



# JÁTÉK- ELMÉLET





J. D. WILLIAMS

*Játékelmélet*

MŰSZAKI KÖNYVKIADÓ, BUDAPEST, 1972



*A könyv eredeti címe:*

The Compleat Strategyst being a primer on the theory of games of strategy  
by J. D. Williams

McGraw-Hill Book Company, New-York, San Francisco, Toronto, London, Sydney

Copyright © by The RAND Corporation  
All Right Reserved

*Fordította:*

Sztrókay Kálmán  
matematika—fizika tanár

*Lektorálta:*

Katona Gyula  
okl. matematikus

ETO: 519. 283

Felelős kiadó: Solt Sándor igazgató  
Felelős szerkesztő: Oláh Gyuláné matematika—fizika tanár



## *A magyar kiadó előszava*

*A játékelméletről magyar nyelven eddig kevés könyv jelent meg. J. D. Williams könyvét érdekesnek és hasznosnak találtuk, emiatt vállalkoztunk magyar nyelvű kiadására. A könyv hangvétele, főleg példái szokatlanok, néhol groteszkek számunkra, ezért szükségesnek éreztük a szovjet kiadás áttanulmányozását. Mivel a szovjet kiadás szerkesztőjének bevezetője — amely a szerző tetszését is megnyerte — választ ad azokra a kérdésekre, amelyek felvetését mi is szükségesnek láttuk, elálltunk attól a szándékunktól, hogy magyar előszót írjunk és helyette közöljük I. A. Poletajev bevezetőjének egy részét.*

\*

Ez a könyv, amelynek fordítását átnyújtjuk, nagyon hasznos, mivel könnyen hozzáférhető az Olvasók széles körei számára. Szerzője szándékosan korlátozza eszközeit és az anyag taglalásakor csak az elemi aritmetikát használja. Abban az igyekezetében, hogy megkönnyítse az Olvasónak az elmélet alapfogalmainak elsajátítását, a szerző nem riad vissza az ismétlésektől és attól, hogy ugyanazt a dolgot többször is megmagyarázza. A könyv tréfás, szándékosan „komolytalan” hangnemben íródott. Az ilyen tárgyalásmód szokatlan az orosz olvasó számára és helyenként egyeseket bosszanthat is. De figyelembe kell venni, hogy a szerző tréfás hangvétele ellenére a könyv jól és teljesértékűen fejti ki az elmélet alapkoncepcióját. Ha a mű megírásában nem is, de anyagának előkészítésében részt vettek a játékelmélet és az operációkutatás egyéb részterületeinek legjobb szakértői. A könyvben sok, változatos példával találkozunk, az egész fejtegetés lényegében példákra épül. A példák szövegezése szándékosan groteszk, helyenként magvasabbakat várnánk. Azonban a példák megváltoztatása a fordítás során egyet jelentett volna a könyv újraírásával. A szerző szövegét a fordítás pontosan megőrizte. Csak egyetlen példában engedték meg magunknak a szereplők megváltoztatását, amelyet a szerző a „hidegháború” szellemében



állított össze. Elhatároztuk, hogy a szerző szatirájának élet ellenkezőjére fordítjuk remélve, hogy a szerzőt humorérzéke most sem hagyja cserben. A példák megfejtése közben az Olvasónak tudatában kell lennie annak, hogy minden példa egy meghatározott feladattípust képvisel, amely a gyakorlatban távolról sem ilyen tréfás formában is előfordulhat. Köztudott például, hogy a lineáris programozás klasszikus feladatát — a lineáris forma minimalizálását lineáris megszorítások mellett — gyakran illusztrálják a csibetáp tréfás példájával. Úgy látszik, az ezópusi nyelv néha arra kell, hogy homályban hagyják a játékelméletnek azokat a valóságos alkalmazásait, amelyek közlése nem megengedett. Williams könyve olvasmányos, lehetővé teszi a játékelmélet alapelveinek elsajátítását nagyobb nehézség nélkül. Módot ad az Olvasónak arra, hogy önállóan oldjon meg egyszerű feladatokat és ami ennél lényegesen fontosabb, hogy helyesen, hozzáértően fogalmazza meg a feladatot. A könyvnek ez kétségtelen érdeme. Ez azonban nem jelenti azt, hogy Williams könyve önmagában elegendő a játékelmélet komoly elsajátításához. A szerző maga is találóan nevezte könyvét ábécés könyvnek. Valóban az. A játékelmélet lényegesen terjedelmesebb, mint az, amit e könyvből megtudhatunk róla. Azok az Olvasók, akik az ábécéskönyv után szükségesnek tartják a játékelmélet további tanulmányozását, ajánlott irodalmat találnak a könyv végén.

Reméljük, hogy Williams eredeti könyvének megjelentetése orosz fordításban hasznos az operációkutatás matematikai eszközeinek népszerűsítése szempontjából hazánkban.

*I. A. Poletajev*



## *Előszó az első kiadásához*

E könyv létrejötté néhány, a játékelmélet kidolgozásával és alkalmazásával évek óta foglalkozó kutatónak köszönhető. Bár ők közvetlenül és elsősorban a hadsereggel — azon belül is a Légierővel — kapcsolatos problémákkal foglalkoznak, érdeklődésük gyakorlatilag minden ilyen jellegű problémára kiterjed.

Úgy gondoltuk, hasznos lenne, ha sokan megismerkednének a játékelmélettel, amelyet eddig jobbra csak az elméletet kidolgozó hivatásos tudósok ismertek. Vannak olyanok is, akik hallottak róla és rendszerint homályosan sejtik, hogy mivel és hogyan foglalkozik a játékelmélet. Ezek többnyire hiányos tájékozottságukra építve fogadják el vagy utasítják vissza ezeket a gondolatokat. Úgy gondoltuk, érdemes megpróbálkozni annak a szakadéknak az áthidalásával, amely a hivatásos tudósok matematikai tevékenysége és azoknak az értelmes laikusoknak a szükségképpen vak reakciója között van, akik nem rendelkeznek az elmélet megértéséhez szükséges matematikai alappal.

Bár az elmélet végső formája még nem alakult ki, a csoport tagjai elhatározták, hogy keresnek valakit, aki megírja a könyvet. Hosszú és széleskörű keresés után — gondolom — tévedésből vagy feledékenységéből, rám esett a választás. Azok a szempontok, amelyek következtében megnyertem (vagy elvesztettem) ezt a játszmát, a következők voltak: (1) Kéznél voltam és számíthattak rám. A kutatók mindig természetesnek veszik, hogy egy segédmunkatárs rendelkezésükre áll. (2) Bár munkám évek óta a játékelmélethez kapcsolódott és szerettem is munkámat, a játékelmélet mélyebben fekvő speciális kérdései tekintetében teljesen tudatlan maradtam. Remélni lehetett, hogy a könyv írása közben sem tanulok belőle annyit, amennyi akadályozná azt, hogy érthetővé tegyem a lényeges kérdéseket. (3) Munkakörömnél fogva és energiamegtakarításra irányuló természet adta hajlamom következtében is abban a helyzetben voltam, hogy kollégáimat állandóan



zaklathattam kérdéseimmel. A terhek ilyen módon való megosztása mindnyájunk számára elviselhető volt.

