsága miatt látókö-

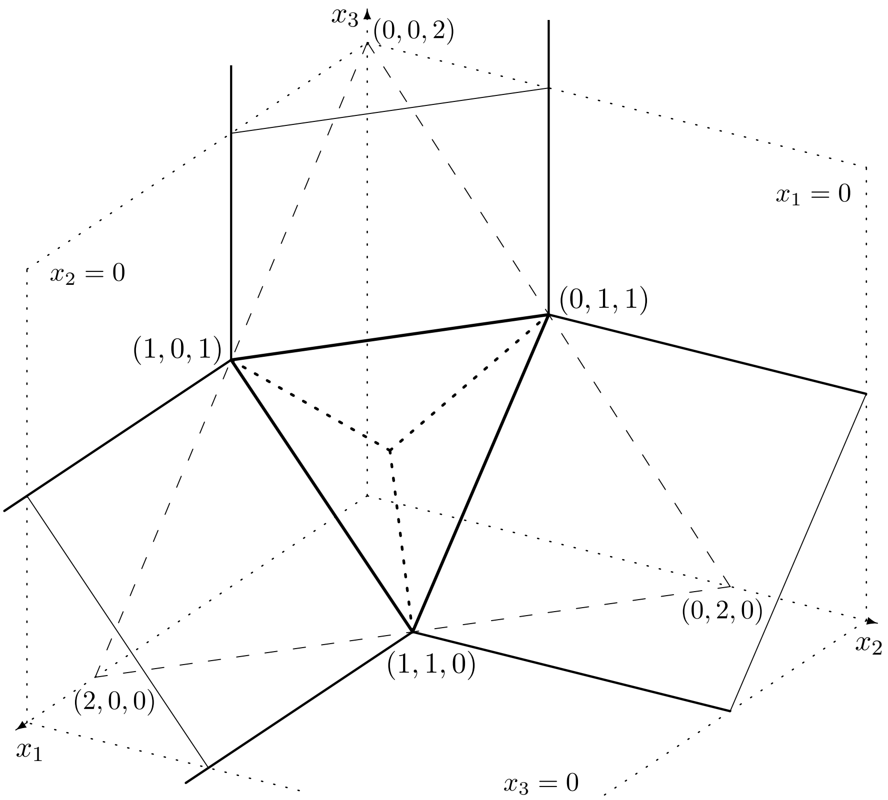


2.1. ábra. Az elosztás-háromszög $v(N) = 1$ és $v(N) = \frac{3}{2}$ esetén

rünk a pozitív térnyolcadra korlátozódik.De ezen belül sem látunk mindent. A koordináta-tengelyeket és az origót eltakarják előlünk a kétszemélyes koalíciók elfogadási szintjeit megjelenítő, a tengelyekkel párhuzamos síkok, amik egymásból egy nyílszerű alakzatot vágnak ki. A szaggatottan körvonalazott elosztás-háromszögek sem látszanak, egészen addig, amíg $v(N) = 3/2$-re nem emelkedik és a felénk tartva növekedő elosztás-háromszögek el nem érik a „nyilak” közös $(1/2, 1/2, 1/2)$ metszéspontját. Ekkor válik a mag nem üressé.

Amennyiben még tovább növeljük a nagykoalíció értékét, akkor a mag az elosztáshalmaz egy teljes $(n-1) = 2$-dimenziós részhalmazává, a játékosok szimmetrikus szerepe miatt $3/2 < v(N) \leq 2$ esetén egy szabályos háromszöggé, míg $2 < v(N)$ esetén egy szabályos hatszöggé válik.

A 2.2. ábra a $v(N) = 2$ esetet mutatja. Az elosztás-háromszögnek csak a közepe látható, ez a „fejjel lefelé” álló szabályos háromszög a mag. A $3/2 < v(N) < 2$ esetekben a mag szintén ilyen fordított állású, de az $(1/2, 1/2, 1/2)$ pontból perspektivikusan $\dfrac{v(N) - 3/2}{2 - 3/2}$-szeresére lekicsinyített



2.2. ábra. Az elosztás-háromszög és a mag $v(N) = 2$ esetén

háromszög lenne, aminek a csúcsai nem érnék el az origóból perspektivikusan $\dfrac{v(N)}{2}$-szeresére lekicsinyített elosztás-háromszög oldalait. Amennyiben viszont $v(N)$ meghaladná 2-őt, az elosztás-háromszög oldalfelező pontjai is a látható tartományba kerülnének, és így a mag egy olyan szabályos hatszöggé válna, amelynek mindegyik csúcsa az elosztás-háromszög oldalán fekszik.

Vizsgáljuk meg általánosan is a mag nem ürességének kérdését. A koalíciók értékéhez képest mi a nagykoalíció értékének az a szintje, ami már biztosan elosztható az összes koalíció számára elfogadható módon, és mi az, ami mindenképpen szükséges egy ilyen elosztás létezéséhez.

2.1. A mag és a kiegyensúlyozottság

A koalíciók megadásának egyik módja a tagsági vektorok használata.

2.2. definíció. Az $\boldsymbol{e}^S \in \{0,1\}^N$ vektorra azt mondjuk, hogy az $S \subseteq N$ koalíció *tagsági vektora*, ha $i \in S$ esetén $\boldsymbol{e}_i^S = 1$, míg $i \notin S$ esetén $\boldsymbol{e}_i^S = 0$.

Követve a szokásos írásmódot, jelölje $x(S) := \sum_{i \in N} \boldsymbol{e}_i^S x_i$ az x által az S koalíció tagjainak előírt összkifizetést. Gyakran hasznos $x(S)$-et úgy is értelmezni, mint az $x \in \mathbb{R}^N$ vektor által generált additív koalíciós függvénynek az $S \subseteq N$ koalícióra felvett értékét.

A mag-elosztások létezése egy lineáris egyenlőtlenségekből álló rendszer megoldhatóságával jellemezhető. Egy adott (N, v) játék esetén tekintsük a következő lineáris programozási feladatot:

$$\text{magLP}(N,v): \quad \begin{array}{rrcll} \min & \boldsymbol{e}^N \cdot x & & & \\ & \boldsymbol{e}^S \cdot x & \geq & v(S) & S \in \mathcal{N} = 2^N \setminus \{\emptyset\} \\ & x & \in & \mathbb{R}^N & \end{array} \tag{2.1}$$

A magLP-nek nyilván mindig van lehetséges megoldása, sőt, mivel a célfüggvény alulról korlátos (hiszen $\boldsymbol{e}^N \cdot x \geq v(N)$), mindig van optimális megoldása is. Az optimum értékét $z^*(N, v)$-vel jelölve rögtön adódik, hogy

$$\mathbf{C}(N, v) \neq \emptyset \Leftrightarrow z^*(N, v) = v(N). \tag{2.2}$$

A mag nemürességének kérdése tehát egyetlen (igaz, a játékosok számában exponenciálisan sok feltételt tartalmazó) lineáris program megoldásával eldönthető.

2.3. példa (A lóvásár játék magja)**.** A lóvásár játékban (1.6. példa) akkor és csak akkor van mag-eloszlás, ha a

$$\begin{array}{rrcr} \min & x_A + x_B + x_C & & \\ & x_A + x_B + x_C & \geq & 100 \\ & x_A + x_B & \geq & 80 \\ & x_A + x_C & \geq & 100 \\ & x_B + x_C & \geq & 0 \\ & x_A, x_B, x_C & \geq & 0 \end{array} \tag{2.3}$$

lineáris programozási feladat optimumértéke nem több, mint $v(ABC) = 100$. Mivel az $(x_A = 100, x_B = 0, x_C = 0)$ kifizetés-vektor mindegyik koalíció számára elfogadható (vagyis az LP egy lehetséges megoldása), ugyanakkor elérhető a nagykoalíció számára (azaz $x(N) \leq v(N)$), így egy mag-elosztás. De nem az egyetlen. „Ránézésre” látszik (2.1 feladat), hogy a játék magja (azaz az LP optimális megoldásainak halmaza) az $\{(x_A, x_B = 0, x_C = 100 - x_A) \mid 80 \leq x_A \leq 100\}$ szakasz. A mag-elosztások tehát azokhoz a kimenetelekhez tartoznak, amelyekben az eladó valamilyen 80 és 100 tallér közötti áron eladja a lovát a nagyobb áldozatra kész vevőnek. A „gyengébbik” vevő ugyanakkor egyáltalán nem részesül az elért többletből, annak ellenére, hogy az eladó az ő jelenléte miatt tudja elérni a legalább 80 talléros árat az „erősebbik” vevővel szemben.

Térjünk vissza az általános gondolatmenethez, és tekintsük a magLP(N,v) duálját:

$$\text{duál-magLP}(N,v): \quad \begin{array}{lll} \max & \sum_{S\in\mathcal{N}} \lambda_S\, v(S) & \\ & \sum_{S\in\mathcal{N}} \lambda_S\, \boldsymbol{e}^S & = \ \boldsymbol{e}^N \\ & \lambda_S & \geq \ 0 \qquad S\in\mathcal{N} \end{array} \tag{2.4}$$

Mivel a duál-magLP(N,v) lehetséges megoldásainak halmaza független a v koalíciós függvénytől, sőt igazából csak a játékosok számától függ, így érdemes egy kicsit önmagában is megvizsgálni.

2.4. definíció. Jelölje $\Lambda(N)$ a duál-magLP (2.4) lehetséges megoldásainak halmazát. Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{N}$ egy *kiegyensúlyozott koalíciórendszer* az N alaphalmazon, ha van olyan $(\lambda_S)_{S\in\mathcal{N}}\in\Lambda(N)$ *súlyprofil*, amelynek éppen $\mathcal{S}$ a tartója, azaz $\mathcal{S}=\{S\in\mathcal{N}\mid \lambda_S>0\}$. Egy *minimális kiegyensúlyozott koalíciórendszer* egy olyan kiegyensúlyozott koalíciórendszer, amelynek semelyik valódi része nem kiegyensúlyozott.

Érdemes meggondolni (2.2. feladat), hogy igaz a következő állítás.

2.5. állítás. *Tetszőleges nemüres, véges N halmazra legyen $\Lambda(N)$ a (2.4) LP lehetséges megoldásainak halmaza.*

1. *Az N halmazon kiegyensúlyozott minimális koalíciórendszerek pontosan a $\Lambda(N)$ poliéder extremális pontjainak tartói; ezek között vannak az N partíciói, amiknek a súly-profiljai pontosan a $\Lambda(N)$ poliéder* 0-1 *koordinátájú (csúcs)pontjai.*

2. *Minden kiegyensúlyozott koalíciórendszer a benne lévő minimális kiegyensúlyozott koalíciórendszerek uniója, mivel $\Lambda(N)$ minden eleme az extremális pontjainak konvex kombinációja.*

Szemléltetésképpen jöjjön ismét a lóvásár játék.

2.6. példa. A lóvásár játékban (1.6. példa) a (2.4) duál-magLP a következő:

$$\begin{array}{lllllllll} \max\ 0\lambda_A & +\ 0\lambda_B & +\ 0\lambda_C & +\ 80\lambda_{AB} & +\ 100\lambda_{AC} & +\ 0\lambda_{BC} & +\ 100\lambda_{ABC} & & \\ \lambda_A & & & +\ \lambda_{AB} & +\ \lambda_{AC} & & +\ \lambda_{ABC} & = 1 \\ & \lambda_B & & +\ \lambda_{AB} & & +\ \lambda_{BC} & +\ \lambda_{ABC} & = 1 \\ & & \lambda_C & & +\ \lambda_{AC} & +\ \lambda_{BC} & +\ \lambda_{ABC} & = 1 \\ \lambda_A\ , & \lambda_B\ , & \lambda_C\ , & \lambda_{AB}\ , & \lambda_{AC}\ , & \lambda_{BC}\ , & \lambda_{ABC} & \geq 0 \end{array} \tag{2.5}$$

Könnyű ellenőrizni (2.3. feladat), hogy a lehetséges megoldáshalmaz extremális csúcspontjai, illetve a hozzájuk tartozó minimális kiegyensúlyozott koalíciórendszerek (az extremális súlyvektorok tartói) a következők:

$$\begin{array}{c} (\ \lambda_A\ ,\ \lambda_B\ ,\ \lambda_C\ ,\ \lambda_{AB}\ ,\ \lambda_{AC}\ ,\ \lambda_{BC}\ ,\ \lambda_{ABC}) \\ \hline (\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 1\ ) \\ (\ 1\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,\ 0\ ) \\ (\ 0\ ,\ 1\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,\ 0\ ,\ 0\ ) \\ (\ 0\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ) \\ (\ 1\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ) \\ (\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ 0\ ) \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \{ABC\} \\ \{A, BC\} \\ \{B, AC\} \\ \{C, AB\} \\ \{A, B, C\} \\ \{AB, AC, BC\} \end{array} \tag{2.6}$$

A lineáris programozás elméletéből tudjuk, hogy itt a célfüggvény a minimumát egy extremális súlyvektornál fel fogja venni. Az elsőként felsorolt triviális megoldás miatt az optimumérték legalább $v(ABC) = 100$. A kérdés az, hogy van-e olyan nemtriviális extremális súlyprofil, amivel ennél nagyobb célfüggvényértéket kapunk. Egyszerű behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy nincs, a minimum értéke tehát pontosan $v(ABC) = 100$. Ezt persze a (2.3) primál-magLP megoldásából és a lineáris programozás erős dualitási tételéből már tudtuk, célunk most főleg egy általánosítható gondolatmenet fölvázolása volt. Kiderült ugyanakkor, hogy most két optimális súlyprofil is van: a triviális $\{ABC\}$ mellett a nemtriviális $\{B, AC\}$ partícióhoz tartozó súlyvektor is optimális bázismegoldás.

Mivel a (2.5) duál-magLP lehetséges megoldásainak $\Lambda(N)$ halmaza nem függ a koalíciós függvénytől, a (2.6) extremális súlyvektorok ismeretében bármely 3-szereplős játékra meghatározhatjuk a primál-duál magLP-k közös optimumértékét, és eldönthetjük a mag-elosztás(ok) létezésének kérdését. Például, a 3-szereplős egyszerű többségi játékban (2.1. példa) a duál-magLP egyedüli optimális megoldása az egyetlen nem partícióhoz tartozó (a (2.6)-ban utolsóként felsorolt) súlyprofil, az optimumérték pedig $\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}$. Ez alapján ismét megállapíthatjuk, hogy legalább $\frac{3}{2}$-re kell emelni a nagykoalíció értékét (a többi koalíciós érték megtartása mellett) ahhoz, hogy a játékban legyen mag-elosztás. Másrészről azt is láttuk, hogy abban az esetben már van mag-elosztás.

Az előbbi példák alapján azt sejtjük, hogy egy játék magja pontosan akkor nem üres, ha nincs egy olyan (extremális) súlyprofil, amivel a koalíciós értékeket kombinálva a nagykoalíció értékét meghaladó értéket kapunk. Ezt a tulajdonságot formalizálja a

2.7. definíció. Azt mondjuk, hogy az (N, v) egy *kiegyensúlyozott játék*, ha

$$v(N) \geq \sum_{S \in \mathcal{N}} \lambda_S v(S) \forall (\lambda_S)_{S \in \mathcal{N}} \in \Lambda(N). \tag{2.7}$$

Másképpen fogalmazva, az (N, v) játék akkor kiegyensúlyozott, ha a duál-magLP(N, v) optimumértéke legfeljebb $v(N)$. Ekkor az optimumérték persze pontosan $v(N)$, hiszen a triviális $\{N\}$ partícióhoz tartozó ($\lambda_N = 1, \lambda_S = 0$ $S \neq N$) triviális lehetséges megoldásra a célfüggvény értéke $v(N)$. A lineáris programozás erős dualitási tétele szerint a duál-magLP(N, v) optimumértéke szintén $z^*(N, v)$, a (2.2) ekvivalencia alapján adódik tehát a Bondareva (1963) és Shapley (1967) nevéhez egyaránt köthető

2.8. tétel (Bondareva – Shapley). *Egy TU-játék magja pontosan akkor nem üres, ha a játék kiegyensúlyozott.*

A lehetséges megoldáshalmaz poliedrikussága és a célfüggvény linearitása miatt ugyan a (2.7)-beli egyenlőtlenséget elegendő csak az extremális súlyprofilokra megkövetelni, azonban mint az a következő alfejezetben kiderül, ezek ellenőrzése gyakorlatilag csak kis méretű játékok esetén kivitelezhető. Érdemes ugyanakkor meggondolni (2.4. feladat) Shapley (1967) következő észrevételét.

2.9. állítás. *Egy szuperadditív játék kiegyensúlyozottságához elegendő a* (2.7)*-beli egyenlőtlenséget csak az ún. valódi minimális kiegyensúlyozott koalíciórendszerekre megkövetelni, azaz olyanokra, amelyekben nincs két diszjunkt koalíció.*

A lóvásár játék például szuperadditív, így a 0-1 értékű súlyvektorok a nagykoalíció értékénél nagyobb célfüggvényértéket nem adhatnak. Elegendő tehát csak a (2.6)-ban az utolsóként felsorolt súlyprofillal és a hozzá tartozó egyetlen valódi minimális kiegyensúlyozott koalíciórendszerrel ellenőriznünk a (2.7)-beli egyenlőtlenséget. Ez a megállapítás persze megtehető minden 3-szereplős szuperadditív játékra is, lásd a 2.6. feladatot.

2.1.1. Feladatok

2.1. feladat. Lássuk be, hogy a lóvásár játék magja (a (2.3) lineáris programozási feladat optimális megoldásainak halmaza) az $\{(x_A, x_B = 0, x_C = 100 - x_A) : 80\ leq x_A \leq 100\}$ szakasz! Rajzoljuk fel az elosztás-háromszöget és ebben a magot!

2.2. feladat. Igazoljuk a 2.5. állításokat!

2.3. feladat. Lássuk be, hogy a lóvásár játékban a (2.5) duál-magLP lehetséges megoldáshalmazának extremális pontjai a (2.6) alatt felsorolt súlyvektorok! Gondoljuk végig, hogy mit mondanak a 2.5. állítások ebben az esetben!

2.4. feladat. Igazoljuk a 2.9. állítást!

2.5. feladat. Igazoljuk, hogy egy kiegyensúlyozott (N, v) játékban $v(N) \geq v(S) + v(N \setminus S)$ minden $S \subseteq N$-re! Adjunk meg egy olyan 3-szereplős kiegyensúlyozott játékot, amelyik nem szuperadditív! Van-e olyan 2-szereplős kiegyensúlyozott játék, amelyik nem szuperadditív?

2.6. feladat. Legyen $(N = \{i, j, k\}, v)$ egy 3-szereplős szuperadditív játék. Igazoljuk, hogy $\mathbf{C}(N, v) \neq \emptyset \Leftrightarrow v(ij) + v(ik) + v(jk) \leq 2v(ijk)$!

2.2. Minimális kiegyensúlyozott rendszerek

Röviden nézzük meg, hogy kis elemszámú halmazokon melyek a nemtriviális, azaz a legalább kételemű minimális kiegyensúlyozott koalíciórendszerek. A mi meghatározásunk szerint az N halmazon az $\{N\}$ partíció is egy minimális kiegyensúlyozott koalíciórendszer, de a játék kiegyensúlyozottságának szempontjából nyilván érdektelen.

Egy $n = 2$ elemű halmazon az egyetlen nemtriviális minimális kiegyensúlyozott koalíciórendszer a halmaz egyetlen nemtriviális (azaz legalább kételemű) partíciója.

Legyen $n = 3$. A négy nemtriviális partíción kívül egyetlen nemtriviális minimális kiegyensúlyozott koalíciórendszer van, mégpedig:

λ_S	1/2	1/2	1/2
	1	1	0
$\boldsymbol{e}^S$	1	0	1
	0	1	1

Ez egy *valódi* minimális kiegyensúlyozott koalíciórendszer, hiszen semelyik két eleme sem diszjunkt. Egyébként pedig az atomizált partíció elemeinek (az egyszemélyes koalícióknak) a komplementereiből áll. Könnyű meggondolni (2.7. feladat), hogy ez általában is igaz.

2.10. állítás. *Tetszőleges nemtriviális kiegyensúlyozott koalíciórendszer minden elemét a komplementerére cserélve szintén (nemtriviális) kiegyensúlyozott koalíciórendszert kapunk.*

Legyen most $n = 4$. Ekkor már 41 nemtriviális minimális kiegyensúlyozott koalíciórendszer van, ebből 14 partíció, 11 valódi, a többi 16 pedig vegyes (bizonyos elempárjai diszjunktak, mások nem). A valódiak a következő három típus egyikébe tartoznak:

$$\begin{array}{c|cccc} \lambda_S & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \boldsymbol{e}^S & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} \lambda_S & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 & 1 & 0 \\ \boldsymbol{e}^S & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} \lambda_S & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \boldsymbol{e}^S & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Az egyes típusokba rendre 1, 6, illetve 4 rendszer tartozik, amelyeket a játékosok permutációival kapunk. A 2.9. állítás miatt egy 4-szereplős szuperadditív játék kiegyensúlyozottságának eldöntéséhez elegendő a (2.7)-beli egyenlőtlenséget erre a 11 valódi minimális kiegyensúlyozott koalíciórendszerre ellenőrizni. Amennyiben a játék még szimmetrikus is, a feladat még egyszerűbb, a 2.8. feladat mondja meg, hogy pontosan micsoda.