A könyv jellegére — tehát tartalmára, stílusára és így olvasóközönségére — vonatkozó elképzeléseim a munka során sokszor változtak. Végül is úgy vélem, bevezető jellegű, otthoni tanulásra szánt könyv lett belőle. Azt hiszem, az Olvasó egyszerűen leülhet a könyvvel a kezében és a szellemi erőfeszítéssel járó szokásos — kellemetlen, de nem elviselhetetlen — nehézségek közepette megtanulhatja belőle, hogyan oldhat meg egyszerűbb játékelméleti problémákat. Ez pedig véleményem szerint önmagában véve is igen jó dolog. A példákat a legkülönbözőbb jelenségek köréből oly módon válogattam össze, hogy az Olvasó képzelőerejét megmozgassák és arra indítsák, hogy saját életének különféle mozzanataiban is megpróbálja alkalmazni a játékelmélet egyes gondolatait. A példákról előljáróban csak annyit mondhatok, hogy tartalmuk gyakran sekélyes, hangjuk néha tiszteletlen. Nehéz egyszerű példákat csinálni, ha tartalmuk nem sekélyes; a tiszteletlen hang pedig kettős célt szolgál: egyrészt védelmet nyújt a példák anyagát jól ismerő szakértők lesújtó véleményével szemben, másrészt ébren tartja az Olvasókat.

A könyvben az elemi aritmetikán kívül — a negatív számokat is ide számítva — semmiféle matematikai ismeretet nem használunk fel. Ez azt jelenti, hogy a könyvet bárki megértheti, aki tudja, hogyan kell pozitív és negatív számokat — rendszerint egészeket — összeadni, kivonni, szorozni és osztani. A matematikusok számára ez erős megszorítást jelent, a könyv szempontjából azonban hasznos, hiszen nem mindenki képes bonyolult játékelméleti problémákat matematikai nyelven megfogalmazni és megoldani még azok körül sem, akik szeretnek matematikával foglalkozni. A matematikának ebben az ágában ugyanis sok előismeretre van szükség. Ezzel szemben sokan meg tudják tanulni, hogyan kell ilyen problémákkal bánni és még többen képesek megérteni, hogy mik a játékelmélet lehetőségei és korlátai.

Úgy gondolom, hogy a játékelmélet az élet számos területén hasznos lehet. Ehhez azonban sok mindennek kell még történnie, többek között annak, hogy sokan megismerkedjenek vele és különféle problémák felvetésével igyekezzenek bővíteni a játékelmélet eddigi problémakörét.

Hátra van még, hogy köszönetet mondjak azoknak, akik segítettek munkámban. Ez nem könnyű dolog, mert szemérmetlenül zaklattam ötletekért összes barátomat, különösen kollégáimat. Ötleteiket gyakran átalakítva használtam fel: különleges helyzeteket gondoltam ki és jótevőim nevéhez hasonló (néha azokkal azonos) neveket alkalmaztam, hogy könnyen azonosítani lehessen az ötletek szerzőit. Ilyen módon az írás művelete érdekesebbé vált, és barátaim kétszeresen is segítettek munkámban.

Bár annyi mindenkinek tartozom, hogy attól félek, kihagyok közülük néhányat, megpróbálom törleszteni adósságomat. Mindenekelőtt megkö-



szönöm azt a bőséges kéziratanyagot, amit M. E. Dreshertől, a RAND munkatársától és az azóta elhunyt J. C. C. McKinseytől, a RAND, majd később a Stanford Egyetem munkatársától kaptam. Ez a több tucatnyi közlemény — kollégáim és mások munkái — okulásomra szolgáltak. Hálás vagyok, hogy ötleteiket rendelkezésemre bocsátották R. E. Bellman, R. L. Belzer, N. C. Dalkey, J. M. Dankin, W. H. Fleming, D. R. Fulkerson, Melvin Hausner, Olaf Helmer, S. M. Johnson, Abraham Kaplan, A. M. Mood, E. W. Paxson, E. S. Quade, R. D. Specht és J. G. Wendel, a RAND munkatársai, valamint E. W. Barankin, a Kaliforniai Egyetem, D. H. Blackwell, a Howard Egyetem, S. C. Kleene, a Wisconsin Egyetem, Oscar Morgenstern és A. W. Tucker, a Princeton Egyetem, P. M. Morse, a Massachusettsi Ipari Intézet, R. M. Thrall, a Michigani Egyetem és C. B. Tompkins, a George Washington Egyetem munkatársa.

A már említetteken kívül a kézirat gondos áttanulmányozásával és megjegyzéseikkel segítséget nyújtottak: Bernard Brodie, G. W. Brown, R. W. Clewett, F. R. Collbohm, G. B. Dantzig, M. M. Flood, O. A. Gross, ifj. C. Hastings, B. W. Haydon, S. P. Jeffries, J. L. Kennedy, J. A. Kershaw, ifj. J. S. King és R. A. Wagner, a RAND munkatársai, E. F. Beckenbach, a Kaliforniai Egyetem munkatársa, G. R. Cook, az U. S. Hadsereg nyugalmazott vezérőrnagya, C. F. Mosteller, a Harvard Egyetem munkatársa és (valószínűleg) mások is. Miss Ruth Burns hihetetlenül gyors és pontos munkát végzett a kézirat többszöri átgépelésekor.

Külön kell megemlítenem Warren Weavert, a Rockefeller Alapítvány munkatársát, aki barátilag és a téma iránti érdeklődéstől vezetve igen alaposan áttanulmányozta a kéziratot. Hallatlan makacssággal kérte számon tőlem, hogy mondanivalómat lehetőleg világosan adjam elő. Ezzel értékes segítséget nyújtott, de néha fel is bosszantott, különösen, amikor kiderült, hogy az ő stílusa és fogalmazásbeli ügyessége alkalmasabb arra, hogy érthetőbbé tegye a gondolatokat, mint az enyém.

A RAND Corporation olyan munkabeosztást engedélyezett, amely lehetővé tette számomra a könyv megírását.

Szinte magától értetődik, hogy ha egy ilyen kis könyv szerzője ilyen sok embernek ilyen sokkal tartozik, akkor igazában csak a könyv hibáit vallhatja sajátjainak. A „zseniális stratégia” erre azonban csak azt mondhatja: csak az nem követ el hibát, aki semmit sem csinál.

*J. D. Williams*



## *Előszó az átdolgozott kiadáshoz*

Éveken át gyakran érdeklődött A W. Tucker professzor, hogy van-e valami további tervem könyvemmel kapcsolatban. Mivel a kérdést mindig úgy tette fel, mintha még előtte sosem kérdezte volna, egy ideig megtehettem, hogy tömören csak annyit válaszoltam: „Nincs”. Nemrég azonban úgy éreztem, hogy talán van ezzel kapcsolatban valami mondanivalója, ezért válaszomat így módosítottam: „Miért?” Ekkor derült ki, hogy könyvem egy fontos vonatkozásban elavult.