A minimális kiegyensúlyozott koalíciórendszerek száma az alaphalmaz elemei számának növekedésével iszonyú gyorsan emelkedik. Ez már a partíciók számára is igaz, de Shapley (1967) szerint $n = 5$-re megjelennek az ún. irreducibilis rendszerek is, amelyek direkt módon nem kaphatók meg kisebb elemszámú halmazok minimális kiegyensúlyozott koalíciórendszereiből ($n \leq 4$-re irreducibilisek nincsenek). Csak irreducibilis rendszerből 234 db van $n = 5$-re, míg $n = 6$-ra már 71805. Peleg (1965) algoritmusával egyébként tetszőleges n-re generálhatók a minimális kiegyensúlyozott koalíciórendszerek az $n - 1$ elemű halmaz minimális kiegyensúlyozott koalíciórendszereinek felhasználásával.

2.2.1. Feladatok

2.7. feladat. Lássuk be a 2.10. állítást!

2.8. feladat. A 4-szereplős szimmetrikus szuperadditív (N, v) játékban jelölje v_k a k-személyes koalíciók értékét. Igazoljuk, hogy a játék pontosan akkor kiegyensúlyozott, ha $4v_3 \leq 3v_4$! Miért hagyhatók el a valódi minimális kiegyensúlyozott koalíciórendszerek másik két típusához tartozó $v_2 + 2v_3 \leq 2v_4$ illetve $3v_2 + 2v_3 \leq 3v_4$ egyenlőtlenségek?

2.3. Konvex játékok magja

Célunk ebben a részben az, hogy konstruktív módon megmutassuk: konvex játékokban a mag sosem üres, sőt az elosztáshalmaz egy „elég nagy” és

„szabályos szerkezetű" része. Ehhez szükségünk van bizonyos előkészítésre.

Legyen $\theta : N \to \{1,\dots,n\}$ a játékosok egy sorbarendezése, tehát az i játékos pozíciója a θ szerinti sorendben $\theta(i)$, míg $\theta^{-1}(k)$ adja meg, hogy melyik játékos áll a k-adik helyen a sorban. Jelölje Θ_N az N halmaz összes lehetséges sorbarendezésének halmazát. Egy adott $\theta \in \Theta_N$ sorrendben az i játékost megelőző játékosok halmazát jelölje $P_i^\theta = \{j \in N \mid \theta(j) < \theta(i)\}$, míg az első k játékos halmazát $Q_k^\theta = \{j \in N \mid \theta(j) \leq k\}$.

Példaképpen legyen $N = \{a,b,c,d\}$ és rendezze θ a játékosokat a $\langle b,d,a,c\rangle$ sorrendbe, vagyis legyen $\theta(a) = 3$, $\theta(b) = 1$, $\theta(c) = 4$, $\theta(d) = 2$. Ekkor $P_a^\theta = \{b,d\} = Q_2^\theta$, $P_b^\theta = \emptyset$, $P_c^\theta = \{b,d,a\} = Q_3^\theta$ és $P_d^\theta = \{b\} = Q_1^\theta$. Persze mindig $Q_n^\theta = N$.

Tegyük fel, hogy a játékosok egyenként társulnak a többiekhez, mégpedig egy adott $\theta \in \Theta_N$ sorrend szerint. Amennyiben egy csatlakozó játékos rögtön és teljes egészében megkapja az általa előidézett érték-növekményt, akkor az i játékos kifizetése a v játékban éppen $x_i^\theta(v) = v(P_i^\theta \cup \{i\}) - v(P_i^\theta)$ lesz. Tekintsük az így definiált komponensekből álló

$$x^\theta(v) = \left(x_i^\theta(v) = v(P_i^\theta \cup \{i\}) - v(P_i^\theta)\right)_{i\in N} \in \mathbb{R}^N$$

kifizetés-vektort.

2.11. definíció. Egy (N,v) játékban a szereplők egy $\theta \in \Theta_N$ sorrendjéhez tartozó *határhozzájárulás-vektor* alatt az egyéni $x_i^\theta(v)$ határhozzájárulásokból álló kifizetés-vektort értjük.

Könnyen belátható (2.9. feladat) a következő állítás.

2.12. állítás. *Bármely v játékban és bármely $\theta \in \Theta_N$-re,*

1. *$x^\theta(v)$ szétosztás, sőt minden $k = 1,\dots,n$-re $\sum_{i\in Q_k^\theta} x_i^\theta(v) = v(Q_k^\theta)$;*

2. *ha $x^\theta(v) \in \mathbf{C}(v)$, akkor $x^\theta(v) \in \mathrm{ext}\mathbf{C}(v)$, azaz $x^\theta(v)$ a mag extremális pontja.*

Szemléltetésképpen vegyük a *Lóvásár* játékot (1.6. példa) és a szereplők $\theta(A) = 1$, $\theta(B) = 2$ és $\theta(C) = 3$ sorrendjét. Ekkor az A (az eladó) határhozzájárulása $x_A^\theta = v(A) - v(\emptyset) = 0$, a B (a „gyengébb" vevő) határhozzájárulása $x_B^\theta = v(AB) - v(A) = 80$, míg a C (az „erősebb" vevő) határhozzájárulása $x_C^\theta = v(ABC) - v(AB) = 20$. Az $x^{ABC} = (0,80,20)$ határhozzájárulás-vektor szétosztás ugyan (sőt elosztás is, hiszen a játék 0-monoton, lásd a 2.10.feladatot), de nem mag-elosztás, mert $v(AC) = 100 > 0 + 20 = x_A^\theta + x_C^\theta$. Ugyanez mondható el az $x^{ACB} = (0,0,100)$ határhozzájárulás-vektorról is. Ugyanakkor, az $x^{BAC} = (80,0,20)$ illetve az $x^{BCA} = x^{CAB} = x^{CBA} = (100,0,0)$

határhozzájárulás-vektorok mag-elosztások is, sőt a 2.3. példában megállapítottak szerint tényleg a mag csúcspontjai.

Bármilyen n-személyes játékban tekinthetjük az $n!$ lehetséges sorbarendezéshez tartozó határhozzájárulás-vektorokat, amik persze nem feltétlenül mind különbözőek.

2.13. definíció. Egy v játék *Weber halmaza* alatt a határhozzájárulás-vektorok konvex kombinációinak halmazát értjük, azaz

$$\mathbf{W}(v) = \text{conv}\{x^\theta(v) \mid \theta \in \Theta_N\}.$$

E meghatározásból nyilvánvalóan adódik a következő állítás.

2.14. állítás. *A Weber halmaz bármely játékban egy nemüres poliéder.*

A Weber halmaz és a mag viszonyát mondja ki a következő eredmény. Bizonyításában Weber (1978) a játékosok száma szerinti indukciót használt, mi Derks (1992) frappáns gondolatmenetét ismertetjük.)

2.15. tétel (Weber (1978))**.** *Bármely v játékban, $\mathbf{C}(v) \subseteq \mathbf{W}(v)$.*

Bizonyítás. Legyen (N, v) egy tetszőleges, de rögzített játék. Tegyük fel, hogy ebben a játékban létezik egy $x \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{W}$. Ekkor az $\mathbb{R}^N$-beli x pont hipersíkkal elválasztható a $\mathbf{W}$ kompakt, konvex halmaztól, azaz létezik egy $y \in \mathbb{R}^N$, $y \neq 0$ vektor és egy $\alpha \in \mathbb{R}$ szám úgy, hogy $y \cdot x < \alpha$, de $y \cdot w \geq \alpha$ minden $w \in \mathbf{W}$-re.

Legyen $\theta \in \Theta_N$ egy olyan sorbarendezés, amire $y_{\theta^{-1}(1)} \geq y_{\theta^{-1}(2)} \geq \ldots \geq y_{\theta^{-1}(n)}$, vagyis ami az y koordinátáinak nem-növekvő sorrendjébe rendezi a játékosokat. Legyen $w^\theta \in \mathbf{W}$ a θ-hoz tartozó határhozzájárulás-vektor. Ekkor

$$
\begin{aligned}
\alpha &\le y \cdot w^\theta \\
&= \sum_{k=1}^{n} y_{\theta^{-1}(k)} \Big(v(Q_k^\theta) - v(Q_{k-1}^\theta) \Big), \Big[\text{ ahol } Q_0^\theta := \emptyset \Big] \\
&= y_{\theta^{-1}(n)} v(N) + \sum_{k=1}^{n-1} \Big(y_{\theta^{-1}(k)} - y_{\theta^{-1}(k+1)} \Big) v(Q_k^\theta) \\
&\le y_{\theta^{-1}(n)} x(N) + \sum_{k=1}^{n-1} \Big(y_{\theta^{-1}(k)} - y_{\theta^{-1}(k+1)} \Big) x(Q_k^\theta) \\
&\quad \Big[\text{ mert } x \in \mathbf{C}, \text{ és } y_{\theta^{-1}(k)} - y_{\theta^{-1}(k+1)} \ge 0 \ (1 \le k \le n-1) \Big] \\
&= \sum_{k=1}^{n} y_{\theta^{-1}(k)} \Big(x(Q_k^\theta) - x(Q_{k-1}^\theta) \Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} y_{\theta^{-1}(k)} x_{\theta^{-1}(k)} \\
&= y \cdot x < \alpha,
\end{aligned}
$$

ami ellentmondás. Tehát semmilyen játékban nem létezhet mag-elosztás a Weber-halmazon kívül. □

A bizonyítás lényege a diszjunkt, konvex, kompakt halmazok hipersíkkal történő elválaszthatósága. A technikai jellegű átrendezések szemléltetése céljából legyen $N = \{a, b, c, d\}$, és tegyük fel, hogy a szeparáló hipersík normálvektorának koordinátáira $y_b \ge y_d \ge y_a \ge y_c$ teljesül. Ekkor $\theta^{-1}(1) = b$, $\theta^{-1}(2) = d$, $\theta^{-1}(3) = a$, $\theta^{-1}(4) = c$, tehát

$$
\begin{aligned}
\alpha &\le y \cdot w^\theta \\
&= y_b v(b) + y_d \big(v(bd) - v(b) \big) + y_a \big(v(bda) - v(bd) \big) + y_c \big(v(N) - v(bda) \big) \\
&= y_c v(N) + \big(y_a - y_c \big) v(bda) + \big(y_d - y_a \big) v(bd) + \big(y_b - y_d \big) v(b) \\
&\le y_c x(N) + \big(y_a - y_c \big) x(bda) + \big(y_d - y_a \big) x(bd) + \big(y_b - y_d \big) x(b) \\
&= y_c \big(x(N) - x(bda) \big) + y_a \big(x(bda) - x(bd) \big) + y_d \big(x(bd) - x(b) \big) + y_b x(b) \\
&= y_c x_c + y_a x_a + y_d x_d + y_b x_b \\
&= y \cdot x < \alpha.
\end{aligned}
$$

A mag tehát mindig része a Weber halmaznak. Most megmutatjuk, hogy konvex játékokban a fordított tartalmazás is igaz (Shapley, 1971), sőt azt is, hogy a fordított tartalmazás csak a konvex játékokban igaz (Ichiishi, 1981).

2.16. tétel (Shapley – Ichiishi). *A következő állítások ekvivalensek:*

(i) *v konvex játék*

(ii) $x^\theta(v) \in \mathbf{C}(v)$ *minden* $\theta \in \Theta_N$*-re*

(iii) $\mathbf{C}(v) = \mathbf{W}(v)$

(iv) $\mathrm{ext}\mathbf{C}(v) = \{x^\theta(v) \mid \theta \in \Theta_N\}$

Bizonyítás. Először az első két tulajdonság egyenértékűségét mutatjuk meg, és utána vesszük sorra a **(ii)** könnyű átfogalmazásait.

(i) $\Rightarrow$ **(ii)**: Legyen v egy konvex játék. Ekkor $v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T)$ teljesül tetszőleges $S \subseteq T \subseteq N \setminus \{i\}$ koalíciók és $i \in N$ játékos esetén. Legyen θ az N egy tetszőleges sorbarendezése, és x^θ a kapcsolódó határhozzájárulás-vektor. A 2.12. állítás 1. pontja szerint bármilyen játékban az x^θ egy szétosztás. Azt kell tehát megmutatnunk, hogy tetszőleges $S \neq \emptyset$ koalícióra $x^\theta(S) \geq v(S)$.

Tegyük fel, hogy az S koalíció tagjai a θ szerinti sorrendben az $i_1, \ldots, i_s$ játékosok. Összeadva az x^θ definíciójából és a v konvexitásából adódó

$$x^\theta_{i_1} = v(P^\theta_{i_1} \cup \{i_1\}) - v(P^\theta_{i_1}) \geq v(\emptyset \cup \{i_1\}) - v(\emptyset) \qquad [\text{mert } \emptyset \subseteq P^\theta_{i_1}]$$
$$x^\theta_{i_2} = v(P^\theta_{i_2} \cup \{i_2\}) - v(P^\theta_{i_2}) \geq v(\{i_1\} \cup \{i_2\}) - v(\{i_1\}).$$

Mivel $\{i_1\} \subseteq P^\theta_{i_2}$, így

$$\vdots$$
$$x^\theta_{i_s} = v(P^\theta_{i_s} \cup \{i_s\}) - v(P^\theta_{i_s}) \geq v((S \setminus \{i_s\}) \cup \{i_s\}) - v(S \setminus \{i_s\}) \quad [\text{mert } S \setminus \{i_s\} \subseteq P^\theta_{i_s}]$$

összefüggéseket, megkapjuk a kívánt $x^\theta(S) \geq v(S)$ egyenlőtlenséget.

(ii) $\Rightarrow$ **(i)**: Tegyük fel, hogy v egy olyan játék, amelyben $x^\theta(v) \in \mathbf{C}(v)$ minden $\theta \in \Theta_N$-re. Tetszőlegesen válasszunk egy $i \in N$ játékost és két $S \subseteq T \subseteq N \setminus \{i\}$ koalíciót. Legyen θ a játékosok egy olyan sorbarendezése, amelyik először az S, aztán a $T \setminus S$ tagjait rakja valamilyen sorba, őket az i játékos követi, s végül jönnek az $N \setminus (T \cup \{i\})$-beli játékosok szintén tetszőleges sorrendben, azaz $Q^\theta_s = S$, $Q^\theta_t = T$ és $\theta^{-1}(t+1) = i$, ahol $s = |S|$ illetve $t = |T|$. Mivel $T = P^\theta_i$, az x^θ definíciójából és a feltevésünkből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} v(T\cup\{i\})-v(T) &= x_i^\theta \\ &= x^\theta(S\cup\{i\})-x^\theta(S) \\ &\geq v(S\cup\{i\})-v(S). \end{aligned}$$

Mivel $Q_s^\theta = S$, így $x^\theta(S)=v(S)$, vagyis a v játék konvex.

(ii) $\Rightarrow$ **(iii)**: Teljesüljön a v játékra, hogy $x^\theta(v)\in \mathbf{C}(v)$ minden $\theta\in\Theta_N$-re. A mag, lévén egy konvex halmaz, tartalmazza pontjai bármely halmazának a konvex burkát. Feltevésünkből következik, hogy a Weber-halmaz, mint az $x^\theta(v)$ ($\theta\in\Theta_N$) vektorok konvex burka, része a magnak. Ugyanakkor, a 2.15. tétel szerint a mag mindig része a Weber-halmaznak, most tehát egybeesnek.

(iii) $\Rightarrow$ **(iv)**: Tegyük fel, hogy v-ben $\mathbf{C}(v)=\mathbf{W}(v)$. Definíciójából adódóan a Weber-halmaz mindegyik extremális pontja határhozzájárulás-vektor, most tehát $\mathrm{ext}\mathbf{C}(v)=\mathrm{ext}\mathbf{W}(v)\subseteq\{x^\theta(v)\mid\theta\in\Theta_N\}$. Másrészt, a 2.12. állítás 2. pontja szerint egy határhozzájárulás-vektor csak extremális pont lehet a magban, vagyis a feltételezett $\{x^\theta(v)\mid\theta\in\Theta_N\}\subseteq\mathbf{C}(v)$-ből következik az $\{x^\theta(v)\mid\theta\in\Theta_N\}\subseteq\mathrm{ext}\mathbf{C}(v)$ tartalmazás is.

(iv) $\Rightarrow$ **(ii)**: A mag, lévén egy kompakt halmaz, tartalmazza mindegyik extremális pontját. A **(iv)**-et feltéve tehát $\{x^\theta(v)\mid\theta\in\Theta_N\}=\mathrm{ext}\mathbf{C}(v)\subseteq\mathbf{C}(v)$ adódik. □

2.3.1. Feladatok

2.9. feladat. Lássuk be a 2.12. állítást!

2.10. feladat. Igazoljuk, hogy ha a v játék 0-monoton, akkor a játékosok minden $\theta\in\Theta_N$ sorrendjére az x^θ határhozzájárulás-vektor elosztás!

2.11. feladat. A 1.21. állítás 5. pontja szerint tetszőleges $T\in\mathcal{N}$ koalícióhoz tartozó u_T egyetértési játék konvex. Adjuk meg a magját, mint csúcspontjainak a konvex burkát!

2.12. feladat. A 1.13. feladat 1. állítása szerint minden csődjáték konvex. Vegyük a következő három csődhelyzetet:

1. $\langle E=100; d_1=100, d_2=200, d_3=300\rangle$
2. $\langle E=200; d_1=100, d_2=200, d_3=300\rangle$
3. $\langle E=300; d_1=100, d_2=200, d_3=300\rangle$

Mindhárom esetben adjuk meg a csődhelyzethez tartozó csődjáték magját, mint csúcspontjainak a konvex burkát!

2.13. feladat. Ábrázoljuk a lóvásár játék Weber-halmazát illetve magját az elosztás-háromszögben, lásd a 2.3. példát! A 2.16. tétel alapján döntsük el, hogy konvex-e a játék! Adjunk meg egy olyan 3-szereplős kiegyensúlyozott játékot, amelyben a mag nem mindegyik csúcspontja határhozzájárulás-vektor!

2.4. Piacjátékok és a teljes kiegyensúlyozottság

Idézzük fel azt az egyszerű termelési cserepiac modellt (1.3. példa), amelyben az $N = \{1, \dots, n\}$-beli szereplők mindegyike ugyanazt a tetszőlegesen osztható és egymás között átadható terméket képes előállítani az $M = \{1, \dots, m\}$-típusú erőforrások felhasználásával. Az $i \in N$ szereplő az $\omega^i \in \mathbb{R}^m_+$ kezdő input-készlettel rendelkezik, az $f^i : \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}_+$ termelési függvényéről pedig a folytonosságon kívül most azt is feltesszük, hogy konkáv. Piacmodellünk tehát $\langle N, M, (\omega^i)_{i\in N}, (f^i)_{i\in N}\rangle$.

A termelés előtt a szereplők tetszőlegesen átcsoportosíthatják input-készleteiket, majd az egyénenkénti termelés után az output-terméket. Most feltesszük, hogy a termelés kimenete pénznek tekinthető az 1.1. alfejezetben tárgyalt értelemben. A szereplők egy $S \subseteq N$ társulásának ebben a minden szereplő által azonosan megítélt jószágban mért értéke tehát

$$v(S) = \max\{\sum_{i\in S} f^i(z^i) : \sum_{i\in S} z^i = \sum_{i\in S} \omega^i,\ z^i \in \mathbb{R}^m_+ \ (i \in S)\}, \tag{2.8}$$

ami a termelési függvények folytonossága és az inputvektor-allokációk halmazának kompaktsága miatt jól definiált. Nyilván $v(\emptyset) = 0$, tehát (2.8) egy koalíciós függvényt ad meg a szereplők N halmazán.

2.17. definíció. Az (N, v) játékra azt mondjuk, hogy egy *piacjáték*, ha van egy olyan $\langle N, M, (\omega^i)_{i\in N}, (f^i)_{i\in N}\rangle$ termelési cserepiac, amely a (2.8) által pont a v-t generálja.

Azt már meggondoltuk, hogy minden piacjáték szuperadditív (1.7. feladat). Hamarosan megmutatjuk, hogy minden piacjáték kiegyensúlyozott. Sőt az is kiderül, hogy nemcsak a nagykoalíció értéke elég nagy a többi koalíció értékéhez képest ahhoz, hogy legyen mag-elosztás, de ugyanez elmondható mindegyik koalíció és az ő részkoalícióinak viszonyáról is.

2.18. definíció.

- Az (N, v) játéknak az $S \subseteq N$ koalícióhoz tartozó *részjátéka* alatt az (S, v_S) játékot értjük, ahol $v_S(T) = v(T)$ minden $T \in 2^S$-re.
- Az (N, v) játékra azt mondjuk, hogy *teljesen kiegyensúlyozott*, ha mindegyik $S \subseteq N$ koalíciójához tartozó részjátéka kiegyensúlyozott.