Arról van szó, hogy hiányzik belőle a — nevezzük így a továbbiakban — tengelymódszer, amely a mátrix játékok egy általános megoldási módszere, szemben a könyvben leírt alkalmi, részleges módszerekkel. Ennek kialakulásához természetes módon, szinte szükségszerűen vezetett a játékelmélet és a lineáris programozás gyors fejlődése és egymáshoz közeledése. Mindkét témakörrel az 1940-es évek közepén kezdtek részletesebben foglalkozni, többek között a Princeton Egyetem és a RAND Corporation kutatócsoportjai, amelyekben Tucker professzor és én magam dolgozunk. Mi fejlesztettük tovább régi kollégámnak, G. B. Dantzig professzornak, a kaliforniai Berkeley Egyetem jelenlegi professzorának egyszerű módszerét. Sok neves matematikus foglalkozott az elmélet fejlesztésével, de jelenlegi formája lényegében Tucker professzornak köszönhető, aki egy nagy horderejű kombinatorikus lineáris algebrát dolgozott ki a maga általánosságában. Ez egy-séges módszert ad számos jelenség, köztük a mátrix játékok és a lineáris programok vizsgálatára. A mátrix játékok körében járatlan olvasók kedvéért, akiknek egyszerű számolási eljárásokra van szükségük, megbontottam ezt a szép egységet és eleganciát annak feltevésével, hogy a mátrix elemei nem lehetnek negatívak. A könyv első részeiben és a VI. részben alkalmazott módszerek kapcsolatára Tucker professzor „Mátrix játékok megoldása lineáris programozással” című cikke világít rá (IBM Journal of Research and Development, 4. kötet, 5. szám, 1960, 507—517. oldal.)

Az említett általános módszer létezése a következő problémát jelentette



számomra: a könyv felépítését meghatározták a benne alkalmazott megoldási módszerek, ezért az lett volna a legjobb, ha az egész könyvet átírom. Erre azonban nem tudtam rászánni magam. Másrészt, mivel a könyv főleg kezdőknek készült, jobbnak is láttam, hogy az új anyagot egyszerűen a könyv végére, az új VI. részbe teszem. Remélem, hogy az Olvasók elnézik a könyv e szerkezeti gyengeségét. A bonyolultabb játékokhoz érkező — a 4×4-eseknél már biztosan — érdemes fellapozni a VI. részt és megismerkedni az ott kifejtett módszerrel.

Az első kiadás előszavában nem szóltam arról a tapintatos szerkesztői támogatásról, amit Dorothy Stewarttól kaptam. Mulasztásom magyarázata az, hogy az ő munkája akkor kezdődött, amikor az enyém már véget ért. Ezt a hiányt pótlom most azzal, hogy megköszönöm akkori és mostani fáradhatatlan munkáját. Patricia Renfer nagy türelemmel végezte a kézirat előkészítését, elviselve a már leadott anyag gyakori változtatását.

Némelyik Olvasót talán érdekli, hogy mi minden történt a könyvvel az 1954-ben megjelent első kiadás óta. A szerző öröme és gondolom, a kiadó nagy meglepetésére, a könyv iránt ha nem is rohamos, de kitartó érdeklődés mutatkozott, olyannyira, hogy az első kiadást hamarosan még kilenc követte. Bár a művet nem tankönyvnek írtam, néhol annak is használják — jelenleg kilenc egyetemen és főiskolán, több más helyen pedig kiegészítő olvasmányként szerepel. A könyv 1956-ban francia, 1957-ben svéd, 1960-ban orosz nyelven, később cseh, német, japán, lengyel és spanyol nyelven is megjelent.

Az első kiadás néhány hibáját akkor vettem észre, amikor a svéd kiadás fordítója, Bjorn V. Tell kérte, hogy magyarázzam el neki a 13. példát. Hamarosan kiderült, hogy egyszerűbb új példát csinálni, mint olyan világot, amelyben a régi példának van értelme. Köszönöm Mr. Tellnek, hogy rávilágított erre a hiányosságra. A francia kiadás fordítója, Mme. Mesnage megszabadította a 12. példát attól a naív elképzelésemtől, miszerint az orosz rulett társasjátéknak tekinthető. Az orosz kiadás fordítója, Golubjev-Novozilov ezt amerikai rulettnek nevezte el, és orosz katonák helyett az Egyesült Államok légierijének katonáiról írt. Kifejezte reményét, hogy nem veszem sértésnek, hogy a tréfa ezúttal ellenem sült el. Úgy látszik, a szocialista országokban is vannak velem rokon szellemek.

*J. D. Williams*



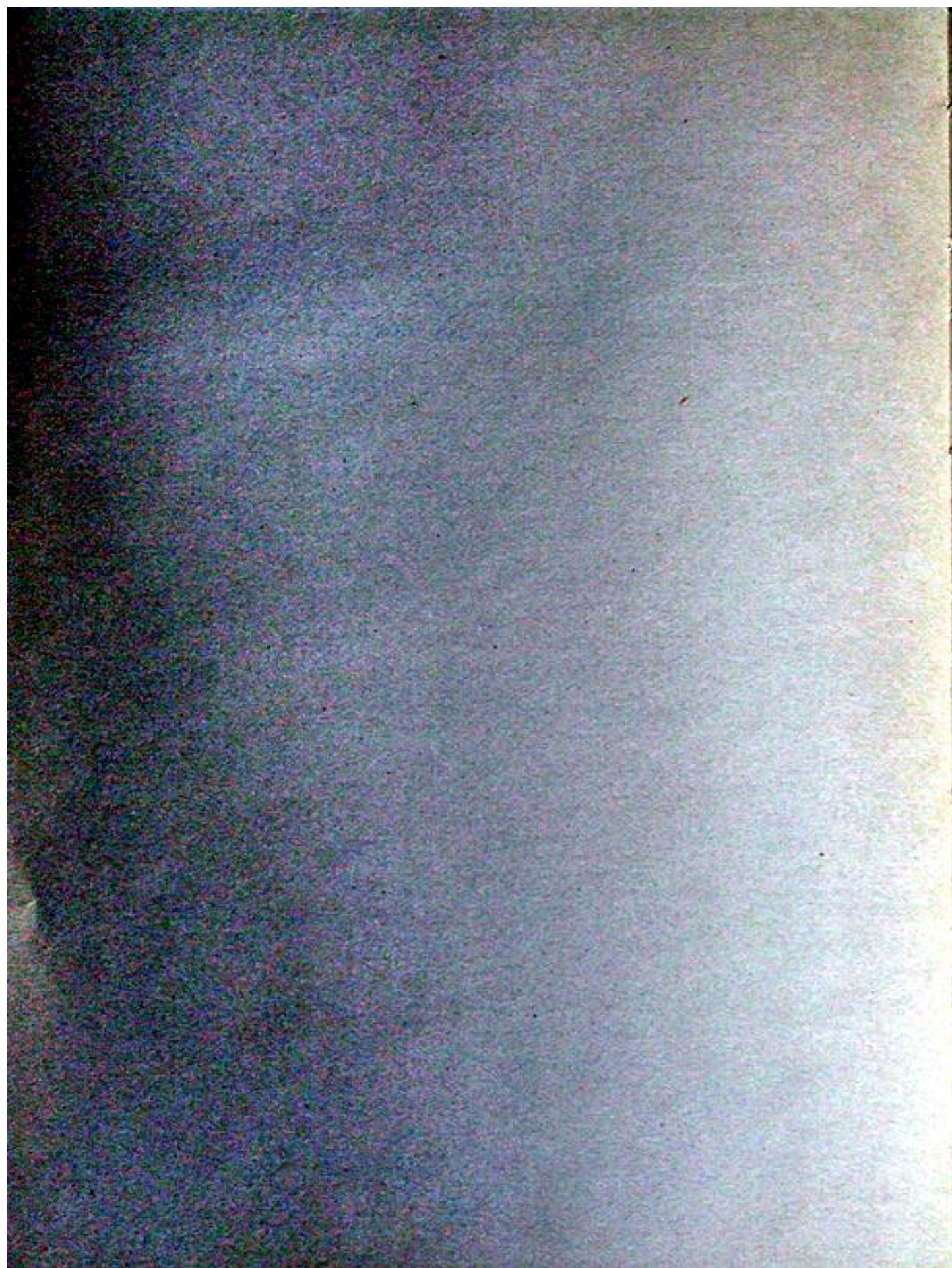
*Evelynnek,  
aki még el is olvasta*



*„.... mégis meggyőződése, hogy ha az Olvasó közelebbről vizsgálja ezeket a dolgokat, akkor az egyszerű játékok mögött hamarosan érdekes és mély gondolatok alapjait fogja felfedezni.”*

*HUYGENS, 1657*







# *Tartalomjegyzék*

|                                      |    |
|--------------------------------------|----|
| Előszó az első kiadáshoz             | 7  |
| Előszó az átdolgozott kiadáshoz      | 10 |
| <br>                                 |    |
| I. RÉSZ. BEVEZETÉS                   | 19 |
| <br>                                 |    |
| A tárgy természete                   | 19 |
| Egy történelmi példa                 | 23 |
| Összehasonlítás és tanulságok        | 24 |
| Elfogult megjegyzések a módszerről   | 26 |
| Játékosok és személyek               | 29 |
| A nyereség                           | 31 |
| Stratégiák                           | 33 |
| A játék mátrixa                      | 34 |
| Implicit feltevések                  | 37 |
| A kritérium                          | 38 |
| <br>                                 |    |
| II. RÉSZ. KÉTSTRATÉGIÁS JÁTÉKOK      | 45 |
| <br>                                 |    |
| 1. FEJEZET. $2 \times 2$ -es játékok | 45 |
| <br>                                 |    |
| Bevezető                             | 45 |
| Ingadozások                          | 46 |
| Nyeregpontok                         | 50 |
| <br>                                 |    |
|                                      | 15 |



|                                                       |     |
|-------------------------------------------------------|-----|
| Kevert stratégiák                                     | 52  |
| A gyakoriság                                          | 55  |
| Az arányok keresésének szabályai                      | 55  |
| A játék értéke                                        | 59  |
| A skála változásainak hatása                          | 61  |
| Jó játékos rossz ellen                                | 62  |
| Példák                                                | 63  |
| A $2 \times 2$ módszerek összefoglalása               | 77  |
| Feladatok                                             | 81  |
| <b>2. FEJEZET. <math>2 \times m</math>-es játékok</b> | 83  |
| Nyeregponatok                                         | 83  |
| Domináns stratégiák                                   | 84  |
| Kevert stratégiák                                     | 86  |
| Grafikus megoldás                                     | 89  |
| Példák                                                | 91  |
| Véletlen események felhasználása                      | 98  |
| A $2 \times m$ -es módszer összefoglalása             | 99  |
| Feladatok                                             | 101 |
| <b>III. RÉSZ. HÁROMSTRATÉGIÁS JÁTÉKOK</b>             | 106 |
| <b>1. FEJEZET. <math>3 \times 3</math>-as játékok</b> | 106 |
| Moralizáló megjegyzések                               | 106 |
| Nyeregponatok                                         | 107 |
| Domináns stratégiák                                   | 108 |
| A játék értéke                                        | 110 |
| Három stratégián alapuló megoldás                     | 111 |
| Játékok, amelyekkel jobb volna sosem találkozni       | 115 |
| Példák                                                | 118 |
| A $3 \times 3$ -as módszer összefoglalása             | 127 |
| Feladatok                                             | 128 |
| <b>2. FEJEZET. <math>3 \times m</math>-es játékok</b> | 132 |
| A megoldás módszere                                   | 132 |
| Példák                                                | 141 |
| A $3 \times m$ -es módszer összefoglalása             | 149 |
| Feladatok                                             | 149 |



|                                             |     |
|---------------------------------------------|-----|
| IV. RÉSZ. NÉGYSTRATÉGIÁS ÉS NAGYOBB JÁTÉKOK | 153 |
| Megoldás kinyilatkoztatással                | 153 |
| Nyeregpontok                                | 156 |
| Domináns stratégiák                         | 157 |
| Az összes stratégiát alkalmazzuk            | 157 |
| A $4 \times m$ -es módszer összefoglalása   | 193 |
| Feladatok                                   | 194 |
| V. RÉSZ. VEGYES MEGJEGYZÉSEK                | 201 |
| Közelítő megoldási módszerek                | 201 |
| A domináns stratégiákról                    | 208 |
| Egyszerű megoldások                         | 210 |
| Több megoldás esete                         | 213 |
| A mértékről                                 | 215 |
| Kvalitatív nyereségek                       | 220 |
| Példák                                      | 223 |
| Egy játszmaából álló játékok                | 229 |
| Szimmetrikus játékok                        | 230 |
| Lineáris programozás                        | 233 |
| Példa                                       | 233 |
| Nem nulla összegű játékok                   | 236 |
| Összefoglalás                               | 238 |
| VI. RÉSZ. ÁLTALÁNOS JÁTÉKMEGOLDÁSI MÓDSZER  | 241 |
| Első példa                                  | 242 |
| Alapmegoldások                              | 252 |
| Második példa                               | 255 |
| A tengely-módszer összefoglalása            | 267 |
| A munka ellenőrzése                         | 269 |
| Kontroll-összegek                           | 271 |
| FÜGGELÉK                                    | 276 |
| MEGOLDÁSOK                                  | 284 |



*Bevezetés*

## A TÁRGY TERMÉSZETE

Annyi bizonyos, hogy sokféleképpen lehet elkezdni egy könyvet, csak-hogy a lehetséges kezdési módok nagy része az első pillantásra nyilvánvalóan rossz. Csábító az a gondolat, hogy a lehetséges kiindulások között talán van néhány olyan, amely értékes tulajdonságokat rejt magában. Például megtudja belőle az olvasó, hogy miről akar írni a szerző, és ennek ellenére rászánja magát a könyv elolvasására. Ennek nyomán az Olvasók két táborra oszlanak. Az első csoportba tartozók nagy és boldog családja belefeledkezika





könyvbe és rettenthetetlenül végig is olvassa. E csoport tagjai mindenesetre kedvező véleményt táplálnak és terjesztenek a könyvről, és kétségkívül otthonuk minden zugában tartanak egy vagy több példányt belőle. A másik csoportot röviden úgy lehetne jellemezni, hogy különbözik az előzőtől. Ők a könyvet — rendszerint eredményesen — altatóként alkalmazzák, és amikor félálomban félreteszik, az az egy gondolat marad meg bennük vele kapcsolatban, hogy valakinek oda kellene ajándékozni.

Egy olyan bevezetés, amely a vázolt megnyitó stratégiának eleget tesz, nagyszerűen szemléltetné a könyv tárgyát és célját is, ti. azt, hogy mindvégig a legjobb stratégiák kiválasztására keresünk módszert. Megjegyezzük, hogy a „stratégia” szót nem mindig a megszokott értelmében használjuk.