Teljesen kiegyensúlyozott játékok például a konvex játékok, hiszen e játéktípus definíciójából nyilvánvaló, hogy egy konvex játék bármelyik részjátéka is konvex, s így – a Shapley-Ichiishi (2.16.) tételből következően – az is rendelkezik mag-elosztással.

Könnyen belátható (2.14. feladat) a következő állítás.

2.19. állítás.

1. *A teljesen kiegyensúlyozott játékok osztálya zárt a stratégiai ekvivalenciára nézve, azaz egy teljesen kiegyensúlyozott játékkal stratégiailag ekvivalens minden játék is teljesen kiegyensúlyozott.*
2. *Minden konvex játék teljesen kiegyensúlyozott, de van olyan teljesen kiegyensúlyozott játék (akár 3-személyes is), amely nem konvex.*
3. *Minden teljesen kiegyensúlyozott játék kiegyensúlyozott és szuperadditív.*
4. *Minden legfeljebb 3-személyes kiegyensúlyozott és szuperadditív játék teljesen kiegyensúlyozott.*

Az alábbi példa mutatja, hogy az utolsó állítás legalább 4 játékos esetén már nem feltétlenül igaz.

2.20. példa. A 0-normalizált koalíciós függvény a játékosok $N = \{1, 2, 3, 4\}$ halmazán a következő: $v(12) = v(13) = v(23) = 1$, $v(14) = v(24) = v(34) = 0$, $v(123) = v(124) = v(134) = v(234) = 1$, $v(1234) = 2$. A v szuperadditív és kiegyensúlyozott (például az $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ egy mag-elosztás). Ugyanakkor az $S = 123$ koalícióhoz tartozó részjáték nem kiegyensúlyozott.

Idézzük fel, hogy a 1.23. állítás 1. kijelentéséből következően a mag azonos a nagykoalíció számára elérhető, de egyetlen koalíció által sem dominált kifizetés-vektorok halmazával. A játékbeli kifizetés-vektorok szerepét a piacmodellben az output-allokációk játszák, közöttük a nemdomináltság szó szerint ugyanúgy definiálható, mint a hozzátartozó TU-játékban. Esetünkben az output termék pénz, így jogos egy *piac magja* alatt a piac által generált piacjáték magját érteni. Mivel egy piacjáték több különböző piacmodellhez is tartozhat, az alábbi bizonyítás azt a picit erősebb állítást is igazolja, miszerint bármelyik termelési cserepiac magja nem üres. Megjegyezzük, hogy ez az eredmény a közgazdaságtanban jól ismert, sőt az itteninél jóval általánosabb piacmodellekben is igaz.

2.21. tétel (Shapley, Shubik (1969))**.** *Bármelyik termelési cserepiac által generált piacjáték teljesen kiegyensúlyozott.*

Bizonyítás. Első lépésként azt fogjuk belátni, hogy egy tetszőlegesen választott $\langle N, M, (\omega^i)_{i\in N}, (f^i)_{i\in N}\rangle$ termelési cserepiachoz tartozó (N, v) piacjáték kiegyensúlyozott.

Legyen $(\lambda_S)_{S\in\mathcal{N}}$ egy N-re kiegyensúlyozott súlyprofil, azaz $\lambda_S \geq 0$ minden $S \in \mathcal{N}$-re és $\sum_{S\in\mathcal{N}} \lambda_S,\ \boldsymbol{e}^S = \boldsymbol{e}^N$. Mindegyik $S \in \mathcal{N}$-re jelölje $(z^{iS})_{i\in S}$ a $v(S)$-t megadó (2.8) alatti feladat egy optimális megoldását, azaz $v(S) = \sum_{i\in S} f^i(z^{iS})$. Vegyük most minden $i \in N$-re azon z^{iS} input-vektoroknak a λ_S súlyokkal képzett konvex (hiszen $\sum_{i\in S} \lambda_S = 1$) kombinációját, amelyek az adott játékost tartalmazzák, vagyis legyen $z^{i*} := \sum_{i\in S} \lambda_S,\ z^{iS}$.

A $(z^{i*})_{i\in N}$ input-vektor allokáció elérhető az N nagykoalíció számára, mert minden $i \in N$-re $z^{i*} \geq 0$ és

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in N} z^{i*} &= \sum_{i\in N}\sum_{i\in S} \lambda_S,\ z^{iS} = \sum_{S\in\mathcal{N}}\sum_{i\in S} \lambda_S,\ z^{iS} = \sum_{S\in\mathcal{N}} \lambda_S,\ \sum_{i\in S} z^{iS} \\
&= \sum_{S\in\mathcal{N}} \lambda_S \sum_{i\in S} \omega^i = \sum_{i\in N}\sum_{i\in S} \lambda_S\, \omega^i = \sum_{i\in N} \omega^i \sum_{i\in S} \lambda_S \\
&= \sum_{i\in N} \omega^i.
\end{aligned}$$

Mivel tehát $(z^{i*})_{i\in N}$ a $v(N)$-t meghatározó (2.8) alatti feladat egy lehetséges megoldása, kapjuk, hogy

$$v(N) \;\geq\; \sum_{i\in N} f^i(z^{i*}) = \sum_{i\in N} f^i\big(\sum_{i\in S} \lambda_S, z^{iS}\big)$$

Mivel f^i konkáv minden $i \in N$-re, így

$$\begin{aligned}
&\geq \sum_{i\in N}\sum_{i\in S} \lambda_S f^i(z^{iS}) = \sum_{S\in\mathcal{N}}\sum_{i\in S} \lambda_S f^i(z^{iS}) = \sum_{S\in\mathcal{N}} \lambda_S \sum_{i\in S} f^i(z^{iS}) \\
&= \sum_{S\in\mathcal{N}} \lambda_S v(S),
\end{aligned}$$

azaz a generált piacjáték valóban kiegyensúlyozott.

A generált (N, v) piacjáték teljes kiegyensúlyozottságának belátásához már csak azt kell észrevennünk, hogy egy tetszőleges $S \in \mathcal{N}$ koalícióhoz tartozó (S, v_S) részjáték éppen az $\langle S, M, (\omega^i)_{i \in S}, (f^i)_{i \in S} \rangle$ részpiac által generált piacjáték, s így a fenti gondolatmenet megismételhetősége miatt kiegyensúlyozott. □

Megemlítjük, hogy igaz az előbbi tétel megfordítása is.

2.22. tétel. *Bármelyik teljesen kiegyensúlyozott játék egy piacjáték.*

Bizonyítás. Többféle bizonyítás adható. Shapley és Shubik (1969) eredeti bizonyítása konstruktív: egy tetszőleges teljesen kiegyensúlyozott játékhoz megadnak egy speciális ún. direkt piacot úgy, hogy az abból származó ún. direkt piacjáték azonos a kiinduló teljesen kiegyensúlyozott játékkal. □

2.4.1. Feladatok

2.14. feladat. Lássuk be a 2.19. állításokat!

A következő négy feladatban szereplő játékok speciális piacmodellekhez tartozó piacjátékok. A Shapley - Shubik (1969) tételből tudjuk, hogy teljesen kiegyensúlyozottak. De hogyan néz ki a magjuk?

2.15. feladat. (*Kesztyűjáték magja*) Emlékeztetőül: $N = I \cup J$, $v(S) = \min\{|S \cap I|, |S \cap J|\}$

1. Mi a játék magja akkor, ha $|I| = |J|$?
2. Mi a játék magja akkor, ha $|I| < |J|$?

2.16. feladat. (*Szindikátus játék magja*) Emlékeztetőül: $N = (I = \{1, 2\}) \cup (J = \{3, 4, 5\})$, $v(S) = \min\{2|S \cap I|, |S \cap J|\}$

1. Mi ennek az 5-személyes játéknak a magja?
2. Tegyük fel, hogy a J-beli három játékos szindikátust alkot, és csak együtt vesznek részt egy koalícióban. Adja meg ezt a 3-szereplős (1, 2, J) piacmodellt és a hozzátartozó piacjátékot! Mi ennek a 3-személyes játéknak a magja? Tükrözi-e a mag a szindikátusba szerveződött játékosok megerősödött helyzetét?

2.17. feladat. (*Gyáros-munkások játék magja*) Emlékeztetőül: $N = \{0, 1, \ldots, n\}$, $v(S) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{ha } \ 0 \notin S \\ g(|S|-1), & \text{ha } \ 0 \in S \end{array} \right\}$, ahol g nemcsökkenő és $g(0) = 0$ (lásd 1.12. feladat).

1. Mi a játék magja akkor, ha a g függvény konvex?

2. Igazoljuk, hogy ha a g függvény konkáv, akkor a mag pontosan azon $\{(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ kifizetés-vektorok halmaza, amelyekben $0 \leq x_i \leq g(n) - g(n-1)$ minden $i \geq 1$-re, és $x_0 = g(n) - \sum_{i=1}^{n} x_i$!

2.18. feladat. (*Egy lineáris termelési játék magja*) Vegyük a következő 3-szereplős lineáris termelési piacot (lásd 1.5. példa): az $N = \{1, 2, 3\}$-beli szereplők mindegyike kétféle erőforrásból tud kétféle terméket előállítani ugyanazzal a lineáris termelési technológiával. A szereplők kezdeti erőforrás-készleteiből (mint oszlopvektorokból) álló mátrix B, a termékek fajlagos erőforrás-igényeit (mint oszlopvektorokat) megadó mátrix A, a kétféle termék rögzített piaci árait tartalmazó sorvektor c, ahol most

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 28 & 42 & 0 \\ 28 & 0 & 35 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

1. Adjuk meg a $v(S) = \max\{cx \mid Ax \leq Be^S, \ x \, geq0\}$ koalíciós függvényt! (Itt e^S jelöli az S tagsági vektorát.) Miért érdemes a duál feladatokat használni?

2. Határozzuk meg a nagykoalíció értékét megadó $v(N) = \min\{yBe^N \mid yA \geq c, \ y \geq 0\}$ duál feladat optimális megoldásainak $\mathbf{D}$ halmazát!

3. A két halmaz explicit megadásával igazoljuk, hogy ebben a lineáris termelési játékban $\{z = yB \mid y \in \mathbf{D}\} \subseteq \mathbf{C}$, de $\{z = yB \mid y \in \mathbf{D}\} \neq \mathbf{C}$!

4. Általában is igaz-e, hogy egy lineáris termelési játékban mindig mag-elosztást kapunk, ha a játékosok erőforrás-készleteit egy $\mathbf{D}$-beli árnyék-ár-vektor szerint értékeljük?

3. fejezet

Stabil halmazok

E fejezet témája az átváltható hasznossággal rendelkező játékok klasszikus, Neumann és Morgenstern (1944) által javasolt megoldási koncepciójának rövid tárgyalása.

Amint azt az 1.23. állítás 1. kijelentése kapcsán meggondoltuk, a TU-játékok esetén a mag-elosztások pontosan a semmilyen kifizetés által nem-dominált, de a nagykoalíció számára elérhető kifizetések. A 1.27. állítás 2. kijelentése kapcsán pedig beláttuk, hogy a nagykoalíció létrejöttét valószínűsítő játékokban teljesülő, a koalíciós függvényre tett nagyon enyhe feltevés mellett az elfogadhatóság és az elosztások általi nem-domináltság is ekvivalensek. Azt is tudjuk, hogy ilyen játékokban az elosztás-halmaz nem üres. E fejezetben csak ilyen játékokkal foglalkozunk, és követve a hagyományos tárgyalásmódot, a szóbajöhető kifizetések halmazát eleve az elosztások halmazára korlátozzuk és domináltság alatt egy elosztás általi domináltságot értünk.

Az említett megoldási koncepció pontos definíciója előtt jöjjön egy motiváló gondolatmenet egy már jól ismert döntési helyzetben.

3.1. példa. Vegyük a *Lóvásár* játékot (lásd 1.6. példa). Tudjuk, hogy a játék kiegyensúlyozott (lásd 2.3. példa), sőt azt is, hogy a mag $\mathbf{C} = \{(x_A = p, x_B = 0, x_C = 100 - p) \mid 80 \leq p \leq 100\}$. Ezeken az elosztásokon tehát semelyik koalíció sem képes javítani. De tekinthetők-e magon kívüli elosztások is valamilyen gyengébb értelemben stabilnak?

Tegyük fel, hogy a két vevő egymás földije, és ilyen helyzetekben a falujukban az „elfogadott viselkedési norma” az, hogy a „gyengébbik” vevő – reálisan felmérve helyzetét – kiszáll az alkudozásból, javítva ezzel földije tárgyalási pozícióját, aki viszont – ezt a segítséget jutalmazandó – mondjuk fele-fele arányban osztozik vele a megspórolt vételárból.

Egy ilyen kimenetel például az $x = (60, 10, 30)$ elosztás. Mivel az x egy magon kívüli elosztás, önmagában nem stabil. Az A és B például megegyezhet a mindkettőjük számára kedvezőbb $y = (65, 15, 0)$ elosztásban, és ehhez nincs szükségük a C hozzájárulására. A kisemmizett C viszont visszavághat a csalárd B-nek a $z = (70, 5, 25)$ elosztással, amit az A persze elfogad, hiszen a z neki is jobb mint az y. A B így kétszeresen is bűnhődik: anyagilag is rosszabb helyzetbe került a kiinduló x-hez képest, ráadásul még szégyenkezhet is a falujabeliek előtt, hiszen C a viselkedési normáknak megfelelő z-vel leckéztette meg.

Hasonló helyzetbe kerülhet a C játékos is, mert például az $u = (65, 0, 35)$ elosztás az AC koalíció által dominálja az x-et, az u-t viszont az AB által dominálja például a viselkedési normáknak megfelelő fenti $z = (70, 5, 25)$. Tehát a C játékosnak sem érdeke megkérdőjelezni az eredeti x-et a rövid távon javulást ígérő u-ért, hiszen az u sem stabil, így végül „anyagilag és erkölcsileg" is rosszabb helyzetbe kerül(het), mint a kiinduló x-nél.

Ugyanakkor a B és C együtt nem érhet el javulást az A kárára, ők tehát az x-beli pozícióik megőrzésére törekszenek. Emiatt viszont az eladó A játékos sem érhet el javulást, mert erre csak az egyik vevővel együtt lenne képes. Ebben az értelemben tekinthető stabilnak a magon kívüli $x = (60, 10, 30)$ elosztás, de ehhez kellett az, hogy legyen az elosztásoknak egy „más szempontból elfogadhatóbb" halmaza.

A fenti példában felbukkanó stabilitást ragadja meg a Neumann és Morgenstern (1944) által javasolt megoldási koncepció, amely bármely nemüres elosztás halmazzal rendelkező játékra értelmezhető.

3.2. definíció. Azt mondjuk, hogy a $Z \subseteq \mathbf{I}$ *egy stabil halmaz* az (N, v) játékban, ha teljesül rá a következő két tulajdonság:

- semmilyen $x, y \in Z$-re $x \mathrm{dom} y$ (belső stabilitás)
- minden $y \in \mathbf{I} \setminus Z$-re van olyan $x \in Z$, hogy $x \mathrm{dom} y$ (külső stabilitás)

Egy stabil halmaz tehát olyan egymást kölcsönösen nem domináló elosztásokból áll, amelyek együttesen minden egyéb elosztást dominálnak. Fontos észrevenni, hogy itt a stabilitás az elosztások halmazainak a tulajdonsága, nem pedig az egyes elosztásoké, mint a például a magban. Egy elosztásról önmagában nem eldönthető, hogy beletartozik-e egy stabil halmazba vagy sem, ez attól függ, hogy milyen más elosztásokkal együtt tekintjük. Például, ha a Z stabil halmaznak az x egy magon kívüli eleme, akkor biztosan dominálja egy y elosztás, ami a belső stabilitás miatt nem lehet Z-beli. A külső stabilitás miatt viszont van olyan $z \in Z$ ami dominálja ezt az $y \in \mathbf{I} \setminus Z$-t, s így az $x \in Z \setminus \mathbf{C}$-ből való elmozdulás csak időleges, és rögtön egy másik $z \in Z$

elosztáshoz vezet. Egy magon kívüli elosztás egy stabil halmazba tartozását tehát egy másik halmazbeli elosztás biztosítja.

Mindenekelőtt nézzük meg, hogy miként változnak a stabil halmazok akkor, ha egy játékról áttérünk egy vele stratégiailag ekvivalens játékra. Idézzük fel (lásd 1.28. tétel), hogy stratégiailag ekvivalens játékokban a dominancia relációk ugyanazok, sőt ez koalíciónként is igaz. Pontosabban, ha u és v stratégiailag ekvivalensek, azaz valamilyen $\alpha > 0$ és $b \in \mathbb{R}^N$ mellett $u = \alpha v + b$, akkor tetszőleges $S \in \mathcal{N}$ és $x, y \in \mathbb{R}^N$-re $x \mathrm{dom}_S^v y \Leftrightarrow (\alpha x + b) \mathrm{dom}_S^u (\alpha y + b)$. Rögtön adódik (3.1. feladat) a következő állítás.

3.3. állítás. *A stabil halmazok kovariánsak a pozitív affin transzformációkkal, azaz ha Z egy stabil halmaz az (N, v) játékban, akkor tetszőleges $\alpha > 0$ és $b \in \mathbb{R}^N$-re $\alpha Z + b$ egy stabil halmaz az $(N, \alpha v + b)$ játékban.*

Tehát az elosztás halmazhoz és a maghoz hasonlóan (lásd 1.26. állítás) a stabil halmazok is megfelelnek annak az alapvető elvárásnak, hogy a modell önkényesen megválasztható paramétereitől a megoldás „lényegileg” ne függjön.

Egy magbeli elosztást semmilyen más elosztás sem dominál, a magra tehát mindig teljesül a belső stabilitás. Amennyiben a mag nem üres és elég kiterjedt ahhoz, hogy önmaga domináljon minden rajta kívüli elosztást (azaz teljesül rá a külső stabilitás is), akkor a mag egy stabil halmaz. Sőt, érdemes meggondolni (3.2. feladat) a következőket.

3.4. állítás. *Bármely TU-játékban*

1. *a mag (akár üres akár nem) részhalmaza bármelyik stabil halmaznak;*
2. *egyetlen stabil halmaz sem valódi része egy másik stabil halmaznak;*
3. *az előzőekből következően, ha egy játékban a mag egy stabil halmaz, akkor a mag az egyetlen stabil halmaz.*

Megjegyezzük, hogy amennyiben egynél hosszabb dominancia-láncokat is megengedünk, akkor egy nemüres mag mindig rendelkezik ebben a gyengébb értelemben vett külső stabilitással. Sengupta és Sengupta (1996) ugyanis megmutatta, hogy igaz a

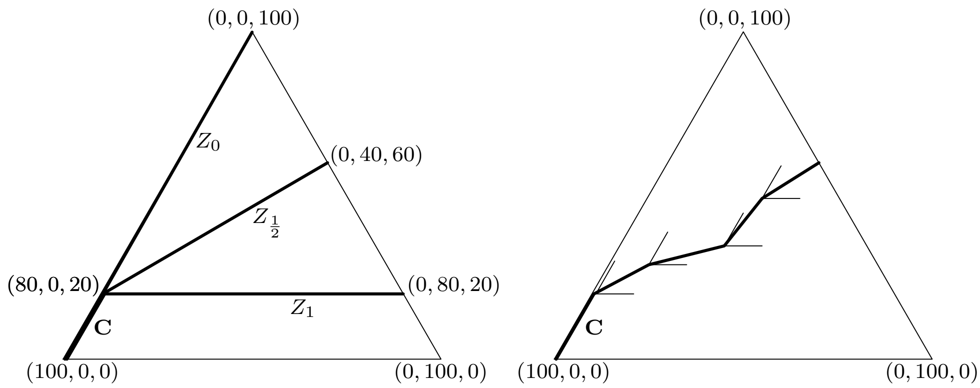
3.5. tétel. *Egy kiegyensúlyozott játékban bármilyen magon kívüli elosztásból kiindulva, a láncban az előzőt domináló elosztásoknak egy véges sorozatán keresztül mindig eljuthatunk egy magbeli elosztáshoz.*

De vajon létezik-e minden játékban stabil halmaz? És ha létezik, hány stabil halmaz van (lehet)? Mielőtt ezekre az alapvető kérdésekre kitérnénk, nézzünk egy-két példát.

3.1. Háromszemélyes példák

Az alábbiakban néhány ismert háromszemélyes játékban mutatunk példákat stabil halmazokra. Inkább a szemléletességre törekszünk, a kijelentések precíz meggondolásának hosszadalmas, de nem bonyolult feladatát az Olvasóra hagyjuk (anélkül, hogy ezeket külön feladatként kitűznénk).

3.6. példa. Folytassuk a fenti *Lóvásár* (3.1.) példát. Az ott említett „viselkedési norma" szerint elfogadható magon kívüli elosztások halmaza $\{(x_A = 80-q, x_B = \frac{1}{2}q, x_C = 20+\frac{1}{2}q) \mid 0 \leq q \leq 80\}$, ami teljesíti a belső stabilitást. Mivel ezeket az elosztásokat a mag-elosztások nem dominálják (hiszen ezekben mindkét vevő többet kap, mint amennyit akármelyik mag-elosztásban kaphat), a belsőleg mindig stabil magot ezekkel az elosztásokkal kibővítve ugyancsak egy belsőleg stabil halmazt kapunk. Ellenőrizhető, hogy az így kapott $Z_{\frac{1}{2}} = \mathbf{C} \cup \{(80-q, \frac{1}{2}q, 20+\frac{1}{2}q) \mid 0 \leq q \leq 80\}$ halmaz a külső stabilitással is rendelkezik, tehát a lóvásár játék egy stabil halmaza.



3.1. ábra. Stabil halmazok a lóvásár játékban

A fentihez hasonló módon látható be, hogy tetszőleges $0 \leq \alpha \leq 1$-re a $Z_\alpha = \mathbf{C} \cup \{(80-q, \alpha q, 20+(1-\alpha)q) \mid 0 \leq q \leq 80\}$ is egy stabil halmaz. Sőt egy stabil halmazt kapunk akkor is, ha a magot egy olyan folytonos görbével egészítjük ki, amelyik a mag $(80, 0, 20)$ csúcsából indul ki és (a belső stabilitást megőrzendő) minden pontból a 0-60 fokos szögtartományban továbbhaladva jut el az elosztás-háromszög szemközti $x_A = 0$ oldalának egy pontjáig.

A következő példánk egy nem kiegyensúlyozott játék, a mag tehát üres. További tulajdonsága, hogy *konstans összegű*, azaz $v(S) + v(N \setminus S) = v(N)$

teljesül minden $S \subseteq N$-re. Érdemes meggondolni (3.3. feladat), hogy minden lényeges és konstans-összegű játék magja üres. Megjegyezzük, hogy konstans-összegű normál formában megadott játékból a maximin konstrukcióval származtatott TU-játék mindig konstans-összegű. Könyvükben Neumann és Morgenstern (1944) szinte kizárólag ilyen TU-játékokkal foglalkoznak, s ezek vizsgálatakor az egyébként jóval természetesebb és egyszerűbben kezelhető megoldási koncepció, a mag, hasznavehetetlen.

3.7. példa. Tekintsük a 3-*személyes egyszerű többségi* játékot (lásd 2.1. példa). Mint láttuk, a mag üres. A játék szimmetrikus, bármely két játékos szerepe felcserélhető egymással anélkül, hogy a játék megváltozna.

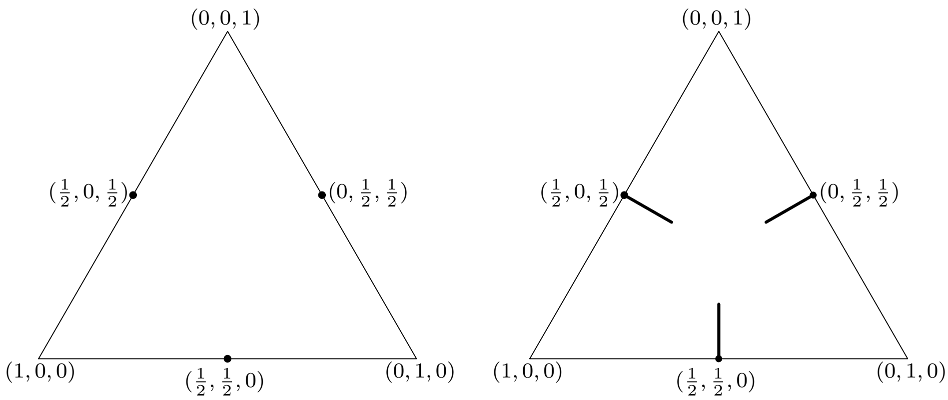
Ebben a játékban van egy olyan stabil halmaz, amelyik csupán három elosztásból áll. Az $\{(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0),(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}),(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})\}$ halmaz egy szimmetrikus megoldás, a halmaz ugyanis ugyanaz marad ha bármelyik két koordinátát (bármely két játékos kifizetését) felcseréljük. De vannak nem szimmetrikus stabil halmazok is. Tetszőleges $0 \le c < \frac{1}{2}$-vel az $\{(x_1, 1-c-x_1, c) \mid 0 \le x_1 \le 1-c\}$, a $\{(c, x_2, 1-c-x_2) \mid 0 \le x_2 \le 1-c\}$ és az $\{(1-c-x_3, c, x_3,) \mid 0 \le x_3 \le 1-c\}$ halmazok is stabilak a Neumann-Morgenstern-i értelemben. Ezeket a megoldásokat diszkrimináló stabil halmazoknak hívjuk, mert a megoldás egy játékost megkülönböztet, neki konstans c kifizetést ír elő, míg a másik két játékos szerepe felcserélhető.

Amint azt az előző fejezetben, a mag nemürességének szemléltetésénél is tettük, nézzük most is az előbbinél egy kicsit általánosabb játékcsaládot (lásd a 2.1. példa utáni szakaszt).

3.8. példa. Tekintsük a 3-*személyes szimmetrikus szuperadditív* játékokat $(0,1)$-normalizált formában: $N = \{1,2,3\}$, $v(1) = v(2) = v(3) = 0$, $v(12) = v(13) = v(23) = d$, $v(123) = 1$. Ez a játékcsalád egyetlen paraméterrel, a kétszemélyes koalíciók közös d értékével leírható, amire a szuperadditivitás miatt $0 \le d \le 1$ teljesül. A 2.6. feladat szerint a 3-személyes szuperadditív játékokban a mag pontosan akkor nem üres, ha $2v(N) \ge v(12)+v(13)+v(23)$. A szimmetrikus $(0,1)$-normalizált esetben tehát $d \le \frac{2}{3}$ a kiegyensúlyozottság szükséges és elegendő feltétele.

Ha $d = 1$ akkor a játék egyszerű játékká, következésképpen, az előző példában tárgyalt konstans-összegű játékká válik. Annak szimmetrikus megoldása a három oldalfelező pontból álló stabil halmaz. Nézzük mi történik, ha a d értékét fokozatosan csökkentjük. Most csak a szimmetrikus megoldásokat keressük.

Ha $\dfrac{2}{3} \leq d \leq 1$ akkor az oldalfelező pontokból kiinduló az oldalakra merőleges szakaszok alkotnak stabil halmazt: $\{(x, x, 1-2x) \mid \dfrac{d}{2} \leq x \leq \dfrac{1}{2}\} \cup \{(x, 1-2x, x) \mid \dfrac{d}{2} \leq x \leq \dfrac{1}{2}\} \cup \{(1-2x, x, x) \mid \dfrac{d}{2} \leq x \leq \dfrac{1}{2}\}$.



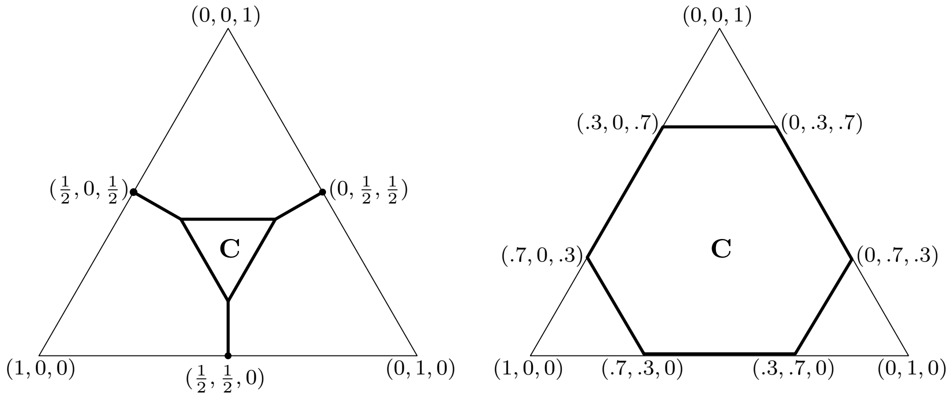
3.2. ábra. Szimmetrikus megoldások $d = 1$ illetve $d = \frac{5}{6}$ esetén

Ha $d = 1$ akkor az oldalfelező pontokat kapjuk vissza, míg a $d = \dfrac{2}{3}$ esetben a szakaszok összeérnek az elosztás-háromszög $(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3})$ középpontjában, ami az ekkor nemüressé váló mag egyetlen pontja.

Ha $\dfrac{1}{2} \leq d \leq \dfrac{2}{3}$ akkor a mag egy fordított állású háromszög az elosztás-háromszög belsejében. Csúcspontjai az $(1-d, 1-d, 2d-1)$, $(1-d, 2d-1, 1-d)$, $(2d-1, 1-d, 1-d)$ elosztások. Kiegészítve a magot a csúcsait a legközelebbi oldalfelező pontokkal összekötő egyenes szakaszokkal, stabil halmazt kapunk: $\mathbf{C} \cup \{(x, x, 1-2x) \mid 1-d \leq x \leq \dfrac{1}{2}\} \cup \{(x, 1-2x, x) \mid 1-d \leq x \leq \dfrac{1}{2}\} \cup \{(1-2x, x, x) \mid 1-d \leq x \leq \dfrac{1}{2}\}$.

Ahogy a d csökken, úgy hízik a mag és fogynak a kiegészítő egyenes szakaszok. A $d = \dfrac{1}{2}$ esetben a mag csúcsai elérik az elosztás-háromszög oldalfelezőit, a kiegészítők pedig eltűnnek.

Ha $0 \leq d \leq \dfrac{1}{2}$ akkor a belső stabilitással mindig rendelkező mag már elég nagy kiterjedésű ahhoz, hogy teljesítse a külső stabilitást is, tehát a mag egy stabil halmaz, következésképpen, a mag az egyetlen stabil halmaz. Most tehát nem szimmetrikus megoldások egyáltalán nincsenek, míg a korábbi esetekben az oldalfelező merőleges szakaszokat alkalmas folytonos görbékkel



3.3. ábra. Szimmetrikus megoldások $d = \frac{7}{12}$ illetve $d = \frac{3}{10}$ esetén

helyettesítve nem szimmetrikus stabil halmazokat kaphatunk. Megjegyezzük, hogy a játék pontosan ebben az esetben konvex, és a mag stabilitása igazából a konvexitás következménye.

3.2. Eredmények és érdekességek

A stabil halmazok egyértelműségének kérdését már a fenti példák segítségével is megválaszolhatjuk:

- még kisméretű, szabályos szerkezetű játékokban is lehet végtelen sok stabil halmaz.

De vajon létezik-e minden lényeges (azaz, nem egyetlen pontból álló elosztáshalmazzal rendelkező) játékban legalább egy stabil halmaz? Az általános válasz legfeljebb 4-személyes játékokra bizonyítottan igenlő, legalább 10-személyes játékokra igazoltan tagadó, ugyanis

- minden 3-személyes, szuperadditív játék rendelkezik legalább egy stabil halmazzal (Neumann, Morgenstern (1944));

- minden 4-személyes, lényeges játék rendelkezik legalább egy stabil halmazzal (Bondareva, Kulakovskaya, Naumova (1979));

- van olyan 10-személyes, kiegyensúlyozott játék, amelynek egyetlen stabil halmaza sincs (Lucas (1968));

- tetszőleges kiegyensúlyozott játékhoz található olyan piacjáték, amelynek ugyanaz(ok) a stabil halmaza(i) (Shapley, Shubik (1969)).

Ezt a legutóbbi eredményt Lucas (1968) kiegyensúlyozott, de stabil halmazzal nem rendelkező 10-személyes játékára alkalmazva azt kapjuk, hogy van olyan 10-személyes piacjáték is, amelynek nincsen stabil halmaza. A stabil halmazok esetleges nem-létezése tehát nem csak matematikai anomáliának tekinthető. Egyébként Lucas (1967) adott példát olyan kiegyensúlyozott játékra is, amelynek egyetlen stabil halmaza van, de az szigorúan bővebb mint a mag.

A stabil halmazok létezésének kérdése $5 \leq n \leq 9$ játékos esetén egyelőre nyitott. Sőt, mindmáig a Neumann és Morgenstern által vizsgált konstans-összegű játékokról sem lehet tudni, hogy rendelkeznek-e mindig stabil halmazzal, Lucas (1968) említett ellenpéldája ugyanis nem konstans összegű.

Érdekességként megemlítünk néhány olyan tulajdonságot, amik nemcsak a fenti példákban, de minden 3-személyes játékban teljesülnek, nagyobb méretű játékokban azonban már nem feltétlenül:

- kiegyensúlyozott játékban az összes stabil halmaz metszete a mag;
- az összes stabil halmaz egyesítése összefüggő;
- van legalább egy olyan stabil halmaz ami véges sok poliéder egyesítése.

A stabil halmazokkal kapcsolatos további eredmények, érdekességek és furcsaságok találhatók Lucas (1992) áttekintő cikkében.

3.3. Konvex játékok stabil halmazai

A 3-személyes szimmetrikus szuperadditív játékoknál (lásd 3.8. példa) a belsőleg mindig stabil magra akkor teljesült a külső stabilitás is, s így akkor vált (az egyetlen) stabil halmazzá, amikor a játék konvex lett. Most megmutatjuk, hogy ez minden konvex játékban így van.

3.9. tétel (Shapley '71). *Bármely konvex játékban a mag az egyetlen stabil halmaz.*

Bizonyítás. Elegendő azt megmutatni, hogy a mag rendelkezik a külső stabilitási tulajdonsággal. Legyen v egy konvex játék. Tetszőleges $y \in \mathbf{I}(v) \setminus \mathbf{C}(v)$-hoz megadunk egy $x \in \mathbf{C}(v)$-t és egy $T \in \mathcal{N}$-t úgy, hogy $x \mathrm{dom}_T y$.

Legyen $\alpha = \max\{\frac{v(S) - y(S)}{|S|} \mid S \in \mathcal{N}\}$ és $T \in \mathcal{N}$ egy a per-capita többletet maximalizáló koalíció. Nyilván $\alpha > 0$, $T \neq N$ és $v(T) = y(T) + |T|\alpha$. Vegyünk egy olyan $\theta \in \Theta_N$ sorbarendezést, amelynél az első $|T|$ helyen a T elemei állnak. Jelölje továbbra is x^θ a θ-hoz tartozó határhozzájárulás-vektort. Definiáljuk az x kifizetés-vektort a következőképpen: minden $i \in N$-re legyen

$$x_i = \begin{cases} y_i + \alpha, & \text{ha } i \in T \\ x_i^\theta, & \text{ha } i \in N \setminus T. \end{cases}$$

Az nyilvánvaló, hogy $x\mathrm{dom}_T y$.

Megmutatjuk, hogy $x \in \mathbf{C}(v)$. Egyrészt, az x szétosztás, hiszen $x(T) = y(T) + |T|\alpha = v(T)$ valamint $x(N \setminus T) = x^\theta(N \setminus T) = v(N) - v(T)$. Másrészt, az x elfogadható bármely S koalíció számára, hiszen

- $S \cap T = \emptyset$ esetén $x(S) = x^\theta(S) \geq v(S)$, mert konvex játékokban mindegyik határhozzájárulás-vektor magbeli;
- $S \cap T \neq \emptyset$ esetén pedig azért $x(S) \geq v(S)$, mert az α definíciója miatt az $x(S \cap T) = y(S \cap T) + |S \cap T|\alpha \geq v(S \cap T)$, míg a magbeli x^θ-ra fennálló $x^\theta(T) = v(T)$-ből adódóan az $x(S \setminus T) = x^\theta(S \cup T) - x^\theta(T) \geq v(S \cup T) - v(T)$ egyenlőtlenség teljesül, s őket összeadva a v konvexitásából kapjuk, hogy $x(S) = x(S \cap T) + x(S \setminus T) \geq v(S \cap T) + v(S \cup T) - v(T) \geq v(S)$.

Konvex játékokban a mag tehát rendelkezik a külső stabilitással, következésképpen a mag az egyetlen stabil halmaz. □

3.4. Feladatok

3.1. feladat. Lássuk be a 3.3. állítást!

3.2. feladat. Lássuk be a 3.4. állításokat!

3.3. feladat. Igazoljuk, hogy minden lényeges és konstans-összegű játék magja üres.

4. fejezet

A Shapley-érték

Egy átváltható hasznosságokkal rendelkező kooperatív játékban egy koalíció „értékét” egyetlen valós számmal adjuk meg, háttérbe szorítva a vizsgálandó döntési helyzet sok fontos részletét. Neumann és Morgenstern (1944) úgy tekintettek az általuk e „lecsupaszított” modell megoldásának tekintett stabil halmazok zavarbaejtő sokféleségére, hogy a modellezendő valóság komplexitása a megoldásokban jelenik meg. Shapley (1953) arra a kérdésre adott egy azóta klasszikussá vált választ, hogy egy játékos számára mi az „értéke” annak, ha részt vesz egy adott játékban, vagy másképpen fogalmazva, melyik az az egyetlen valós szám, amelyik „méri” egy játékos szerepének „értékét” egy adott játékban. A méréselméleti megközelítésnek megfelelően Shapley is először axiómákban rögzítette, hogy mit kell értékelő-függvényének mindenképpen teljesítenie. A meglepő az, hogy néhány igen természetes axióma már egyértelműen meghatározza a Shapley-féle megoldást.

4.1. Létezés és egyértelműség

Először is pontosítsuk az **értékelő-függvény** fogalmát. Legyen N a játékosok egy rögzített, nemüres, véges halmaza, és jelölje most is $\mathcal{G}^N$ az N játékos-halmazzal rendelkező TU-játékok (pontosabban koalíciós függvények) halmazát. Egy olyan $\boldsymbol{\psi} : \mathcal{G}^N \to \mathbb{R}^N$ függvényt keresünk, amelyik tetszőleges $\mathcal{G}^N$-beli játékra megadja az egyes játékosok értékét az adott játékban, azaz minden $v \in \mathcal{G}^N$-hez hozzárendeli a $\boldsymbol{\psi}(v) = \big(\psi_i(v)\big)_{i\in N} \in \mathbb{R}^N$ vektort, amelynek a $\psi_i(v)$ koordinátája az $i \in N$ játékos v-beli szerepének $\boldsymbol{\psi}$-szerinti értékelését jelenti pénzben (a játékosok közös hasznosság-skáláján) kifejezve.

Lássunk most olyan tulajdonságokat, amiket egy $\boldsymbol{\psi}$ értékelő-függvénytől „joggal elvárhatunk”.

4.1. definíció. Azt mondjuk, hogy a $\boldsymbol{\psi} : \mathcal{G}^N \to \mathbb{R}^N$ pontértékű megoldási koncepció rendelkezik az adott $\langle$*tulajdonsággal*$\rangle$, ha az adott $\langle$*feltétel*$\rangle$ teljesül **minden** $v \in \mathcal{G}^N$-re:

- *hatékony (Pareto-optimális),* ha $\sum_{i \in N} \psi_i(v) = v(N)$;
- *egyénileg elfogadható,* ha $\psi_i(v) \geq v(i)$ minden $i \in N$-re;
- *szimmetrikus (névtelen, anonim),* ha $\psi_{\pi i}(\pi v) = \psi_i(v)$ minden $i \in N$-re és $\pi : N \to N$ bijekcióra, ahol a $\pi v \in \mathcal{G}^N$ permutált játék értelmezése: $(\pi v)(\pi S) := v(S)$ minden $S \subseteq N$-re;
- *sallangmentes,* ha $\psi_i(v) = v(i)$ amennyiben $i \in N$ *sallang (dummy) játékos* v-ben, azaz $v(S \cup i) - v(S) = v(i)$ minden $S \subseteq N \setminus i$-re;
- *kovariáns,* ha $\boldsymbol{\psi}(\alpha v + b) = \alpha \boldsymbol{\psi}(v) + \boldsymbol{b}$ minden $\alpha > 0$ és $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^N$-re, ahol a b játék a $\boldsymbol{b}$ vektor által generált additív játék;
- *additív,* ha $\boldsymbol{\psi}(v + w) = \boldsymbol{\psi}(v) + \boldsymbol{\psi}(w)$ minden $v, w \in \mathcal{G}^N$-re, ahol a $v + w \in \mathcal{G}^N$ játék értelmezése: $(v + w)(S) := v(S) + w(S)$ minden $S \subseteq N$-re;
- *homogén,* ha $\boldsymbol{\psi}(\alpha v) = \alpha \boldsymbol{\psi}(v)$ minden $\alpha \in \mathbb{R}$-re, ahol az $\alpha v \in \mathcal{G}^N$ játék értelmezése: $(\alpha v)(S) := \alpha v(S)$ minden $S \subseteq N$-re.