Érdeklődési körünkbe az olyan jelenségek tartoznak, amelyekben az emberek céljai keresztezik egymást, vagy röviden, az olyan helyzetek, amelyekben konfliktus van az emberek között. A könyv elkezdésének kérdése felismerhetően ilyen helyzet, hiszen az Olvasó és az író céljai bizonyosan keresztezik egymást, mivel érdeklődési körük határozottan ellentétes. Ez természetesen nem zárja ki azt, hogy udvariasak legyünk egymással. A szerző bonyolult intellektuális tevékenységre szeretné rávenni az Olvasót, akinek amúgyis épp elég baja van, és csupán kikapcsolódást és érdeklődésének kielégítését várja a könyvtől. Az érdeklődési köröknek ez az ellentéte a könyv felépítésének egyik lényeges meghatározója.

Másik lényeges elem a következő: mindegyikünk igyekszik a helyzet ura lenni. Az Olvasó számára sok út kínálkozik. Az egyik például az, hogy a macskához vághatja a könyvet, megsértve ezzel a szerzőt is, a macskát is.



Ezzel azonban egyrészt saját tulajdonát rongálná, másrészt méltatlan cselekedetre ragadtatná magát, s ennek révén bizonyára megromlana viszonya a macskával. Az Olvasó megteheti azt is, hogy a nehéz részek felett átsiklik, de sok más lehetőséget is felsorolhatnánk. A szerző nehezebb helyzetben volt: egyetlen fegyvere a könyv tartalmának és a feldolgozás módjának megválasztása lehetett — erről azon-

ban jobb, ha hallgatunk. Vannak más lényeges elemek is, köztük olyanok, amelyeket egyikünk sem tud ellenőrizni. Ilyen például az, hogy a múltbeli és az írás, ill. az olvasás ideje alatti, a tárgyhöz nem tartozó események sokasága fontos szerepet játszik a könyv, ill. az Olvasó szempontjából. A könyv legjobb elkezdési módjának problémájától ezzel már egy kicsit el is kalandoztunk, de el is kerültük, hiszen a könyvet már elkezdtük.



A tárgyra vonatkozóan olyan kevés és enyhe megszorításokkal élünk, hogy a vizsgálendő konfliktusok legfőbb nevezetessége általánosságuk. Elvben annak sincs akadálya, hogy a Mars és a Föld közötti atomháborúval vagy romantikus szerelmi összetűzésekkel foglalkozzunk. A vizsgált kérdések sokféle lehetnek: gazdasági jellegűek, különféle társasjátékokkal, például a „zenélő székek”\* nevezetűvel kapcsolatosak. Foglalkozhatunk a hagyományos hadviselés számtalan kérdésével is. Nem ígérünk csodaszert, amely egycsapásra megszünteti az ilyen jellegű kérdésekkel kapcsolatos kellemetlenségeket, csak azt, hogy eredményeink hasznos módszerként alkalmazhatók.

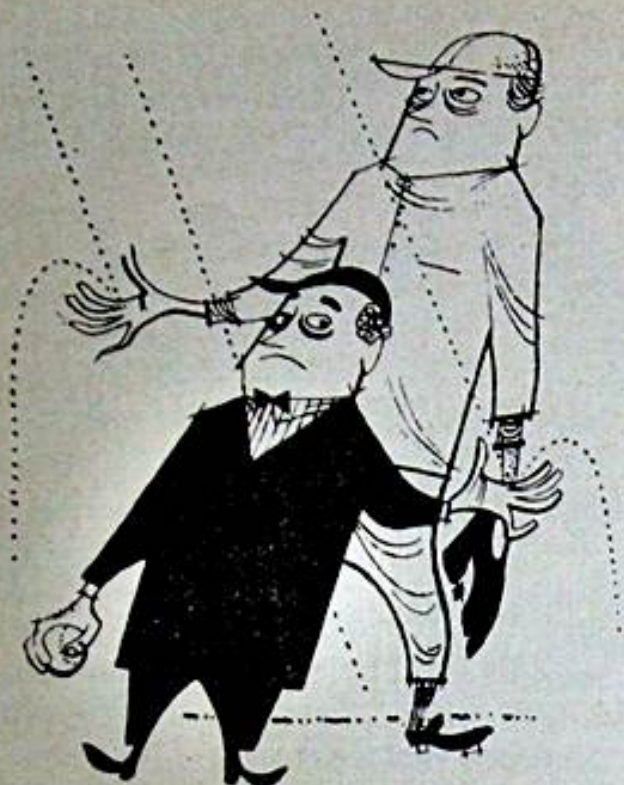
Az ismertetésre kerülő módszer neve *játékelmélet*. Akinek sok ideje van, az a *stratégiai játékok elmélete* elnevezést is használhatja. Aki először találkozik ezzel a valószínűtlenül hosszú elnevezéssel, feltehetően megkérdezi, hogy: Miért? Válaszunk a következő: az elnevezés onnan ered, hogy a stratégia elméletének alapja a játékok vizsgálata. A válasz valójában nem kielégítő, újra halljuk a kérdést: Miért? Azért, mert a játékokban megtalálhatók a különféle konfliktusok főbb elemei, leírásuk és tanulmányozásuk viszonylag egyszerű. (A „játék” szó használata az elmélet szempontjából nem lényeges. Szerepe csak annyi, hogy az összes vizsgált konfliktust ezzel a névvel illetjük.)

Ennek alátámasztására gondoljuk végig, hogy mi a közös mondjuk a póker játékban és egy háborús konfliktusban. A póker játékban a játékosok egy bizonyos jutalmazási rendszer szerint játszanak. A játékosok érdeke nyilván ellentétes: mindegyikük nyerni szeretne, de ha az egyik nyer, akkor mások szükségképpen veszítenek. Ez a konfliktus alapja. Az egyik játékos szemszögéből nézve vannak olyan elemei a játéknak, amelyek teljesen az ő ellenőrzése alatt állnak. Ilyen például az, hogy kiválaszthatja, kikkel óhajt játszani. Ez azonban a többi játékosra is igaz; vannak tehát a játéknak olyan elemei, amelyek ellenőrzése teljesen az ellenfél kezében van. Végül vannak olyan elemek, amelyek — ha a szabályokat betartják — egyik játékos ellenőrzése alatt sincsenek. Ilyen például a lapok sorrendje. Felfoghatjuk úgy, hogy ezek az elemek a Természet nevű hosszú életű, erős szemé-



\* A „zenélő székek” nevű játék a következő: néhányan zeneszóra székek körül sétálnak, és amikor a zene elhallgat, le kell ülniük a székekre. A játékban eggyel kevesebb szék van, mint ahány játékos. (A fordító.)





lyiség ellenőrzése alatt állnak. A Természet tudatosan nem rosszindulatú, de pajkos könynyedséggel fogja fel a saját komoly érdekeit.\* A leírt szempontok bizonyosan megtalálhatók minden konfliktusban.

Fontos jellemvonás a mindenkori információ — katonai nyelven hírszerzési anyag — szerepe. Az információ gyakran nem teljes és ezért kényelmetlen tényező. Nem tudhatjuk például, hogy ellenfelünk kezében milyen lapok vannak. Blöff is elképzelhető. Más hasonlatosságok is vannak; előfordulhat, hogy valaki gyilkosság áldozata lesz.

Az analógiát azonban nem vihetjük túl messzire. A póker játék sok mindenben nem tükrözi a hadviselést. A háborúban egy tank legyőzhet két tankot, a pókerben viszont a kártyalapok leterítésénél egy pár bubi mindig jobb, mint egy ász. Módosíthatjuk persze a póker játékot úgy, hogy jobban hasonlítson a tankok csatájához. Felállíthatunk olyan szabályt, hogy egy ász rosszabb ugyan akármelyik párnál, de ha a játék közben telefonál valakinek a felesége, akkor a két bubinál jobb. Ennek azonban nem volna



\* A szerző itt és a továbbiakban a mindennapi élet véletlen jelenségeit érti Természetten és nyilvánvalóan a kényelem kedvéért személyesíti meg.



különösebb értelme, ugyanis a játékok vizsgálata a stratégia tanulmányozásának éppen ezért jó kiindulópontja, mert a játékok a háborús konfliktusok és az egyéb jelenségek bonyolult helyzeteinek összességét nem tartalmazzák. Az elméletek, fejlődésük korai szakaszában nem képesek arra, hogy a jelenségek vizsgálatánál az összes közrejátszó tényezőt figyelembe vegyék.

Az eddigiek alapján talán világos, hogy a játékok tartalmazhatnak olyan alapelemeket, amelyek majdnem minden érdekes konfliktusban megtalálhatók. Következik-e ebből, hogy hasznos dolog tanulmányainkat játékok vizsgálatával kezdeni? Nem szükségképpen. Elképzelhető az is, hogy a háborús, gazdasági és társadalmi helyzetek felépítése annyira bonyolult, hogy nem közelíthetők meg a játékok fogalmából kiindulva. Ezt a lehetőséget azért kell vizsgálnunk, mert a játékelmélet jelenlegi formájában még a valódi játékok mindegyikének leírására sem képes, sőt, kénytelenek vagyunk nagyon egyszerű valódi játékok és a bonyolultabb játékok — például a póker — leegyszerűsített változatainak vizsgálatára szorítkozni.

Ilyen körülmények között neveltségesnek tűnhet, hogy valaki számottevő energiát fordít a játékelmélet tanulmányozására és fejlesztésére, sőt azt várja, hogy mások is érdeklődjenek a tárgy iránt. Ennek okát részint abban találhatjuk meg, hogy a játékelmélet eddigi sikerei reménnyel és a tárgy iránti hűséggel töltötték el az elmélettel foglalkozó tudósokat. A szándékosan túlságosan leegyszerűsített elméletek kitalálása a tudományok egyik fontos módszere, amelyet különösen az „egzakt” tudományok terén alkalmaznak sokszor. Ha a biofizikusok eredményesen használhatják a sejt, a csillagászok pedig a világegyetem leegyszerűsített modelljét, akkor mi is remélhetjük, hogy a leegyszerűsített játékokat nagyon jól alkalmazhatjuk bonyolultabb konfliktusok modelljeiként.

Nyilvánvaló, hogy az ilyen elméletek körében a halandóság nagyobb, mint amekkorát egy katonai szervezet eltűrhet saját megmozdulásai során. Az elmélet sikerei nyilván nem örökéletűek. A legtöbb, amit tőle várhatunk az, hogy napjainkban bizonyos meghatározott célokra sikeresen alkalmazhatjuk.

## EGY TÖRTÉNELMI PÉLDA

Vizsgáljuk meg egy példán, hogy mit várhatunk a sikeres tudományos absztrakcióktól. Olyan elméletet választunk, amely biztosan a valóság nagyon leegyszerűsített modelljét vizsgálja.

Tegyük fel, hogy a Naprendszer bolygóinak mozgását akarjuk tanulmányozni. Tekintsük az egyes bolygókat olyan pontoknak, amelyek tömege megegyezik a bolygókéval. Tegyük fel, hogy bármely két pont között olyan kölcsönös vonzóerő lép fel, amelyet úgy számíthatunk ki, hogy a két pont tömegének szorzatát elosztjuk távolságuk négyzetével és ezt megszorozzuk



egy állandó értékkel, továbbá minden egyéb körülménytől eltekintünk. Tételezzük fel még azt is, hogy az elmélet nem nyilvánvaló ostobaság, hiszen ha az volna, akkor el sem kezdenénk vizsgálni.



Valójában ez az elmélet, a *gravitáció elmélete*, két és fél évszázadon át megfelelő volt a bolygók mozgásának leírására. Az elmélet a Merkúr pályáját adta meg a legnagyobb hibával, a Merkúr ugyanis a várt helytől egy évszázad alatt a radián ötezred részével tért el. Az Einstein által javított elmélet már figyelembe veszi az ilyen hiányosságokat.

## ÖSSZEHASONLÍTÁS ÉS TANULSÁGOK

A gravitáció elmélete természetesen nem annak az almának köszönheti megszületését, ami állítólag Newton fejére esett. A bolygók mozgásáról, nagyrészt Tycho Brahe munkásságának eredményeképpen, már korábban is sokat tudtak. Kepler felismerte a bolygók mozgásának néhány alapvető törvényét. Newton ezek felhasználásával és a matematika egy új ágának — az analízisnek — kidolgozásával talált rá a fenti absztrakcióra. Balserencséjére éppen a Hold mozgásának vizsgálatával akarta kipróbálni az elméletet. A súlyosan hibás adatok miatt több évi munkája ment veszendőbe.

Példánkból számos tanulságot szűrhetünk le. Egyrészt elképzelhető, hogy viszonylag bonyolult jelenségeket nagyon egyszerű elmélettel lehet magyarázni. Aki felteszi, hogy a bolygók mozgása ilyen egyszerű, az sosem vállalhat felelősséget jóslataiért; elődeinknek volt okuk arra, hogy vándoroknak nevezzék őket. Másrészt tanulság az, hogy ha egy elmélet nagyon általános,



akkor rendszerint a jelenségek széles körében eredményesen alkalmazható: a gravitáció elmélete például nemcsak a bolygók mozgására, hanem bármely, tömeggel rendelkező részecskére érvényes. A harmadik tanulság az, hogy az elméletek gyakran nem tökéletesen, de néha — például a fenti esetben — szinte megtévesztő pontossággal írják le a valóságot. Újabb, nagyon fontos tanulság az, hogy az elmélet a testek mozgását meghatározó tényezők közül csak egyet ragad ki, ráadásul olyat, amelyik gyakran elhanyagolható. Például két, szorosan egymás mellett haladó repülőgép között a gravitációs erő körülbelül akkora, mint egy cigarettapapír súlya.

Tanulság az is, hogy lényeges adatok birtokában kell lennünk. Ilyen szempontból Newton jobb helyzetben volt, mint mi, akik a konfliktusok vizsgálatának területén szeretnénk eredményeket elérni. Adataink nagyrészt olyan tényezők határozzák meg, mint a személyiség — tehát az egyén fizikai, érzelmi beállítottsága, egészségi állapota, különféle képességei stb. — és a társadalmi környezet. Az ilyen jelenségek tanulmányozása pedig nehéz feladatot ró a matematikusokra.