A hatékonyság azt írja elő, hogy a játékosok javasolt kifizetése szétosztás legyen, tehát a nagykoalíció által ne legyen dominált. Az összes egyszemélyes koalícióra megkívánt hasonló kikötés az egyéni elfogadhatóság. E két tulajdonság együtt maga után vonja az elosztás-halmaz nemürességét, tehát csak az elosztásokkal rendelkező játékok osztályán állhatnak fenn egyszerre. (Elosztásokkal nem rendelkező játékok alkalmazási szempontból persze nem igen érdekesek.) A szimmetria tulajdonság azt a természetes követelményt fogalmazza meg, hogy egy játékos kifizetése ne a nevétől, hanem csak a játékban betöltött szerepétől függjön. Például, a lóvásár játékra (lásd 1.6. példa) alkalmazva, a szimmetria követelménye azt jelenti, hogy a játékosok kifizetését kizárólag az határozza meg, hogy melyikük az eladó, illetve a két vevő közül ki hajlandó többet adni a lóért, és ne számítson az, hogy melyiküket hogyan hívjuk vagy milyen sorrendben soroljuk fel őket a modellben. A sallangmentesség szerint az olyan játékos, aki bármelyik koalícióhoz való csatlakozásával semleges értékváltozást idéz elő (az általa egyedül elérhetőnél se többet se kevesebbet), pontosan akkora kifizetésben részesüljön, mint amennyi ez a konstans hozzájárulása. A stratégiailag ekvivalens játékokat eredményező pozitív affin transzformációkkal való kovariancia teljesen szokásos megkötés: az értékelés „szó szerint” kövesse a játékban a skálaegység és a skála-kezdőpontok módosulása miatt bekövetkező változást.

Az utolsó két tulajdonság elvárhatósága már nem ennyire egyértelmű. Modellezési szempontból az additivitás a megkérdőjelezhetőbb, hiszen megköveteli, hogy ha két szétválasztható komponensből álló helyzetet vizsgálunk, akkor a játékosok értékelése függetlenül történjen, kizárva a kölcsönhatást a két komponensbeli értékelés között. Persze abban a speciális esetben amikor az egyik játék additív, vagyis pusztán a skála-kezdőpontok változtatásának hatását írja le, a megoldás additivitása a kovarianciából következik. A homogenitás pedig nem más mint a kovarianciában szereplő skálaegység választástól való függetlenség kiterjesztése a negatív esetre. Az additivitás és a homogenitás együtt természetesen jóval erősebb tulajdonság, mint a kovariancia.

Lássuk a Shapley (1953) által javasolt értékelő-függvényt.

4.2. definíció (Shapley-érték)**.** Rögzített N játékos-halmaz mellett, tetszőleges $v \in \mathcal{G}^N$ játékban az $i \in N$ *játékos Shapley-értéke* alatt a

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus i} \frac{|S|!\,(|N \setminus S| - 1)!}{|N|!}\,[v(S \cup i) - v(S)], \tag{4.1}$$

számot, míg a *v játék Shapley-értékvektora* (vagy röviden, de kevésbé pontosan csak Shapley-értéke) alatt a

$$\boldsymbol{\phi}(v) = \big(\varphi_i(v)\big)_{i \in N} \in \mathbb{R}^N$$

vektort értjük.

Példaképpen nézzük meg, hogy mi a kétszemélyes játékok Shapley-értéke.

4.3. példa. Legyen $|N| = 2$ és $v \in \mathcal{G}^N$. Ekkor mindegyik $i \in N$, $i \neq j \in N$-re

$$\varphi_i(v) = v(i) + \frac{v(ij) - v(i) - v(j)}{2}.$$

A Shapley-érték tehát mindkét szereplőnek megadja az általa egyedül is elérhető kifizetést és egyenlő mértékben osztja szét a közösen elérhető többletet.

Ennél „számolósabb” meghatározni az egyetértési játékok Shapley-értékét. A részletek kidolgozását a 4.1. feladatra hagyjuk.

4.4. példa. Emlékeztetőül, a nemüres $T \in \mathcal{N}$ koalícióhoz tartozó egyetértési játék koalíciós függvénye:

$$u_T(S) = \begin{cases} 1 & \text{ha } S \supseteq T \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Egy tetszőlegesen rögzített $i \in N$ játékos $u_T(S \cup i) - u_T(S)$ határhozzájárulása vagy 1, vagy 0. Pontosan akkor 1, ha $S \cup i$ már nyerő koalíció de S még nem az, vagyis ha $i \in T$ és $T \setminus i \subseteq S \subseteq N \setminus i$, minden más esetben viszont a határhozzájárulás 0. Adódik, hogy

$$\varphi_i(u_T) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\varnothing \subseteq R \subseteq N \setminus T} \frac{|T \setminus i \cup R|!\,|N \setminus T \setminus R|!}{|N|!} = \frac{1}{|T|} & \text{ha } i \in T \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \tag{4.2}$$

A Shapley-érték tehát egyformán „jutalmazza” a nyerő koalícióvá váláshoz szükséges (és elégséges) legszűkebb koalíció tagjait, a többiek szerepét viszont semennyire sem „díjazza”.

Az általános (4.1) formula szerint egy játékos Shapley-értéke határhozzájárulásainak lineáris kombinációja. E kombinációban az $S \subseteq N \setminus i$ koalícióhoz történő határhozzájárulás együtthatója csak a nagykoalíció $n = |N|$ méretétől és az S-beli játékosok $s = |S|$ számától függ, bevezetjük ezért a

$$\gamma_N(S) = \gamma_n(s) = \frac{|S|!\,(|N \setminus S| - 1)!}{|N|!} \tag{4.3}$$

jelölést. Mivel egyrészt $\gamma_N(S) = \dfrac{1}{n} \dfrac{1}{\binom{n-1}{s}} \geq 0$, másrészt

$$\sum_{S \subseteq N \setminus i} \gamma_N(S) = \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{|S|=s} \gamma_N(S) = \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} \binom{n-1}{s} \frac{1}{\binom{n-1}{s}} = \frac{1}{n}\, n = 1,$$

a $\{\gamma_N(S) \mid S \subseteq N \setminus i\}$ egy valószínűségi eloszlás az $N \setminus i$ halmaz részhalmazainak halmazán. Egy játékos Shapley-értéke tehát az őt nem tartalmazó koalíciókhoz vett határhozzájárulásainak ezen valószínűségi eloszlás szerinti várható értéke. Mivel mindegyik ilyen koalícióhoz történő határhozzájárulás valószínűsége pozitív, kapjuk, hogy tetszőleges $v \in \mathcal{G}^N$ játék és $i \in N$ játékos esetén teljesül egyrészt a

$$\min\{v(S \cup i) - v(S) \mid S \subseteq N \setminus i\} \leq \varphi_i(v),$$

másrészt a

$$\varphi_i(v) \leq \max\{v(S \cup i) - v(S) \mid S \subseteq N \setminus i\},$$

egyenlőtlenség, sőt mindkét egyenlőtlenség szigorú, feltéve, hogy a játékos határhozzájárulása nem végig ugyanaz a konstans. Ebből nyilvánvalóan adódnak (4.2. feladat) az alábbi észrevételek.

4.5. állítás.

1. *A Shapley-érték sallangmentes.*
2. *Szuperadditív (sőt 0-monoton) játékban a Shapley-érték egyénileg elfogadható.*

Az i játékos $S \subseteq N \setminus i$ koalícióhoz történő csatlakozásának $\gamma_N(S)$ valószínűségét hasznos a következőképpen értelmezni. Tegyük fel, hogy a játékosok sorban egymás után érkeznek egy szobába, ahol az együttműködési megbeszélések folynak. A játékosok $n!$-féleképpen érkezhetnek. Az i-t megelőző S koalíció tagjai $s!$-féleképpen érkezhettek, míg az i-t követő $N \setminus (S \cup i)$-beli játékosok $(n-s-1)!$ különböző sorrendben jöhetnek. Amennyiben feltesszük, hogy a játékosok bármelyik érkezési sorrendje egyformán valószínű, kapjuk, hogy az i játékos az $S \subseteq N \setminus i$ koalícióhoz pontosan $\gamma_N(S)$ valószínűséggel csatlakozik. Ha minden érkező játékos pontosan akkora kifizetést kap, mint amekkora értéknövekedést előidézett a szobában, akkor a játékosok várható kifizetése – amint azt mindjárt meggondoljuk – azonos a Shapley-értékükkel.

Szemléltetésképpen határozzuk meg a Lóvásár játékban az egyes szereplők Shapley-értékét.

4.6. példa (A Lóvásár játék Shapley-értéke)**.** Számoljuk ki először is a (4.3) szerinti valószínűségeket $n = 3$ esetén $s = 0, 1, 2$-re:

$$\gamma_3(0) = \gamma_3(2) = \frac{0!\,2!}{3!} = \frac{1}{3} \qquad\qquad \gamma_3(1) = \frac{1!\,1!}{3!} = \frac{1}{6} \tag{4.4}$$

Idézzük fel, hogy az A nevű játékos az eladó, a B az a vevő aki csak 80 tallért, míg a C játékos az a vevő aki akár 100 tallért is hajlandó fizetni a lóért. Shapley-értékeik a következők:

$$\begin{aligned}
\varphi_A &= \tfrac{1}{3}[0-0] + \tfrac{1}{6}[80-0] + \tfrac{1}{6}[100-0] + \tfrac{1}{3}[100-0] &&= 63\tfrac{1}{3} \\
\varphi_B &= \tfrac{1}{3}[0-0] + \tfrac{1}{6}[80-0] + \tfrac{1}{6}[0-0] + \tfrac{1}{3}[100-100] &&= 13\tfrac{1}{3} \\
\varphi_C &= \tfrac{1}{3}[0-0] + \tfrac{1}{6}[100-0] + \tfrac{1}{6}[0-0] + \tfrac{1}{3}[100-80] &&= 23\tfrac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Mint azt korábban már láttuk (2.3. példa), a gyengébb pozícióban lévő B nevű vevő kifizetése bármely magbeli elosztásban 0, pedig szerepe nagyon is fontos az eladó számára abban, hogy fel tudja hajtani a ló eladási árát.

Érdemes kiemelni e példa két általánosítható tanulságát:

- A Shapley-értékvektor nem feltétlenül magbeli elosztás.
- A mag-elosztások inkább a versenyhelyzetet tükrözik, a Shapley-érték ugyanakkor valamennyire figyelembe veszi egy játékos összes pozitív hozzájárulását.

A 2.12. állítást követően már kiszámoltuk a három szereplő hat különböző érkezési sorrendjéhez tartozó határhozzájárulás-vektort:

$$
\begin{array}{rcl}
x^{ABC} & = & (\ 0\ ,\ 80\ ,\ 20\ ) \\
x^{ACB} & = & (\ 0\ ,\ 0\ ,\ 100\ ) \\
x^{BAC} & = & (\ 80\ ,\ 0\ ,\ 20\ ) \\
x^{BCA} & = & (\ 100\ ,\ 0\ ,\ 0\ ) \\
x^{CAB} & = & (\ 100\ ,\ 0\ ,\ 0\ ) \\
x^{CBA} & = & (\ 100\ ,\ 0\ ,\ 0\ ) \\
\hline
\text{átlag} & = & (\ 63\frac{1}{3}\ ,\ 13\frac{1}{3}\ ,\ 23\frac{1}{3}\ )
\end{array}
$$

Azt látjuk, hogy amennyiben a szereplők vásárba érkezésének bármelyik sorrendje egyformán valószínű, és minden újonnan érkező teljes mértékben megkapja azt a többletet, amit megjelenése lehetővé tett, akkor a szereplők várható kifizetése azonos a Shapley-értékükkel.

Általánosan is könnyen belátható (4.3. feladat), hogy a Shapley-érték felírható a következő **alternatív alak**ban is: minden $v \in \mathcal{G}^N$ és $i \in N$-re,

$$\varphi_i(v) = \frac{1}{|N|!} \sum_{\vartheta \in \Theta_N} x_i^{\vartheta}(v), \tag{4.5}$$

ahol továbbra is $\boldsymbol{x}^{\vartheta}(v)$ jelöli a játékosok ϑ sorrendjéhez tartozó határhozzájárulás-vektort. A Shapley-értékvektor tehát a határhozzájárulás-vektorok (multiplicitással vett) átlaga, következésképpen mindig a Weber halmaz belső pontja.

A (4.5) alternatív alak különösen hasznos a Shapley-érték következő tulajdonságainak belátásához.

4.7. állítás.

1. *A Shapley-érték hatékony.*
2. *A Shapley-érték additív és homogén, következésképpen kovariáns.*
3. *A Shapley-érték szimmetrikus.*

Bizonyítás. Az első két kijelentés a határhozzájárulás-vektorok valamint az átlagolás tulajdonságaiból rögtön adódik. A szimmetria pedig azért teljesül, mert tetszőleges $\vartheta \in \Theta_N$ sorrendre és $\pi : N \to N$ permutációra

$$
\begin{aligned}
x_{\pi i}^{\vartheta\pi^{-1}}(\pi v) &= (\pi v)\big(P_{\pi i}^{\vartheta\pi^{-1}} \cup \{\pi i\}\big) - (\pi v)\big(P_{\pi i}^{\vartheta\pi^{-1}}\big) \\
&= (\pi v)\big(\pi(P_i^{\vartheta} \cup \{i\})\big) - (\pi v)\big(\pi(P_i^{\vartheta})\big) \\
&= v\big(P_i^{\vartheta} \cup \{i\}\big) - v\big(P_i^{\vartheta}\big) \\
&= x_i^{\vartheta}(v),
\end{aligned}
$$

és ahogy a v játékbeli átlagolásban a ϑ végigfut a Θ_N minden elemén, úgy a π szerint permutált πv játékbeli átlagolásban a $\vartheta\pi^{-1}$ is végigfut a Θ_N minden elemén. □

A (4.5) alternatív alakból és a konvex játékok magjára vonatkozó 2.16. tételből az is azonnal következik, hogy

- bármely konvex játékban a Shapley-értékvektor egy mag-elosztás.

Ugyanakkor, amint azt a lóvásár játék kapcsán már láttuk, a Shapley-értékvektor még (teljesen) kiegyensúlyozott játék esetén sem feltétlenül ad magbeli elosztást.

A fejezet legfőbb állításának belátásához szükségünk lesz a következő megfontolásokra. Idézzük fel, hogy a rögzített N játékoshalmazon értelmezett játékok $\mathcal{G}^N$ halmaza egy lineáris vektortér. Könnyű belátni a következőket (lásd 4.4. feladat).

4.8. állítás. *A $\mathcal{G}^N$ lineáris vektortér egy $2^{|N|}-1$ elemű bázisát alkotják a nemüres koalíciókhoz tartozó $u_T \in \mathcal{G}^N$ $(T \in \mathcal{N})$ egyetértési játékok. Következésképpen, tetszőleges $v \in \mathcal{G}^N$ egyértelműen állítható elő $v = \sum_{T\in\mathcal{N}} \alpha_T u_T$ alakban, mégpedig az*

$$\alpha_T = \sum_{R\subseteq T} (-1)^{|T|-|R|}\, v(R)$$

együtthatókkal.

Szemléltetésképpen legyen $N = \{1,2,3\}$. Soroljuk fel $\mathcal{N}$ elemeit és az egyetértési játékokat is azonos sorrendben, és ez a sorrend legyen a következő:

S	1	2	3	12	13	23	123	
u_1	1	0	0	1	1	0	1	α_1
u_2	0	1	0	1	0	1	1	α_2
u_3	0	0	1	0	1	1	1	α_3
u_{12}	0	0	0	1	0	0	1	α_{12}
u_{13}	0	0	0	0	1	0	1	α_{13}
u_{23}	0	0	0	0	0	1	1	α_{23}
u_{123}	0	0	0	0	0	0	1	α_{123}
v	$v(1)$	$v(2)$	$v(3)$	$v(12)$	$v(13)$	$v(23)$	$v(N)$	

A 0-1 mátrix felső-háromszög jellegét kihasználva felülről-lefelé illetve balróljobbra haladva könnyen meghatározhatjuk a $v = \sum_{T\in\mathcal{N}} \alpha_T u_T$ felbontásban az α_T együtthatókat. Az egyszemélyes koalíciókra $\alpha_i = v(i)$, a kétszemélyesekre $\alpha_{ij} = v(ij) - \alpha_i - \alpha_j$ adódik, végül a nagykoalícióra $\alpha_N = v(N) - \sum_{R\subsetneq N} \alpha_R$.

Lássuk a fejezet legfőbb állítását.

4.9. tétel (Shapley (1953)). *Tetszőleges véges, nemüres N játékoshalmazra, a $\boldsymbol{\phi} = \big(\varphi_i\big)_{i\in N}$ Shapley-értékvektor az egyetlen hatékony, szimmetrikus, sallangmentes és additív $\mathcal{G}^N \to \mathbb{R}^N$ függvény.*

Bizonyítás. Azt a 4.5. illetve 4.7. állításokban már beláttuk, hogy a Shapley-értékvektor rendelkezik e négy tulajdonsággal. Elegendő tehát azt megmutatni, hogy ezeket az axiómákat csak egyetlen értékelő-függvény teljesítheti.

Legyen $\boldsymbol{\psi} : \mathcal{G}^N \to \mathbb{R}^N$ egy sallangmentes, szimmetrikus, hatékony és additív értékelő-függvény. Megmutatjuk, hogy tetszőleges $v \in \mathcal{G}^N$ játékra $\boldsymbol{\psi}(v) = \boldsymbol{\phi}(v)$. Vegyük a v játék egyértelmű $v = \sum_{T\in\mathcal{N}} \alpha_T u_T$ felbontását.

Válasszunk ki egy $T \in \mathcal{N}$ koalíciót és legyen $w_T = \alpha_T u_T$. Ebben a kétértékű játékban minden $i \in N \setminus T$ sallang-játékos, hiszen $S \supseteq T \Leftrightarrow S \cup i \supseteq T$ miatt $w_T(S\cup i) - w_T(S) = 0 = w_T(i)$ minden $S \subseteq N \setminus i$-re. A $\boldsymbol{\psi}$ sallangmentessége miatt tehát $\psi_i(w_T) = w_T(i) = 0$ minden $i \in N \setminus T$-re. Mivel $\boldsymbol{\psi}$ szimmetrikus, ezért bármely két $j,k \in T$ játékost ugyanúgy értékel w_T-ben, vagyis $\psi_j(w_T) = \psi_k(w_T)$. Vegyük ugyanis azt a $\pi : N \to N$ permutációt, amelyik csak a j-t és k-t cseréli fel. Ekkor $\pi w_T = w_T$, a szimmetria miatt pedig $\psi_j(w_T) = \psi_{\pi j}(\pi w_T) = \psi_k(w_T)$. A $\boldsymbol{\psi}$ hatékony is, így $\alpha_T = w_T(N) = \sum_{j\in T}\psi_j(w_T) + \sum_{i\in N\setminus T}\psi_i(w_T) = |T|\psi_j(w_T) + |N\setminus T|0$ miatt $\psi_j(w_T) = \frac{\alpha_T}{|T|}$ teljesül minden $j \in T$-re. A szimmetria, a sallangmentesség és hatékonyság tehát a $w_T = \alpha_T u_T$ játékokon egyértelműen meghatározza a $\boldsymbol{\psi}$ függvényt:

$$\psi_i(\alpha_T u_T) = \begin{cases} \dfrac{\alpha_T}{|T|} & \text{ha } i \in T, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases} \tag{4.6}$$

A Shapley-érték homogenitása és a (4.2) formula alapján azt kapjuk, hogy $\boldsymbol{\psi}(\alpha_T u_T) = \boldsymbol{\phi}(\alpha_T u_T)$ minden $u_T \in \mathcal{G}^N$ egyetértési játékra és $\alpha_T \in \mathbb{R}$ számra.

Végül, a $\boldsymbol{\psi}$ additivitása miatt $\boldsymbol{\psi}(v) = \boldsymbol{\psi}(\sum_{T\in\mathcal{N}} w_T) = \sum_{T\in\mathcal{N}} \boldsymbol{\psi}(w_T) = \sum_{T\in\mathcal{N}} \boldsymbol{\phi}(w_T) = \boldsymbol{\phi}(\sum_{T\in\mathcal{N}} w_T) = \boldsymbol{\phi}(v)$, hiszen a Shapley-érték is additív és a w_T komponens játékokon a $\boldsymbol{\phi}$ az egyetlen szimmetrikus, sallangmentes és hatékony függvény. Tehát a $\mathcal{G}^N$ lineáris vektortéren valóban a Shapley-értékvektor az egyetlen mind a négy axiómának eleget tevő függvény. □

A tétel bizonyítása egy harmadik lehetőséget is nyújt a Shapley-értékvektor kiszámítására. Egy adott $v \in \mathcal{G}^N$ játékra határozzuk meg a $v = \sum_{T\in\mathcal{N}} \alpha_T u_T$ felbontást. A Shapley-értékvektor ekkor

$$\boldsymbol{\phi}(v) = \sum_{T\in\mathcal{N}} \frac{\alpha_T}{|T|}\, \boldsymbol{e}^T, \tag{4.7}$$

ahol $\boldsymbol{e}^T$ jelöli a T koalíció tagsági vektorát (lásd 2.2. definíciót).