Újabb tanulság, vagy legalábbis sokatmondó megjegyzés az, hogy Newton csaknem egyidejűleg dolgozta ki a gravitáció elméletét és a matematika új ágát, az analízist, és az, hogy az analízis nélkül a gravitáció elmélete gyakorlatilag használhatatlan lett volna. Ezen túlmenően az analízis kétszázötven éve lényeges szerepet játszik a fizikában. Korai lenne még arról beszélni, hogy a játékelmélet is a matematika egy új ágának létrejöttét eredményezheti. A játékelmélet eddig nagyon kevés újat hozott, szinte mindent a matematika már kidolgozott ágaiból kölcsönzött. Lehetséges, sőt talán szükség-szerű, hogy a módszer fejlődésével a későbbiekben új matematikai ág szülessen. Mindenesetre érdemes megjegyezni, hogy a játékelmélettel kapcsolatos első eredmények korunk egyik nagy matematikusának és sokoldalú gondolkodójának, Neumann Jánosnak köszönhetők.\*

A játékelmélet szellemében nagyon hasonlít a gravitáció elméletéhez, ugyanis mindkettő absztrakt modellből kiindulva közelíti meg a jelenségek széles körét. Az egyik elméletben az élőlények viselkedése meghatározott törvények szerint történik, hiszen a gravitáció elmélete lényegét tekintve pontosan megadja azt, hogy egy 12000 méter magasan, repülőgép, ejtőernyő és más eszköz nélkül tartózkodó pilóta hogyan fog mozogni. A játékelmélet pedig azzal foglalkozik, hogy bizonyos tervek esetében a lehetséges stratégiák közül kiválassza a legjobbat.

\* Neumann játékelmélettel kapcsolatos első dolgozata 1928-ban jelent meg. Az első részletesebb mű azonban csak 1944-ben született: John von Neumann és Oskar Morgenstern: *Theory of Games and Economic Behavior* (Princeton University Press, Princeton, N. J.). A mű hatásosságára jellemző, hogy néhányan, közöttük A. H. Copeland így értékelték: „Az utókor ezt a művet a huszadik század első felének legfontosabb tudományos eredményei közé fogja sorolni”. (*Bulletin of the American Mathematical Society*, 51. kötet, 1945. 498—504. old.)



Ezzel az összehasonlítással nem szeretnénk a gravitáció elméletének jelentőségét csökkenteni és a játékelméletét növelni. A gravitáció kidolgozott, érett elméletéről már sokszor bebizonyosodott, hogy jó közelítése a természetnek, a játékelmélet viszont életerős csecsemőhöz hasonlítható, amely még el is pusztulhat, nagy jelentőségű felnőtté is válhat, de ma még keveset tud. S mint minden csecsemő, ő is egy kicsit hangos.

Miután az Olvasónak máris módjában volt megismerkednie a matematika keserűségeivel, szeretnénk meggyőzni arról, hogy könyvünk bevezető jellegű mű, amelynek megértéséhez az aritmetikai alapismereteken kívül semmiféle matematikai tudás nem szükséges. A sértődések elkerülése végett kérjük az Olvasót, hogy ha csak valamivel is többet tud a matematikából, dobja félre ezt a könyvet.

## ELFOGULT MEGJEGYZÉSEK A MÓDSZERRŐL

Gyakran úgy érezzük, hogy az embert körülvevő jelenségek borzasztóan bonyolultak ahhoz, hogy sikeresen elemezhessük őket; a mi habozásunk is ezt látszik megerősíteni. Bár előrehaladásunkért tett eddigi csekély erőfeszítéseinket arra pazaroltuk, hogy kéztördelve tiltakozzunk: túl nehéz dologra vállalkoztunk. Az egyszerű elmélet megalkotásában — egyszerűnek az olyan elméletet nevezzük, amelyben kevés axiómával és kevés szabállyal kell dolgozni és az egész többé-kevésbé kvantitatív — segítséget nyújtottak az amatőrök, elsősorban a fizikatudósok. A hivatásos hallgatók gyakran úgy tekintik őket, mint koraérett gyermekeket, akik nem méltányolják az emberek és munkájuk valódi teljességét, akik ártatlanul csodálkozó szemekkel azt várják, hogy játékfegyverük éppen úgy hat az élő sárkányra, mint az élettelenre. Mivel a játékelmélet tudósai nyilván ilyenfajta gyerekek, az Olvasó kétségtelenül előre gondolhatta, hogy most biztató hangot ütünk meg, valószínűleg a hivatásosak kárára, másképp nem jutnánk el a tárgyhoz. Ha az Olvasó ezt tényleg előre látta, akkor máris sokatígérő tanítványnak mondhatjuk.

A játékelmélet tudósait szükségképpen az emberek közötti bonyolult konfliktusok valódi teljessége körüli tudatlanságuk hajtja előre, mivel ha nem olyan tudatlanok, akkor majdnem biztosan megpróbálják elméletileg vizsgálni a problémákat. Úgy véljük, hogy hűségük — talán inkább vakmerőségük — abból az ismeretükből ered, hogy ők és módszereik az élettelen világban rendkívül eredményesnek bizonyultak. Ezeknek a tanulmányozását sem úgy kezdték, hogy egyszerre vizsgálták a mikroszkopikus részleteket és a dolgok egészét; a részletek sokaságával és rendezésének bonyolultságával nem tudtak megbirkózni. Mivel azonban ezen a területen némi sikereket már elértek, gyanították, hogy ez a módszer a komplikált esetekben sem mond csütörtököt.



Az sem titok előttünk, hogy csak időnként érnek el sikereket, hogy tudásuk sokkal kevésbé teljes, mint az avatatlanok gondolják — avatatlanoknak itt azokat nevezzük, akik úgy gondolják, hogy az élővilág sokkal bonyolultabb, mint az élettelen, *mert* az előbbi olyan jól van megalkotva(!). Például, a mai fizikusoknak az atom szerkezetének némely részéről csak homályos elképzelésük van — mégis, az atombombát sikerrel le tudták írni. Az egyik fontos elemi részről, az elektronról bizonyos szempontból nagyon keveset tudnak, nem tudják például azt megállapítani, hogy egy adott időpillanatban hol van — sőt azt is eldöntötték, hogy szigorú értelemben sohasem lehet választ adni erre a kérdésre. A matematikusoknak is vannak ehhez hasonló gyenge pontjaik. Például, évszázadok óta nem tudják eldönteni, hogy legkevesebb hány szín elegendő egy térkép kiszínezéséhez (úgy, hogy a szomszédos országok nem lehetnek azonos színűek), azt gyanítják, hogy négy szín elegendő, de eddig ezt nem tudták bebizonyítani.



Az elmúlt száz évben a fizikatudósok fegyvertárában új fegyver jelent meg: a matematikai statisztika. Ezt régebben csak elvétve alkalmazták. Ma már egyre növekszik a jelentősége és az élővilág vizsgálatában is egyre fontosabb szerepet kap; a játékelméletnek is sok kapcsolata van vele. A statisztika alkalmazási lehetőségeit jól mutatja egy korai példa: a statisztika elmélete sikeresen írta le azt, hogy a Porosz Hadseregben a lórúgások következté-



ben történő elhalálozások (az évek során) hogyan oszlanak meg\*. Ha az Olvasó úgy véli, hogy a lovak cselekedetei sokkal inkább megjósolhatók, mint az embereké, hadd nyugtassuk meg: a módszer éppen ilyen sikeresen használható az emberi rúgások következtében elpusztult lovak számának becslésére. Annak, hogy a matematikai statisztika valóban alkalmazható az emberekkel kapcsolatban is, legjobb bizonyítéka a biztosítás. A biztosítási társaságok számadása ékesszóló bizonyítéka az elmélet sikerességének; az emberekkel kapcsolatban is lehet becsléseket mondani.