Szemléltetésképpen határozzuk meg a **Lóvásár játék** Shapley-értékét ezen a módon is (vö. 4.6. példa). Mivel a lóvásár játék felbontása

$$0\,u_A + 0\,u_B + 0\,u_C + 80\,u_{AB} + 100\,u_{AC} + 0\,u_{BC} - 80\,u_{ABC},$$

a Shapley-értéke

$$\frac{80}{2}(1,1,0) + \frac{100}{2}(1,0,1) - \frac{80}{3}(1,1,1) = \left(\frac{190}{3}, \frac{40}{3}, \frac{70}{3}\right).$$

4.2. Egy költségelosztási alkalmazás

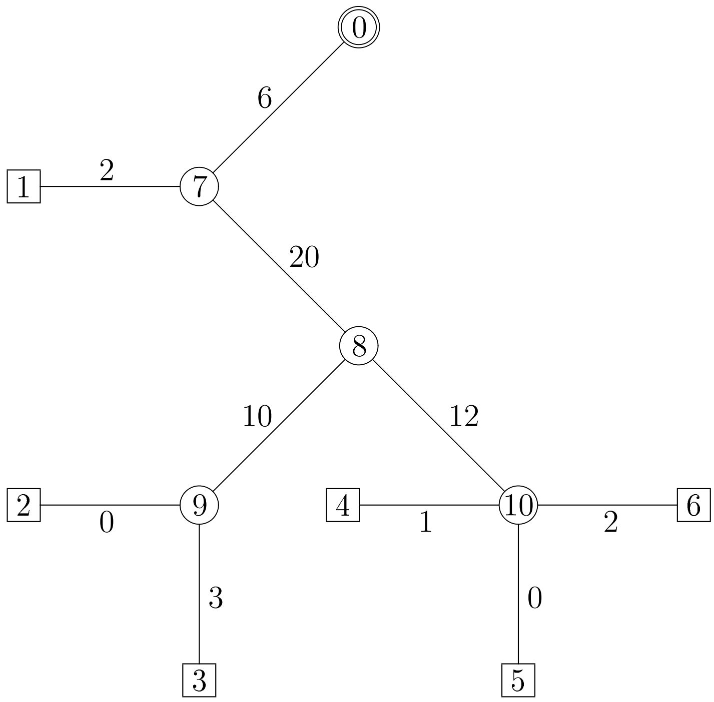
Tekintsük a következő példát. Adott fogyasztók egy csoportja, akik egy bizonyos szolgáltatást (például kábel TV, vagy internet hozzáférés) vesznek igénybe egy központi kiszolgálótól egy kiépített hálózaton keresztül. A hálózat végpontokból és elosztó pontokból áll. A végpontokban helyezkednek el a fogyasztók, illetve az egyik speciális végpontban a kiszolgáló. Az elosztó pontok és az őket összekötő vonalak alkotják a gerinchálózatot, a fogyasztók hozzájuk csatlakozva érik el a kiszolgáló egységet.

Egy ilyen hálózatot mutat a 4.1. ábra. A szolgáltatást nyújtó egységet a 0, a fogyasztókat az $N = \{1,2,3,4,5,6\}$ halmazbeli végpontok reprezentálják. Az $R = \{7,8,9,10\}$ halmazba tartozó pontok az elosztók. A pontok közötti összeköttetést biztosító vonalak mellett feltüntettük az adott szakasz működtetési költségét. Ezek különbözőségének sok oka lehet, például az eltérő technikai jellemzőik (hossz, sávszélesség, stb.).

A fő kérdés a szolgáltató számára az, hogy miként határozza meg a hálózat működtetési költségéből az egyes fogyasztókra eső részt, mert ez alapján egy fix haszonkulcs alapján a tényleges díj már könnyen számolható. A díjkalkulációt egy árhatóság felügyeli és hagyja jóvá, védve a fogyasztók érdekeit és ügyelve az „igazságosságra”. A fogyasztók érdekeinek védelme, ugyanakkor a szolgáltató tényleges költségeinek elismerése jelentse most egyszerűen azt, hogy az $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i\in N}$ költségallokációnak teljesítenie kell a

$$\sum_{i\in N} x_i = c(N) \tag{4.8}$$

egyenlőséget, ahol $c(N)$ jelöli a teljes hálózat működtetési költségét. Példánkban $c(N) = 56$. Az „igazságosság” jelentésének pontosítása már nehezebb feladat, ha egyáltalán lehetséges, ezért egyértelmű meghatározást nem is várhatunk. Zárjuk ki a külső szempontok (például a fogyasztók szociális helyzetének) figyelembevételét, és „igazságos” allokáción értsünk valami olyasmit, ami „tükrözi a hálózat igénybevételének mértékét”. Köznapi szófordulattal mondhatnánk azt is, hogy „a használat arányában történő” allokációt



4.1. ábra. Egy költség-allokációs feladat

keressük, ha nem merülne fel rögtön a kétely, hogy a különbözőségek mérését miért az arányokra, és miért nem a különbségekre alapozzuk. De a további kérdések helyett nézzünk inkább néhány megoldási lehetőséget.

Az imént rögzített elv alapján adódik, hogy mindegyik fogyasztónak meg kell fizetnie az őt a gerinchálózattal összekötő vonal költségét, hiszen ezt a szakaszt egyedül ő használja. Nevezzük az

$$s_i = c(N) - c(N \setminus i)$$

mennyiséget az $i \in N$ fogyasztó *szeparálható költség*ének, ahol $c(N \setminus i)$ jelöli a hálózat működtetési költségét akkor, ha az i-t nem kell kiszolgálni. Példánkban

$$\boldsymbol{s} = (s_i)_{i \in N} = (2, 0, 3, 1, 0, 2).$$

Olyan $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i \in N}$ költségallokációt keresünk tehát, amelyik teljesíti az

$$x_i \geq s_i \qquad \text{minden } i \in N\text{-re} \tag{4.9}$$

elvárásokat.

De mennyit fedezzenek az egyes fogyasztók a fennmaradó összesen

$$k(N) = c(N) - \sum_{i \in N} s_i$$

*közös költség*ből, ami a legtöbb alkalmazásban pozitív? A kérdés nehézségét az okozza, hogy a gerinchálózatot mindenki használja, de nem egyforma mértékben, mert az egyes fogyasztóknak a hálózat különböző részeire van szükségük. Példánkban $k(N) = 48$, a gerinchálózatot alkotó szakaszok költségének összege.

Az árhatóság számára nem elfogadható egy olyan allokáció, amelyben egy fogyasztó többet fizetne annál, mint ha egyedül venné igénybe a szolgáltatást, mert ekkor ez a fogyasztó még mintegy fizetne azért, hogy a többiek is használják a hálózatot. Jelölje $c(i)$ az $i \in N$ fogyasztó így értelmezett *egyedi költség*ét. Egy „igazságosnak" tartott $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i \in N}$ költségallokációnak tehát teljesítenie kell az

$$x_i \leq c(i) \qquad \text{minden } i \in N\text{-re} \tag{4.10}$$

korlátozásokat is. Természetesen a (4.9) illetve a (4.10) feltételek egyszerre csak akkor kielégíthetők, ha

$$c(N) \leq c(N \setminus i) + c(i) \qquad \text{minden } i \in N\text{-re.} \tag{4.11}$$

Példánkhoz hasonlóan, ahol ez könnyen ellenőrizhetően teljesül, az alkalmazásokban szereplő legtöbb költségfüggvényre fennálnak a (4.11) összefüggések. Az egyedi költségek vektora most

$$\boldsymbol{c} = (c(i))_{i \in N} = (8, 36, 39, 39, 38, 40).$$

Ezt megtisztítva a szeparálható költségektől kapjuk a

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{s} = (k(i) = c(i) - s_i)_{i \in N} = (6, 36, 36, 38, 38, 38)$$

vektort, ami a közös rész egyéni használatakor felmerülő költségeket tartalmazza.

Ötletként felmerülhet a közös költség *egyenlő* elosztása, azaz

$$x_i = s_i + \frac{1}{|N|}\, k(N) \qquad \text{minden } i \in N\text{-re.}$$

Példánkban ebben az esetben a hat fogyasztó mindegyike 8-at fizetne a gerinchálózatért. Ez nem „igazságos", hiszen az 1-es fogyasztó csak a 7 és 0 közötti szakaszt használja, míg például a 6-osnak ezen kívül szüksége van (a ráadásul jóval drágább) 8 és 7, illetve a 10 és 8 közötti vonalakra is. Valóban, az 1-es költsége ekkor $x_1 = 2 + 8$ lenne, ami több, mint ha egyedül állná az általa használt részhálózat teljes $c(1) = 2 + 6$ költségét, vagyis sérülne a (4.10) korlátozás.

Egy másik lehetőség a közös költségnek *a szeparálható költségek arányában* történő elosztása, azaz

$$x_i = s_i + \frac{s_i}{\sum_{j \in N} s_j}\, k(N) \qquad \text{minden } i \in N\text{-re.}$$

Ez az elv esetünkben még gondolatkísérletnek is rossz, mert a „magánhálózatok" működtetési költségeinek semmi köze a közös erőforrásból való részesedésnek, így nem lehet alapja a közös teher viselésének sem. Példánkban a 2-es és az 5-ös fogyasztó ezen az alapon nem fizetne semmit a gerinchálózat használatáért, az 1-es ugyanakkor 12-t, vagyis az 1-es költsége ekkor $x_1 = 2 + 12$ lenne, ami meghaladná a $c(1) = 2 + 6$ egyedi költségét, vagyis sérülne a (4.10) korlátozás.

Harmadikként vizsgáljuk meg a közös költségnek *az egyedi költségek arányában* történő elosztását, azaz amikor

$$x_i = s_i + \frac{c(i)}{\sum_{j \in N} c(j)}\, k(N) \qquad \text{minden } i \in N\text{-re.} \tag{4.12}$$

Az előző elgondoláshoz képest tompítva ugyan, de a $c(i) = s_i + k(i)$ összefüggés miatt itt is tetten érhető a „magánhálózatok" működtetési költségeinek hatása a közös költségből való részesedésben. Emiatt a (4.10) korlátozás könnyen sérülhet (lásd a 4.5. feladatot), habár konkrét példánkban erről nincs szó.

Ez a kritika nem érheti a közös költségnek *az egyéni használatból eredő költségrészek arányában* történő elosztását, vagyis az

$$x_i = s_i + \frac{k_i}{\sum_{j \in N} k_j}\, k(N) \qquad \text{minden } i \in N\text{-re} \tag{4.13}$$

allokációt. Könnyű meggondolni (4.6. feladat), hogy a (4.13) allokáció teljesíti mind a (4.9) mind a (4.10) követelményeket. Példánkban

$$\boldsymbol{s} + \frac{48}{192}\, \boldsymbol{k} = (1.5, 9, 9, 9.5, 9.5, 9.5).$$

Vegyük észre ugyanakkor, hogy a (4.13) allokáció egy fogyasztó költségrészének meghatározásakor a tényleges helyzeten kívül csak azt a két alternatív lehetőséget veszi figyelembe, amikor egyedül csak ezt a fogyasztót kellene, illetve, amikor csak őt nem kellene kiszolgálni.

Példánkhoz hasonlóan viszont sok alkalmazásban a fogyasztók bármely csoportjára meghatározható annak a költsége, hogy az adott erőforrást csak ők használják. Célszerűnek látszik minden ilyen információt figyelembe venni az egyes fogyasztókra kirótt költségrészek megállapításakor. Kínálja magát a TU-játékok modellje, azzal a különbséggel, hogy most a preferenciák fordítottak, a kisebb a jobb.

Legyen N a fogyasztók halmaza és c a *költségfüggvény*, ami megadja a felhasználók bármely $S \subseteq N$ csoportjára kiszolgálásuk $c(S)$ költségét. Amennyiben $c(\varnothing) = 0$, úgy az (N, c) modellel nyilván ekvivalens $(N, -c)$ modellt is vizsgálhatnánk, ami már egy, a szokásos „a nagyobb a jobb" típusú TU-játék. A közvetlenebb értelmezhetőség miatt viszont célszerűbb figyelembe venni a preferencia irányának megváltozását és a definíciókban megfordítani az egyenlőtlenségeket. Például azt fogjuk mondani, hogy az (N, c) egy *költségjáték*, ami

- *lényeges*, ha $\sum_{i\in S} c(i) > c(S)$,
- *szubadditív*, ha $c(S \cup T) \le c(S) + c(T)$ valahányszor $S \cap T = \varnothing$,
- *konkáv*, ha $c(S \cup T) + c(S \cap T) \le c(S) + c(T)$ tetszőleges $S, T \subseteq N$-re.

Az (N, c) költségjáték egy kimenetelét jelentő $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N$ vektort nem kifizetésvektornak fogjuk hívni, hanem *allokáció*nak, amire akkor mondjuk, hogy egy *elosztás*, ha *szétosztás* (azaz $x(N) = c(N)$, lásd (4.8)) és *egyénileg elfogadható* (azaz $x_i \le c(i)$ minden $i \in N$-re, lásd (4.10)). A költségjáték magján pedig az allokációk $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N \mid x(N) = c(N);\ x(S) \le c(S)\ \forall S \subseteq N\}$ halmazát értjük. Ilyen módon a TU-játékokra megismert eddigi eredmények értelemszerűen átvihetők és alkalmazhatók.

Az adott erőforrás igénybevételét tükröző „igazságos" elosztásokkal szemben egyedi elvárásokat is megfogalmaztunk, lásd (4.9). A szeparálható költség fogalmának kézenfekvő kiterjesztésével szigoríthatjuk ezt a kritériumot:

$$\sum_{i\in S} x_i \ge c(N) - c(N \setminus S) \qquad \text{minden } S \subseteq N\text{-re.} \tag{4.14}$$

Könnyen adódik, hogy a (4.14) elvárásokat teljesítő szétosztások pontosan a költségjáték mag-allokációi (4.7. feladat). Korábbi ismereteink alapján világos, hogy bármely szubadditív költségjátékban fennáll a (4.11) feltétel, tehát például a (4.13) allokáció egy „egyénileg igazságos" elosztást ad (lásd 4.6. feladat), a szigorúbb „csoportosan igazságos" elosztásokat megtestesítő mag-allokációk ugyanakkor már nem feltétlenül léteznek. Egy konkáv költségjátékban ugyanakkor például a Shapley-értéknek megfelelő szétosztás biztosan egy mag-allokáció.

Amennyiben egy „pártatlan” és „igazságos” költségallokációs mechanizmust szeretnénk, amelyik bármelyik konkrét költségjátékra egyértelműen megad egy allokációt, akkor a *Shapley-allokáció* (a Shapley-értéknek a feladat minimalizáló jellegének megfelelően módosított változata) alkalmazása kínálja magát. Valóban, hiszen nem csak a Shapley-értéket egyértelműen meghatározó axiómáknak, de a Shapley-érték egyéb tulajdonságainak a megfelelői is mind-mind egy „tisztességes” költségallokációs mechanizmus valamilyen „kívánatos” jellemzőjét fogalmazzák meg. Tudjuk ugyanakkor, hogy a Shapley-szétosztás megsértheti a (4.14) feltételeket, még olyan költségjátékokban is, amelyekben mag-allokációk egyébként léteznek. Sőt, „nagyon szabályszerűtlen” költségfüggvény esetén a Shapley-szétosztásra még a (4.9) illetve a (4.10) korlátok is sérülhetnek. Ugyanakkor a marginális költségváltozásokra való alapozottsága miatt a Shapley-allokáció jól illeszkedik a hagyományos számviteli gondolatkörbe.

Térjünk vissza kiinduló példánkhoz, illetve általánosabban az ilyen típusú fa-struktúrán megadott problémákhoz, és keressük a Shapley-féle allokációt. A tárgyalás egyszerűsége kedvéért gondolatmenetünket a 4.1. ábrán megadott konkrét példán ismertetjük, de igyekszünk ezt úgy tenni, hogy az könnyen általánosítható legyen tetszőleges adatokra és fa-struktúrákra.

A hálózat felépítését adó gráf egy fa az $N \cup R \cup \{0\}$ halmazbeli csúcspontokon. Ebből következően tetszőleges $j \neq 0$ csúcsból egyetlen út vezet a szolgáltatást nyújtó egységet reprezentáló 0 csúcsba. Jelölje $P(j)$ az ebben az útban szereplő csúcsok halmazát, a j-t beleértve, de a 0-t kizárva. Legyen e_j az ebben az útban szereplő első, azaz a j-ből kiinduló él. Kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van tehát az $N \cup R$-beli csúcsok és a fa élei között. A fogyasztókat az N halmazbeli pontok reprezentálják, ezek egyetlen él végpontjai, míg az R halmazba tartozó pontok az elosztók, ezekhez legalább két él csatlakozik. Legyen az e_j él költsége $d_j \geq 0$.

A fogyasztók egy $S \subseteq N$ csoportjának a kitüntetett 0 végponttal való összeköttetéséhez szükséges és elegendő az a részfa, amelyik az S-beli végpontokból a 0 végpontba menő utak egyesítése. Definiáljuk az S kiszolgálásának költségét az ebben a részfában szereplő élek költségeinek összegeként, vagyis legyen

$$c(S) = \sum_{j \in \bigcup_{i \in S} P(i)} d_j \tag{4.15}$$

minden nemüres $S \subseteq N$-re, és legyen $c(\varnothing) = 0$. Célunk tehát az így értelmezett (N, c) költségjáték Shapley-allokációjának meghatározása.

Hasznos lesz a hálózat felépítését és paramétereit a következő táblázattal megadni. Ennek sorai meghatározzák, hogy a fogyasztókat a szolgáltatóval összekötő utakban mely élek szerepelnek.

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	$c(i)$
$\boldsymbol{d}$	2	0	3	1	0	2	6	20	10	12	
1	1						1				8
2		1					1	1	1		36
3			1				1	1	1		39
4				1			1	1		1	39
5					1		1	1		1	38
6						1	1	1		1	40

(4.16)

Az utolsó oszlopban feltüntettük az egyedi költségeket is, amik a $\boldsymbol{d}$ élköltség vektornak az adott sorvektorokkal vett szorzatai.

A táblázat segítségével a költségfüggvény könnyen meghatározható. Egy $S \subseteq N$-re képezni kell az S-hez tartozó sorvektorok komponensenkénti maximumaiból álló sorvektornak a $\boldsymbol{d}$ élköltség vektorral vett szorzatát. Például, $c(\overline{24}) = \boldsymbol{d} \cdot (0,1,0,1,0,0 \mid 1,1,1,1) = 49$. Ez alapján a c költségfüggvényről könnyen belátható, hogy lényeges, sőt szubadditív, sőt konkáv (lásd a 4.8. feladatot). Ekkor viszont a Shapley-allokáció egy mag-allokáció, tehát amit keresünk, az kiállja az összes általunk eddig tárgyalt próbát.

Az egyes csoportok költségének egyszerű meghatározhatósága ugyanakkor nem jelenti célunk gyors megvalósíthatóságát. Először is azért nem mert a költségfüggvény megadásához $2^{|N|} - 1$ különböző koalícióra kell ezt a műveletet végrehajtani. Másodszor pedig azért nem mert ugyan a költségfüggvényből a Shapley-allokáció már az ismert képlet (értelemszerűen módosított változata) alapján számolható, de az ebben igényelt összeadások száma a fogyasztók számának szintén exponenciális függvénye, mégpedig $|N| \cdot 2^{|N|-1}$. Szerencsére ennél sokkal gyorsabban és a költségfüggvény meghatározása nélkül, közvetlenül az adatokból dolgozva is célt érhetünk. Külöm öröm, hogy a Shapley-allokáció egybeesik egy igen természetes, a fentebb tárgyalt értelemben „igazságosnak” ítélt elv szerinti megoldással.

Nevezzük *méltányos*nak azt az allokációt, amelyik mindegyik él költségét egyenlően osztja szét az őt használó fogyasztók között. Konkrét példánkban ezt a megoldás az alábbi táblázat sorainak és a $\boldsymbol{d}$ élköltég vektornak a szorzataiként számíthatjuk.

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	$f(i)$
$\boldsymbol{d}$	2	0	3	1	0	2	6	20	10	12	
1	1						1/6				3
2		1					1/6	1/5	1/2		10
3			1				1/6	1/5	1/2		13
4				1			1/6	1/5		1/3	10
5					1		1/6	1/5		1/3	9
6						1	1/6	1/5		1/3	11

Mivel mindegyik oszlopösszeg 1, a méltányos allokáció egy szétosztás. A fenti táblázattal való összehasonlításból (és az élköltségek nemnegativitásából) azonnal adódik, hogy teljesülnek a (4.9) illetve a (4.10) feltételek, a méltányos allokáció tehát egy „egyedileg igazságos” elosztás. Az is könnyen belátható, hogy a méltányos allokáció egy mag-allokáció, vagyis „igazságos” a fentebb megfogalmazott szigorúbb értelemben is (lásd a 4.9. feladatot). Ezt az állítást mi közvetett úton igazoljuk. Először megmutatjuk, hogy a Shapley-allokáció azonos a méltányos allokációval, majd utalunk arra a korábban igazolt eredményre, aminek nyilvánvaló analogonja szerint egy konkáv költségjátékban a Shapley-allokáció egy mag-allokáció.

4.10. állítás. *Igazoljuk, hogy tetszőleges fa-struktúra és nemnegatív élköltségek mellett a (4.15) által definiált (N,c) költségjátékban a Shapley-allokáció azonos a méltányos allokációval.*

Bizonyítás. Definiáljunk mindegyik $j \in N \cup R$ csúcshoz egy (N, c^j) költségjátékot a következőképpen: legyen $c^j(\varnothing) = 0$, és minden nemüres $S \subseteq N$-re

$$c^j(S) = \begin{cases} d_j & \text{ha } j \in \bigcup_{i\in S} P(i) \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

vagyis c^j-ben csak azoknak a koalícióknak nem 0 a költsége, amelyek használják a j csúcshoz tartozó d_j költségű e_j élt. (Megjegyezzük, hogy a hálózatnak a (4.16)-típusú táblázattal való megadása esetén $c^j(S)$ egyenlő az S-hez tartozó sorvektorok e_j-komponensei maximumának és a $\boldsymbol{d}$ élköltség vektor e_j-komponensének a szorzatával. Például, $c^8(\overline{24}) = d_8 \cdot \max\{1,1\} = 20$.) Világos, hogy $c(S) = \sum_{j\in N\cup R} c^j(S)$ minden $S \subseteq N$-re. A Shapley-allokáció additivitása miatt $\boldsymbol{\phi}(c) = \sum_{j\in N\cup R} \boldsymbol{\phi}(c^j)$.

Bármelyik $j \in N \cup R$ esetén a c^j-ben pontosan azok az $i \in N$ fogyasztók a sallangjátékosok, akik nem igénylik az e_j élt, vagyis ha $j \notin P(i)$. Mivel ilyen i-re $c^j(\{i\}) = 0$, a Shapley-allokáció sallangmentessége miatt $\varphi_i(c^j) = 0$.

Ugyanakkor a c^j-ben szimmetrikus (felcserélhető) a szerepe azoknak az $i \in N$ fogyasztóknak, akik használják az e_j élt. Vagyis ha $j \in P(i)$ és $j \in P(i')$, akkor a Shapley-allokáció szimmetrikussága miatt $\varphi_i(c^j) = \varphi_{i'}(c^j)$ kell legyen. A Shapley-allokáció hatékonyságából következik, hogy

$$d_j = c^j(N) = \sum_{i \in N} \varphi_i(c^j) = \sum_{i \in N^j} \varphi_i(c^j) = |N^j| \cdot \varphi_i(c^j),$$

ahol N^j jelöli azoknak a fogyasztóknak a halmazát akik használják az e_j élt. (Megjegyezzük, hogy a hálózat (4.16)-típusú táblázatában az e_j-hez tartozó oszlopvektor éppen az N^j koalíció tagsági vektora.) A Shapley-allokáció tehát a c^j költségjátékokon azonos a méltányos allokációval. Mivel ez utóbbi szétosztási elv definíciójából következően egy rögzített fa-struktúrán megadott költségjátékokra nyilvánvalóan additív, az állítás adódik. □

4.3. Az Aumann–Shapley árak

Kezdjük egy példával. Tegyük fel, hogy egy olajfinomítóban csak kétféle végterméket, motorbenzint és dízelolajat állítanak elő, amelyek egyetlen technológiai folyamat eredményei. Így nagyon nehéz a hagyományos módon elkülöníteni a benzint, illetve a dízelolajat terhelő költségeket. Bármilyen vetítési alap használata nagyon mesterkéltnek látszik és egyáltalán nem szolgálná a gazdasági tisztánlátást. Egészen új megvilágításba kerül ez a költségszétosztási probléma, ha játékelméleti eszközöket is használunk.

Legyen $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ egy folytonosan differenciálható költségfüggvény. $f(x, y)$ az a költség, amely akkor merül fel, ha x hordó benzint és y hordó dízelolajat szeretnénk értékesíteni (ennyire van megrendelés, nevezzük ezt keresletnek). Tegyük fel, hogy x és y egész számok. Definiáljunk egy olyan $C(x, y)$ kooperatív költségjátékot, amelyben $x + y$ játékos van, a benzines hordókhoz a $B_1, \dots, B_x$ játékosokat, a dízelolajas hordókhoz a $D_1, \dots, D_y$ játékosokat rendeljük. A $\{B_{i_1}, \dots, B_{i_k}, D_{j_1}, \dots, D_{j_l}\}$ koalíció költsége legyen $f(k, l)$. Ebben a költségjátékban a B és D játékosok csak az indexeikkel különböztethetőek meg. A $C(x, y)$ játék Shapley-értéke jól definiálható, és az $f(x, y)$ költség egy szétosztását adja meg. A szimmetria miatt nyilván minden B játékosnak és D játékosnak ugyanakkora a Shapley-értéke (ugyanannyit kell fizetnie). Ha tehát $b(x, y)$ egy hordó benzin, $d(x, y)$ pedig egy hordó dízelolaj költsége, akkor

$$b(x, y)x + d(x, y)y = f(x, y).$$

A $b(x, y)$ és $d(x, y)$ tehát olyan egységköltségek, amelyek segítségével a teljes $f(x, y)$ költséget fel lehet osztani és úgy lehet értelmezni, hogy ezek a B és D játékosok átlagos marginális hozzájárulásai az összköltséghez.

Számoljuk most a termelést egyre kisebb egységekben (palack, ampulla,...) és vegyük a $b(x, y)x$ és $d(x, y)y$ mennyiségek határértékét, ha x és y tartanak a végtelenhez. Aumann és Shapley bebizonyították (Aumann and Shapley, 1974), hogy ezek a határértékek léteznek és

$$\lim_{x,y\to\infty} b(x, y)x = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty)dt$$

$$\lim_{x,y\to\infty} d(x, y)y = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty)dt$$

A jobboldalon álló integrálokat *Aumann–Shapley árak*nak nevezik.

Általánosan, ha n termékünk van és az $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ költségfüggvény folytonosan differenciálható, akkor az i termék Aumann–Shapley ára

$$\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(t\mathbf{x})dt, \quad i = 1, ..., n$$

ahol $\mathbf{x}$ a kereslet vektor. Ekkor

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(t\mathbf{x})dt \ = f(\mathbf{x})$$

Lineáris költségfüggvény esetében az Aumann–Shapley árak egybeesnek a marginális költségekkel, általában azonban nem (lásd a 4.10. feladatot). Az Aumann-Shapley árak interpretációja egyszerű. Feltesszük, hogy a termelés a $\mathbf{0}$ induló értékről arányosan nő az $\mathbf{x}$ keresletig és ezen növekedési ösvény mentén vesszük a határköltségek átlagát. Érdemes megfigyelni, hogy az Aumann–Shapley árak a költségfüggvénynek csak azoktól az értékeitől függenek, amelyek ezen ösvény mentén vannak.

Az Aumann–Shapley árakat is lehet közvetlenül axiomatizálni a költségszétosztási probléma kontextusában. Az axiómák nagyon hasonlítanak a Shapley értéket meghatározó axiómákhoz (Billera and Heath, 1982).

4.4. Feladatok

4.1. feladat. Igazoljuk a (4.2) formulában szereplő egyenlőséget! Szükség lehet a tetszőleges $n \geq 1$ és $1 \leq t \leq n - 1$ egészekre fennálló

$$\sum_{r=0}^{n-t} \binom{t-1+r}{r} = \binom{n}{t}$$

azonosságra.

4.2. feladat. Lássuk be a 4.5. állítást!

4.3. feladat. Lássuk be a (4.1) és (4.5) kifejezések azonosságát tetszőleges $i \in N$ és $v \in \mathcal{G}^N$ mellett!

4.4. feladat. Lássuk be a 4.8. állítást!

4.5. feladat. Legalább mekkora szintre kell emeljük a 4.1. ábrán látható hálózatban az $(1, 7)$ szakasz költségét ahhoz, hogy változatlan egyéb adatok mellett a (4.12) szerinti allokációban $x_1 > c(1)$ legyen?

4.6. feladat. Igazoljuk, hogy a (4.13) allokáció minden olyan esetben teljesíti a (4.9) és a (4.10) követelményeket, amikor fennállnak a (4.11) egyenlőtlenségek és a bennük szereplő összes költség nemnegatív.

4.7. feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges (N, c) költségjátékban a (4.14) feltételt teljesítő szétosztások halmaza pontosan a költségjáték magja.

4.8. feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges fa-struktúra és nemnegatív élköltségek mellett a (4.15) által definiált c költségfüggvény konkáv, következésképpen szubadditív, s ezért szükségképpen lényeges.

4.9. feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges fa-struktúra és nemnegatív élköltségek mellett a méltányos allokáció egy mag-allokáció.

4.10. feladat. Bizonyítsuk be, hogy lineáris költségfüggvény esetén az Aumann–Shapley árak egybeesnek a határköltségekkel. Mutassunk példát olyan költségfüggvényre, ahol ez nem áll fenn.

5. fejezet

A nukleolusz

E fejezetben visszatérünk a stabil halmazoknál követett hagyományos tárgyalásmódhoz: csak lényeges játékokkal foglalkozunk és a szóbajöhető kifizetések körét eleve az elosztások halmazára korlátozzuk.

Idézzük fel, hogy egy $n = |N|$-szereplős lényeges v játékban az elosztások $\mathbf{I}(v)$ halmaza egy n extremális ponttal rendelkező $(n-1)$-dimenziós poliéder, azaz egy szimplex (lásd 1.25. állítás). Emlékezzünk továbbá arra is, hogy a mag-elosztások a minden koalíció számára elfogadható elosztások (lásd 1.24. definíció). Egy magon kívüli $\boldsymbol{x} \in \mathbf{I}(v)$ elosztásnál tehát biztosan van egy olyan S koalíció, melyre $x(S) < v(S)$. Nyilván minél nagyobb a koalíció által elérhető összhaszon a neki szánt összkifizetésnél, a koalíció annál elégedetlenebb az adott szétosztással, annál kevésbé hajlandó azt elfogadni, illetve annál nagyobb késztetést érez a nagykoalícióból való kiválásra.

5.1. definíció. Egy adott v játékban az S koalíciónak az $\boldsymbol{x}$ kifizetésnél vett *többlete* alatt az

$$e(S, \boldsymbol{x}) = v(S) - x(S)$$

különbséget értjük.

Az $e(S, \boldsymbol{x})$ többlet tehát azt mutatja, hogy az S koalíció mennyit nyerhet (vagy veszíthet, ha a többlet negatív) a nagykoalícióban való részvétel és a javasolt $\boldsymbol{x}$ elosztás elutasításával. Az elosztások halmazán az üres koalíció illetve a nagykoalíció többlete azonosan nulla, ezért csak a

$$\mathcal{N}_+ = \mathcal{N} \setminus \{N\} = \{S \subseteq N : S \neq \varnothing, N\}$$

halmazbeli koalícióknak változhat a többlete, így csak ezek a valódi részkoalíciók lesznek most a megoldás szempontjából érdekesek. Ezekkel a jelölésekkel egy (N, v) játék magja a következőképpen írható:

$$\mathbf{C}(v) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{I}(v) : \max_{S \in \mathcal{N}_+} e(S, \boldsymbol{x}) \leq 0\}.$$

Tudjuk, hogy elosztások minden lényeges játékban vannak, de a mag csak akkor nem üres, ha a nagykoalíció értéke „kellően nagy” a többi koalíció értékéhez képest, vagyis a játék kiegyensúlyozott, mert ekkor tudunk minden koalíciónak nempozitív többletet garantálni. Lássuk mi történik akkor, ha a megengedett többlet egységes szintjét nem rögzítjük előre, hanem csak egy relatíve legjobb közös elfogadhatósági küszöböt próbálunk elérni?

Keressük először azokat az elosztásokat, amelyek a lehető legkisebb többletet garantálják az összes valódi részkoalíciónak, vagyis az olyan elosztásokat, amelyeknél a legmagasabb többlet a lehető legalacsonyabb. Amennyiben több ilyen elosztás is van – és tipikusan ez a helyzet –, akkor közülük stabilabbnak tarthatjuk azokat, amelyeknél a második legnagyobb többlet is a lehető legkisebb. Keressük tehát azokat az elosztásokat, amelyek a legmagasabb többlet minimalizálása mellett a második legmagasabb többletet is a lehető legalacsonyabb szintre szorítják le. Ha még ilyen elosztás is több van, akkor keressük közöttük azokat, amelyeknél a harmadik legnagyobb többlet is a lehető legkisebb, és így tovább egészen addig, amíg ezen újabb és újabb kívánalmak alapján még különbséget tudunk tenni az elosztások között. Ennek az optimalizálás-sorozatnak a kimenete a nukleolusz. Mielőtt a pontos definíciót megadnánk, hajtsuk végre a most vázolt eljárást néhány jól ismert példán.

Kezdjük most is a kétszemélyes játékokkal.

5.2. példa. Legyen $N = \{1, 2\}$ és $v \in \mathcal{G}^N$ egy lényeges játék. Ekkor

$$\mathbf{I}(v) = \big\{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 = v(12), x_1 \geq v(1), x_2 \geq v(2)\big\} = \mathbf{C}(v),$$

és ezen a szakaszon csak a két egyszemélyes koalíció többlete változhat. Elemi úton belátható, hogy az $e(1, (x_1, x_2)) = v(1) - x_1$ és $e(2, (x_1, x_2)) = v(2) - x_2$ többletek maximuma akkor lesz a legkisebb, ha egyenlőek. Ebből egyértelműen adódik, hogy $i = 1, 2$-re is

$$x_i = v(i) + \frac{v(12) - v(1) - v(2)}{2}.$$

Vegyük észre, hogy a Shapley-érték is ugyanezt az elosztást javasolja (vö. 4.3. példa). Kétszemélyes lényeges játékokra tehát a nukleolusz és a Shapley-érték megegyezik.

Fogalmazzuk meg matematikailag is a fentebb vázolt szekvenciális optimalizálási eljárást. Ehhez szükségünk van néhány jelölésre. Egy adott n-szereplős (N, v) játékban az $\mathcal{N}_+$-beli koalícióknak egy $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N$ kifizetésnél vett többleteit rendezzük nemnövekvő sorrendbe. Az így kapott $2^n - 2$ valós komponensből álló vektort jelölje $E(\boldsymbol{x})$, vagyis legyen

$$E(\boldsymbol{x}) = [\, \ldots \geq e(S, \boldsymbol{x}) \geq \ldots \quad : \; S \in \mathcal{N}_+].$$

Jelölje $\varrho(\boldsymbol{x})$ az $E(\boldsymbol{x})$-ben előforduló különböző többlet-szintek számát, $t^1(\boldsymbol{x})$ a legnagyobb értéket, $t^2(\boldsymbol{x})$ a második legnagyobb többletet, és így tovább, $t^{\varrho(\boldsymbol{x})}(\boldsymbol{x})$ az $E(\boldsymbol{x})$-beli legkisebb számot. Az $\boldsymbol{x}$-hez tartozó rendezett többlet-szintek sorozata tehát

$$t^1(\boldsymbol{x}) > t^2(\boldsymbol{x}) > \ldots > t^{\varrho(\boldsymbol{x})}(\boldsymbol{x}).$$

Az $\boldsymbol{x}$-nél a j-edik legmagasabb többlettel rendelkező koalíciók halmazát jelölje $\mathcal{E}^j(\boldsymbol{x})$. Az $\boldsymbol{x}$-hez tartozó *koalíció-elrendezés* alatt az $\mathcal{N}_+$ halmaz

$$\langle \mathcal{E}^1(\boldsymbol{x}), \mathcal{E}^2(\boldsymbol{x}), \ldots, \mathcal{E}^{\varrho(\boldsymbol{x})}(\boldsymbol{x}) \rangle$$

halmazokból álló rendezett partícióját értjük.

5.3. definíció (nukleolusz)**.** Egy (N, v) játék nukleolusza az elosztások azon halmaza, amelyek az elosztások között lexikografikusan minimalizálják a nemnövekvő sorrendbe rendezett többletek vektorát, azaz

$$\mathbf{N}(v) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{I}(v) : E(\boldsymbol{x}) \leq_L E(\boldsymbol{y}) \quad \text{minden } \boldsymbol{y} \in \mathbf{I}(v)\text{-re}\},$$

ahol $\leq_L$ jelenti a rögzített komponens-sorrendű vektorok közötti gyenge lexikografikus rendezést, miszerint pontosan akkor $A \leq_L B$, ha $A = B$ vagy $A_i < B_i$ az első olyan i komponensre, amelyikben az A és B vektorok különböznek.

Nyilvánvaló, hogy a csak egyetlen elosztással rendelkező (nem lényeges) játékokban a nukleolusz sem lehet más mint ez az egyetlen, a mindegyik játékosnak a saját koalíciós értékét rendelő elosztás.

A nukleoluszt Schmeidler (1969) vezette be és rögtön meg is mutatta, hogy

- minden elosztással rendelkező játék nukleolusza egyetlen elosztásból áll.

Definíciója szerint a nukleolusz egy kifizetés-halmaz, de mivel ez a halmaz mindig csak egyetlen kifizetést tartalmaz, ritkán teszünk különbséget a halmaz és egyetlen eleme között. Sőt egy játék nukleoluszán általában ezt a játékhoz egyértelműen tartozó kifizetés-vektort értjük. Ebben az (igazából nem túl precíz) értelemben a nukleolusz – a Shapley-értékhez hasonlóan – egy pont-értékű megoldási koncepció.

A nukleolusz meghatározására Maschler, Peleg és Shapley (1979) adott egy lexikografikus közép eljárásnak nevezett algoritmus-vázat, ami egyúttal a nukleolusz alternatív, konstruktív definíciójának is tekinthető. A nukleolusz nemürességét és egyeleműségét, vagyis egy minden lényeges játékhoz egyértelműen tartozó nukleolusz-kifizetés létezését mi a lexikografikus eljárás helyességének bizonyításával látjuk be.

A lexikografikus közép eljárás

INPUT: egy lényeges (N, v) játék

LEGYEN $X^0 := \mathbf{I}(v) \quad \Sigma^0 := \mathcal{N}_+, \quad r := 0$

AMÍG $\Sigma^r \neq \varnothing$ LEGYEN

$$\left|\begin{array}{lcl} r & := & r+1 \\ t^r & := & \min\limits_{\boldsymbol{x}\in X^{r-1}} \max\limits_{S\in\Sigma^{r-1}} e(S,\boldsymbol{x}) \\ X^r & := & \{\boldsymbol{x} \in X^{r-1} : \max\limits_{S\in\Sigma^{r-1}} e(S,\boldsymbol{x}) \le t^r\} \\ \Delta^r & := & \{S \in \Sigma^{r-1} : \min\limits_{\boldsymbol{x}\in X^r} e(S,\boldsymbol{x}) = t^r\} \\ \Sigma^r & := & \Sigma^{r-1} \setminus \Delta^r \end{array}\right.$$

LEGYEN $\varrho := r$

OUTPUT: X^ϱ az (N, v) játékban az $\mathbf{I}^*(v)$ [vagy $\mathbf{I}(v)$] ***lexikografikus közepe***

A lexikografiuks közép eljárás helyességének belátásához azt kell meggondolni, hogy minden utasítása kivitelezhető és egyértelmű eredményre vezet, továbbá, hogy véges sok iteráció után biztosan megáll. Indukcióval ez különösebb nehézség nélkül megtehető az alábbi állítás-sorozat igazolásával: minden olyan $r \geq 1$-re melyre $\Sigma^r \neq \varnothing$

- t^r jól definiált (létezik);
- $X^r \neq \varnothing$ konvex, kompakt;
- $\Delta^r \neq \varnothing$; következésképpen az iterációk száma ϱ véges.

A lexikografikus közép eljárás tehát tetszőleges lényeges játék esetén generál egy szigorúan csökkenő $t^1 > t^2 > \ldots > t^\varrho$ többletszint sorozatot, kifizetéshalmazazok egy szűkülő $X^0 \supseteq X^1 \supseteq \ldots \supseteq X^\varrho$ sorozatát, és a kezdetben figyelembe vett $\Sigma^0 = \mathcal{N}_+$ koalíció-halmaz egy olyan rendezett $\langle \Delta^1, \ldots, \Delta^\varrho \rangle$ partícióját, hogy

$$S \in \Delta^r \quad \Rightarrow \quad e(S, \boldsymbol{x}) = t^r \;\; \forall \boldsymbol{x} \in X^r.$$

Ha az $\{i\}$ egyszemélyes koalíció többlete az $r(i)$-edik iterációban vált konstanssá, azaz $\{i\} \in \Delta^{r(i)}$, akkor többlete minden $\boldsymbol{x} \in X^{r(i)} \supseteq X^\varrho$-nél ugyanaz a $t^{r(i)}$ érték. Kapjuk, hogy minden $i \in N$-re $x_i = v(i) - e(S, \boldsymbol{x}) = v(i) - t^{r(i)} \;\forall \boldsymbol{x} \in X^\varrho$ esetén. Következésképpen,

- a lexikografikus közép pontosan egy kifizetés-vektort tartalmaz.

Annak belátásához, hogy ez az egyetlen kifizetés-vektor azonos a nukleolusz-beli egyetlen kifizetés-vektorral azt kell meggondolni, hogy

- a lexikografikus eljárás bármelyik $1 \le r \le \varrho$ iterációjában tetszőleges $\boldsymbol{x} \in X^r$, $\boldsymbol{y} \in X^{r-1} \setminus X^r$-re $\quad E(\boldsymbol{x}) <_L E(\boldsymbol{y})$,

hiszen ekkor a legszűkebb X^ϱ-beli egyetlen kifizetés nyilván lexikografikusan minimalizálja a rendezett többlet-vektorokat a kiinduláskor figyelembe vett kifizetések halmazán.

Kiegyensúlyozott (tehát lényeges) v játékban a nukleolusz egy magbeli elosztás, azaz $\eta(v) \in \mathbf{C}(v)$.

A pre-nukleoluszra vonatkozó jellemzés Sobolev (1975), a nukleoluszra vonatkozó Kohlberg (1971) eredménye.

5.4. tétel. *Az $\boldsymbol{x}$ szétosztás pontosan akkor a pre-nukleolusz kifizetés, ha minden $1 \le r \le \varrho(\boldsymbol{x})$-re az $\cup_{j=1}^{r} \mathcal{E}^j(\boldsymbol{x})$ koalíció-halmaz kiegyensúlyozott.*

Az $\boldsymbol{x}$ elosztás pontosan akkor a nukleolusz kifizetés, ha minden $1 \le r \le \varrho(\boldsymbol{x})$-re az $\cup_{j=1}^{r} \mathcal{E}^j(\boldsymbol{x})$ koalíció-halmaz kiegyensúlyozott az $\mathcal{E}^0(\boldsymbol{x}) = \{\,\{i\} : x_i = v(i)\,\}$ koalíciók segítségével, azaz van olyan $\cup_{j=1}^{r} \mathcal{E}^j(\boldsymbol{x}) \subseteq \mathcal{G}_r \subseteq \cup_{j=1}^{r} \mathcal{E}^j(\boldsymbol{x}) \cup \mathcal{E}^0(\boldsymbol{x})$ koalíció-rendszer ami kiegyensúlyozott.

Bizonyítás a lexikografikus közép eljárás egyes iterációban a t^r-ek meghatározására alkalmas LP-k és duálisaik optimális megoldásainak komplementaritása alapján. □

Végezetül vegyük a szűkmagról szóló rész végén vizsgált nem 0-monoton, de lényeges játékot és határozzuk meg a pre-nukleoluszát illetve a nukleoluszát.

Példa (folyt.) (a pre-nukleolusz és a nukleolusz különbözik)
A pre-nukleolusz nyilván mindig a szűkmag eleme. Mivel a szűkmag most egy szakasz, könnyű látni, hogy a pre-nukleolusz e szakasz felezőpontja, azaz ebben a játékban $\eta^* = (2.5, 1.5, -1)$. Az ehhez a kifizetés-vektorhoz tartozó rendezett többlet-vektor $E(\eta^*) = [1, 1\,|\,0.5, 0.5\,|\,-1.5\,|\,-2.5]$. Mivel a kapcsolódó koalíció-elrendezés $\langle \overline{3}, \overline{12}\,|\,\overline{13}, \overline{23}\,|\,\overline{2}\,|\,\overline{1} \rangle$ első, első két, első három blokkja egyaránt kiegyensúlyozott, a Sobolev-kritérium alapján az η^* valóban a pre-nukleolusz.

A nukleolusz esetében a lexikografikus közép eljárás első iterációjában $t^1 = 2$ adódik. Ezt a maximális többletet az elosztások között csak a $(3, 0, 0)$ és $(0, 3, 0)$ közötti szakaszon lévő elosztások tudják garantálni, az X^1 tehát az elosztás-háromszög $x_3 = 0$-hoz tartozó oldala. Ezen a halmazon az

$\overline{12}$ koalíció többlete végig $t^1 = 2$, míg más koalícióra ez nem igaz, vagyis $\Delta^1 = \{\overline{12}\}$. A második iterációban $t^2 = 0$-t kapunk, s ezt a többletet a még figyelembe vett koalíciókra csak a $(2,1,0)$ elosztás tudja garantálni, itt az optimális megoldások X^2 halmaza tehát egyelemű, az eljárás ezért le is állítható. Az $\eta = (2,1,0)$ kifizetés-vektorhoz tartozó rendezett többlet-vektor $E(\eta) = [2 \,|\, 0,0,0 \,|\, -1 \,|\, -2]$, a kapcsolódó koalíció-elrendezés $\langle \overline{12} \,|\, \overline{3}, \overline{13}, \overline{23} \,|\, \overline{2} \,|\, \overline{1} \rangle$, a nulla többletű egyszemélyes koalíciók halmaza pedig $\mathcal{E}^0 = \{\overline{3}\}$. A koalíció-elrendezés első blokkja önmagában nem, de az $\mathcal{E}^0$-al együtt már kiegyensúlyozott. Az első két blokk együtt már segítség nélkül is kiegyensúlyozott, csakúgy mint az első három blokk, s persze az összes. A Kohlberg-kritérium alapján tehát az η valóban a nukleolusz.

6. fejezet

Kétszemélyes kooperatív játékok

E fejezetben kizárólag kétszemélyes kooperatív játékokkal foglalkozunk, így a koalíciók kialakulásának kérdése arra egyszerűsödik, hogy együttműködik-e a két szereplő, vagy sem. Ugyanakkor nem tesszük fel azt, hogy a szereplők egyéni preferenciái összehasonlíthatók, illetve, hogy a preferenciákat reprezentáló hasznosságok egy-az-egyben átválthatók. Az ilyen kooperatív helyzetek modelljeit hívjuk **NTU-játékok**nak (nontransferable utility game).

Egy kooperatív modell felállításakor meg kell határozzuk a koalíciók által elérhető kimenetelek halmazát. Most csak a „nagykoalíció”, illetve a két játékos számára egyedül is elérhető kifizetéseket kell megadnunk.

6.1. definíció (Nash-féle alkumodell)**.** Egy (kétszereplős) Nash-féle alkumodell alatt egy $(S, \mathbf{d})$ párt értünk, ahol $S \subset \mathbb{R}^2$ egy konvex és zárt halmaz, továbbá $\mathbf{d} = (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2$ egy olyan pont, hogy az

$$S_{\mathbf{d}} = \{(f_1, f_2) \in S \mid f_1 \geq d_1, f_2 \geq d_2\}$$

halmaz korlátos és van egy olyan $(f_1, f_2) \in S_{\mathbf{d}}$ pontja, amelyre $f_1 > d_1$ és $f_2 > d_2$. A Nash-féle alkumodellek összességét $\mathcal{A}$ jelöli.

A modell tehát – a TU-játékok hasonlóan – kellően absztrakt, nem tartalmaz semmit az alkudozás szóbajöhető kimeneteleihez vezető folyamatról, a szereplők stratégiáiról, a fenyegetésekről, a megegyezések garanciáiról. „Egyszerűen” a konvex és zárt S halmaz adja meg a közösen elérhető kifizetéspárok halmazát, míg a (d_1, d_2) *status quo (disagreement)* pont a két játékos kifizetését adja meg abban az esetben, ha nincs megegyezés.

Szemléltetésképpen nézzünk egy „kézzelfoghatóbb”, egy nemkooperatív játékkal leírható helyzetet és határozzunk meg egy kapcsolódó alkumodellt. (A határozatlan névelő azt jelzi, hogy különböző feltevések mellett a származtatott alkumodellek is különbözhetnek.)

6.2. példa. Vegyük az $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{i\in M;j\in N}$ illetve $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{i\in M;j\in N}$ kifizetésmátrixokkal megadott $(\mathbf{A},\mathbf{B})$ bimátrix játékot. Amennyiben a két játékos együttműködik, akkor megállapodhatnak egy (kevert) stratégiapár kiválasztásában, így koalíciójuk számára elérhető az

$$S = \Big\{ \sum_{i\in M;j\in N} \lambda_{ij}(a_{ij}, b_{ij}) \mid \sum_{i\in M;j\in N} \lambda_{ij} = 1 \; ; \; \lambda_{ij} \geq 0 \; (i \in M; j \in N) \Big\} \quad (6.1)$$

halmaz minden pontja. Megjegyezzük, hogy amennyiben a kifizetések pénznek tekinthetők (a hasznosságok egy-az-egyben átválthatók) akkor a pénzbeli kompenzációk segítségével olyan kifizetéspárok is elérhetők, amelyek nincsenek az (6.1) poliéderben.

A status quo pont megválasztására több javaslat is található a szakirodalomban. Mi csak azt ismertetjük, amelyik jellegében legközelebb áll a mátrixjátékokból TU-játékokat származtató maximin konstrukcióhoz. Shapley azt javasolja, hogy a status quo pont a játékosok maximin stratégiái által meghatározott „biztonsági szint” legyen, azaz

$$d_1 = \max_{\boldsymbol{x}} \min_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{xAy} \qquad , \qquad d_2 = \max_{\boldsymbol{y}} \min_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{xBy}$$

Megjegyezzük, hogy a status quo pont különböző megválasztása különböző megoldásokhoz vezet.

A Nash-féle absztrakt alkumodell – a TU-játékokhoz hasonlóan – tartalmaz önkényesen megválasztott paramétereket, nevezetesen az egyéni preferenciákat reprezentáló hasznossági függvények skála-paramétereit. A TU-játékoktól eltérően azonban most nemcsak a skála-kezdőpontok, de a skálaegységek is egymástól függetlenül változtathatók. Tetszőleges $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ és $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ számokra vezessük be az

$$L^{(\alpha_1,\beta_1)(\alpha_2,\beta_2)}(x_1, x_2) = (\alpha_1 x_1 + \beta_1, \alpha_2 x_2 + \beta_2)$$

transzformációt. Ennek segítségével könnyen leírhatjuk, hogy egy alkumodellből hogyan kaphatunk egy vele ekvivalens alkumodellt az egyéni hasznossági skálák alkalmas transzformációival.

Az alkumodell megadása után a feladat az, hogy találjunk egy olyan „értékelő függvényt”, amelyik minden modellre egyértelműen megadja az egyes szereplők „értékét” a saját hasznossági skálájukon mérve. Ez persze nagyon sokféleképpen megtehető. Lássuk mik azok a követelmények, amiket Nash (1950) támasztott egy alkuhelyzet megegyezéses megoldását megadó függvénnyel szemben (ezeket szokás a *Nash-axiómák*nak is nevezni).

6.3. definíció. Azt mondjuk, hogy a $\boldsymbol{\psi} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^2$ alkumegoldás rendelkezik a $\langle$*tulajdonsággal*$\rangle$, ha a $\langle$*feltétel*$\rangle$ fennáll **minden** $(S, \mathbf{d}) \in \mathcal{A}$ alkumodellre:

- *közösen elérhető,* ha $\boldsymbol{\psi}(S, \mathbf{d}) \in S$;
- *egyénileg elfogadható,* ha $\boldsymbol{\psi}(S, \mathbf{d}) \geq \mathbf{d}$;
- *Pareto-optimális,* ha $\mathbf{f} \in S$ és $\mathbf{f} \geq \boldsymbol{\psi}(S, \mathbf{d})$ esetén $\mathbf{f} = \boldsymbol{\psi}(S, \mathbf{d})$;
- *szimmetrikus,* ha $\psi_1(S, \mathbf{d}) = \psi_2(S, \mathbf{d})$, valahányszor az alkuhelyzet szimmetrikus, azaz $S = \{(f_2, f_1) \mid (f_1, f_2) \in S\}$ és $d_1 = d_2$;
- *kovariáns,* ha tetszőleges $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ és $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ skála-paraméterekre $\boldsymbol{\psi}(L^{(\alpha_1,\beta_1)(\alpha_2,\beta_2)}S, L^{(\alpha_1,\beta_1)(\alpha_2,\beta_2)}\mathbf{d}) = L^{(\alpha_1,\beta_1)(\alpha_2,\beta_2)}\boldsymbol{\psi}(S, \mathbf{d})$, azaz a transzformált $S' = \{(\alpha_1 f_1 + \beta_1, \alpha_2 f_2 + \beta_2) \mid (f_1, f_2) \in S\}$ és $\mathbf{d}' = (\alpha_1 d_1 + \beta_1, \alpha_2 d_2 + \beta_2)$ alkuhelyzetre $\boldsymbol{\psi}(S', \mathbf{d}') = (\alpha_1\psi_1 + \beta_1, \alpha_2\psi_2 + \beta_2)$, ahol $\boldsymbol{\psi}(S, \mathbf{d}) = (\psi_1, \psi_2)$;
- *független az irreleváns kimenetelektől,* ha $\boldsymbol{\psi}(T, \mathbf{d}) = \boldsymbol{\psi}(S, \mathbf{d})$, valahányszor $\boldsymbol{\psi}(S, \mathbf{d}) \in T \subset S$ és $(T, \mathbf{d}) \in \mathcal{A}$.

Az első két követelmény különösebb magyarázatot nem igényel. A Pareto-optimalitás (ebben a szigorúbb formájában) kizárja a gyengén dominált kifizetéspárokat is a szóbajöhető megegyezések közül. Ez feltételezi, hogy a szereplők elfogadják a másik jobb kifizetésre való törekvését még akkor is, ha nekik ebből előnyük nem származik, csak tartják az elért szintet. A szimmetria is ismerős követelmény: amennyiben a két szereplő ugyanazon a hasznossági skálán mér és a helyzetük teljesen felcserélhető, akkor a kifizetésük is legyen azonos. A kovariancia ugyancsak egy szokásos „jogosan elvárt" követelmény: a megoldás ne függjön a modell önkényesen megválasztható paramétereitől, ugyanúgy transzformálódjon mint a modell. Az irreleváns alternatíváktól való függetlenség úgy értelmezhető, hogy azok a kimenetelek ne befolyásolják a megállapodást, amelyek amúgy sem jönnének szóba. Megjegyezzük, hogy ezt az axiómát tartják a leginkább megkérdőjelezhetőnek.

Most megmutatjuk, hogy van olyan alkumegoldás, amelyik mind a hat Nash-axiómát kielégíti. Egy tetszőlegesen adott $(S, \mathbf{d}) \in \mathcal{A}$ alkumodellre tekintsük a

$$\max\left\{g(f_1, f_2) = (f_1 - d_1)(f_2 - d_2) \mid (f_1, f_2) \in S_{\mathbf{d}}\right\} \tag{6.2}$$

optimalizálási feladatot. Mivel a 6.1. definíció szerint az $S_{\mathbf{d}}$ halmaz kompakt, a folytonos célfüggvény (szokás *Nash-szorzatnak* is nevezni) felveszi maximumát. Sőt, mivel az $S_{\mathbf{d}}$ konvex és a célfüggvény szigorúan konkáv (lásd a 6.1. feladatot), a célfüggvény egyetlen $S_{\mathbf{d}}$-beli pontban veszi fel a maximumát. Emiatt korrekt a következő definíció.

6.4. definíció (Nash-féle alkumegoldás)**.** Az $(S, \mathbf{d}) \in \mathcal{A}$ alkumodell *Nash-féle megoldása* alatt a (6.2) feladat egyetlen optimális $\boldsymbol{\varphi}(S, \mathbf{d}) = (\varphi_1, \varphi_2) \in S_{\mathbf{d}}$ megoldását értjük.

Mielőtt ellenőrizzük, hogy a Nash-féle alkumegoldás valóban rendelkezik a 6.3. definícióban megadott hat tulajdonság mindegyikével, állapítsuk meg, hogy a Nash-szorzat a Nash-megoldásban pozitív, hiszen $\varphi_1 > d_1$ és $\varphi_2 > d_2$ kell legyen.

6.5. állítás. *A Nash-féle alkumegoldás közösen elérhető, egyénileg elfogadható, Pareto-optimális, szimmetrikus, kovariáns és független az irreleváns kimenetelektől.*

Bizonyítás. Az elérhetőség és az egyéni elfogadhatóság a definíció része.

A Pareto-optimalitás azért teljesül, mert $\boldsymbol{f} \geq \boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{f} \neq \boldsymbol{\varphi}$ esetén $(f_1 - d_1)(f_2 - d_2) > (\varphi_1 - d_1)(\varphi_2 - d_2) > 0$, így $\boldsymbol{f}$ nem lehet S-beli.

A szimmetrikusság belátásához tegyük fel, hogy az alkuhelyzet szimmetrikus. Ekkor a felcserélt (φ_2, φ_1) kifizetéspár egy olyan S-beli pont, amelyre $g(\varphi_2, \varphi_1) = g(\varphi_1, \varphi_2)$ (hiszen $d_1 = d_2$), a Nash-megoldás egyértelműsége miatt tehát $\varphi_1 = \varphi_2$.

A komponensenkénti pozitív lineáris transzformációkkal való kovariancia azonnal adódik az $\big((\alpha_1 f_1 + \beta_1) - (\alpha_1 d_1 + \beta_1)\big)\big((\alpha_2 f_2 + \beta_2) - (\alpha_2 d_2 + \beta_2)\big) = \alpha_1\alpha_2\big(f_1 - d_1\big)\big(f_2 - d_2\big)$ azonosságból, hiszen $\alpha_1 > 0$ és $\alpha_2 > 0$, így az eredeti modellben felírt (6.2) feladat egyértelmű optimális megoldásának a transzformáltja fogja maximalizálni a transzformált modellben felírt (6.2) feladat célfüggvényét.

Az irreleváns kimenetelektől való függetlenség abból következik, hogy a $\boldsymbol{\varphi}(S, \mathbf{d})$ nemcsak az $S_{\mathbf{d}}$ halmazon maximalizálja a Nash-szorzatot, hanem annak minden a $\boldsymbol{\varphi}$-t tartalmazó részhalmazán is. □

Végezetül megmutatjuk, hogy az előbbi állítás megfordítása is igaz, vagyis azt, hogy a Nash-féle alkumegoldás az egyetlen olyan értékelés, amelyik rendelkezik a 6.3. definícióban megadott hat tulajdonság mindegyikével.

6.6. tétel. *A Nash-féle alkumegoldás az egyetlen olyan $\mathcal{A} \to \mathbb{R}^2$ értékelő-függvény, amelyik közösen elérhető, egyénileg elfogadható, Pareto-optimális, szimmetrikus, kovariáns és független az irreleváns kimenetelektől.*

Bizonyítás. Legyen $(\varphi_1, \varphi_2) = \boldsymbol{\varphi}(S, \mathbf{d})$ a tetszőlegesen rögzített $(S, \mathbf{d}) \in \mathcal{A}$ alkumodell Nash-féle megoldása. Tekintsük a

$$h(f_1, f_2) = (\varphi_2 - d_2)f_1 + (\varphi_1 - d_1)f_2 = \mathrm{grad}\, g(\varphi_1, \varphi_2) \cdot (f_1, f_2)$$

lineáris függvényt, és a

$$H = \{(f_1, f_2) \in \mathbb{R}^2 \mid h(f_1, f_2) \leq h(\varphi_1, \varphi_2)\}$$

félsíkot. Mivel a H konvex és zárt, a $H_{\mathbf{d}}$ kompakt (hiszen a H határegyenese negatív meredekségű), valamint $(\varphi_1, \varphi_2) \in H$ és $(\varphi_1, \varphi_2) > (d_1, d_2)$, kapjuk, hogy a $(H, \mathbf{d})$ is egy Nash-féle alkumodell.

A hasznossági skálákon hajtsuk végre a következő pozitív lineáris transzformációkat:

$$f_1' = \frac{f_1 - d_1}{\varphi_1 - d_1} \qquad f_2' = \frac{f_2 - d_2}{\varphi_2 - d_2}.$$

Egyszerű számolással adódik, hogy a H félsík a $H' = \{(f_1', f_2') \mid f_1' + f_2' \leq 2\}$ félsíkba, a $\mathbf{d}$ status quo pont pedig a $\mathbf{d}' = (0, 0)$ pontba transzformálódik.

Legyen $\boldsymbol{\psi} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^2$ egy tetszőleges olyan alkumegoldás, amelyik megfelel mind a hat Nash-axiómának. A $(H', \mathbf{d}')$ egy szimmetrikus alkumodell, tehát a szimmetria és a Pareto-optimalitás miatt $\boldsymbol{\psi}(H', \mathbf{d}') = (1, 1)$ kell legyen, amit visszatranszformálva kapjuk, hogy $\boldsymbol{\psi}(H, \mathbf{d}) = (\varphi_1, \varphi_2)$ kell, hogy teljesüljön. Mivel $S \subseteq H$ (lásd 6.2. feladat) és $\boldsymbol{\psi}(H, \mathbf{d}) \in S$, az irreleváns alternatíváktól való függetlenség miatt $\boldsymbol{\psi}(S, \mathbf{d}) = (\varphi_1, \varphi_2) = \boldsymbol{\varphi}(S, \mathbf{d})$ kell, hogy fennálljon. Mivel az alkuhelyzetet tetszőlegesen választottuk, a tétel állítása következik. $\square$

6.1. Feladatok

6.1. feladat. Igazoljuk, hogy a (6.2) feladat $g(f_1, f_2)$ célfüggvénye szigorúan konkáv, azaz, ha az $(f_1, f_2) \neq (f_1', f_2')$ számpárokra $g(f_1, f_2) = g(f_1', f_2')$, akkor

$$g\Big(\frac{f_1 + f_1'}{2}, \frac{f_2 + f_2'}{2}\Big) > \frac{g(f_1, f_2) + g(f_1', f_2')}{2}\ !$$

6.2. feladat. Lássuk be, hogy a 6.6. tétel bizonyításában definiált halmazokra teljesül az $S \subseteq H$ tartalmazás!