Milyen kilátásaink vannak a játékelmélettel kapcsolatban? Egyrészt az elmélet biztosan túl egyszerű ahhoz, hogy bármely katonai, közgazdasági és



\* Az alábbi adatokra hivatkozunk: Az amerikai hadsereg tíz hadtestében egy húszéves időszakban (1875—1894) hadtestenként és évenként a következő elhalálozási adatokat jegyezték fel:

| Halálozások<br>száma | Előfordulások száma      |                         |
|----------------------|--------------------------|-------------------------|
|                      | a megfigyelés<br>szerint | a számítások<br>szerint |
| 0                    | 109                      | 109                     |
| 1                    | 65                       | 66                      |
| 2                    | 22                       | 20                      |
| 3                    | 3                        | 4                       |
| 4                    | 1                        | 1                       |

A számítások szerinti érték meghatározása azon az információon alapult, hogy a halálos kimenetelű szerencsétlenségek átlaga kb. húsz hónaponként egy. A számítások alapja olyan statisztikai elmélet, amely ritkán előforduló eseményekre különösen jól alkalmazható.



társadalmi problémát minden szempontból leírjon. Másrészt azonban elég általános ahhoz, hogy sok érdekes konfliktus lényeges elemeit megvilágítsa.

Jelenleg több fontos feladatunk van. Az egyik az elmélet továbbfejlesztése, hogy bonyolultabb, változatosabb problémákat is meg tudjunk oldani segítségével; ez a tudósokra vár. A másik feladat: olyan helyzeteket keresni, amelyekben hasznosítható az elmélet; könyvünk egyik célja az, hogy az elmélet alapjainak megismertetésével növelje azok számát, akik új alkalmazásokra tehetnek javaslatokat. (Azok, akik elég távol állnak e témától, képesek egyszerű problémákat sajátmaguk számára megfogalmazni és megoldani.) Harmadik fontos feladatunk az absztrakció alapjául szolgáló emberek közti kölcsönhatásokkal kapcsolatos adatok gyűjtése.

## JÁTEKOSOK ÉS SZEMÉLYEK

Most lássuk magát a játékelméletet. A pókerjátékkal kezdve a következő néhány fejezetben bevezetjük a könyvünkben használt legfontosabb fogalmakat. A pókerjátékban mondjuk az Olvasó és mások egy csomag kártyával, némi pénzzel vagy más értékkel bizonyos szabályok szerint játszanak. A szabályok az összes cselekvési lehetőséget kimerítik: megadják, hogyan kell osztani, fogadni, mi történik a lapok leterítésekor, mi lesz az összegyűlt pénzzel.

A póker ötszemélyes játék. Ez azonban inkább nyilvánvaló, mint igaz: lehet, hogy két játékos koalíciót alkot a játékban, megegyeznek egymás közt, hogy nyereményeiket és veszteségeiket közös alapba gyűjtik. Ha így van, akkor hacsak a körülmények nem gátolják őket, közös érdekek alapján játszanak. Ha például a koalíció egyik tagja úgy látja, hogy a másik győzhet a lapjaival, akkor saját lapjaitól függetlenül tartani fogja a tétet. Ha már csak hárman játszanak, akkor lehet, hogy bedobja a lapot, hogy a harmadik csődbe jusson, lehet, hogy túllicitálja őt még akkor is, ha saját lapjaival biztosan nem nyerhet. Röviden: a koalíció tagjai egyetlen, kétféjű személyhez hasonlíthatók.

Ha két játékos koalíciót alkot, akkor nyilván nem ötszemélyesnek, hanem négyszemélyesnek érdemes tekinteni a játékot. Így arra a megállapításra jutunk, hogy nem az asztal körül ülő testeket, hanem az *ellentétes érdekelt-ségű csoportokat kell megszámlálnunk*. Elvünk szerint például a bridzs kétszemélyes játék, hiszen ha a partnerek nem cserélődnek, két különböző érdekelt-ségű csoport játssza. A „személy” és a „játékos” szavak az általunk használt értelemben épp úgy jelenthetnek jogi személyeket és szervezeteket, mint szokásosan értelmezett személyeket. Visszatérve a pókerre, azt olyan kétszemélyes játéknak is tekinthetjük, amelyben az Olvasó az egyik játékos, a többi négy személy a másik játékos. Ha ők nem tudják, hogyan gondolkodik az Olvasó, nekik nem lesz hasznuk, az Olvasónak nem származik kára a



játék ilyen felfogásából. Azt is mondhatjuk, hogy a többiek által alkotott koalíció hírközlési szervei gyengék, vagy hogy valamilyen más hiba miatt bizonyul hatástalannak.

A játékban részt vevő személyek száma — a különböző érdekeltségű csoportok száma — a játékelmélet egyik alapvető fogalma. Az elemzés módja és az egész helyzet minden jellemvonása ettől a számtól függ. Szempontunkból három számnak van különös jelentősége: az egynek, a kettőnek és a kettőnél többnek.

Egyszemélyes játék például a szórakozásból játszott pasziánsz. Még akkor is, ha a játékos a kártyalapokat 1 dollárért veszi valakitől és a nyerőhalmazba átvitt lapok darabjért 5 dollárt kap, ugyanaz a helyzet, csak a véletlen eseményeket kell megvizsgálni, a játékban nincs értelmes emberi ellenfél. A játékelmélet szempontjából az egyszemélyes játékok érdektelenek, és ezért valójában nem is foglalkozunk velük. Megoldásuk elvileg teljesen egyszerű: egyszerűen ki kell választani azt a cselekvéssorozatot, amelyik a legtöbb hasznot eredményezi. Ha véletlen események is szerepet játszanak a játékban, akkor a legnagyobb átlagos hasznot hozó cselekvéssorozatot kell választani. Ha az Olvasó azt mondja, hogy ezzel igen sok gyakorlati probléma felett átsiklottunk, akkor igaza van.

Az egyszemélyes játékok (a pasziánst kivéve) mégis kétszemélyeseknek tekinthetők: olyan speciális kétszemélyes játékoknak, amelyekben az egyik játékos a játszó személy, a másik a természet. Ez a nézőpont akkor is hasznos, ha az Olvasó nem hisz abban, hogy a természet rosszakarató lény és tönkre szeretne tenni minket. Például, lehet hogy a játékos nem tud eleget a természet „terveiről” és ezért nem tudja kiválasztani a legtöbb hasznot hozó cselekvéssorozatot. Vagy lehet, hogy a játékos ismeri a természet lehetséges „viselkedésmódjait” és tud valamit arról, hogy a természet milyen gyakorisággal alkalmazza azokat. Ebben az esetben a játékelmélet hasznos: bizonyos meghatározott legkedvezőbb játékmódot ajánl. A későbbiekben ezzel a kérdéssel részletesen foglalkozunk.

Az igazi kétszemélyes játék nagyon érdekes. A gyakorlatban ez fordul elő legtöbbször és ennek megoldásához jelenlegi fogalmi és technikai eszközeink elegendőek is. Hétköznapi értelemben ezeket tekintik konfliktusoknak. Van egy ellenfelünk, akiről fel kell tennünk, hogy intelligens és nyerni akar. Ha kedvezőnek látszó cselekvéssorozatot választunk, felfedezi terveinket, csapdába csal és így kamatoztatja felfedezését. Sok olyan játékot, amely valójában nem kétszemélyes játék, kétszemélyesnek fogunk tekinteni. Első ilyen példánk a pókerjáték volt, ahol az egyik személy az egyik játékos, a másik az összes többi játékos által alkotott csoport volt. A játékelmélet eddig kidolgozott részei legfőképp a kétszemélyes játékokkal kapcsolatosak.

Ha a különböző játékosok, azaz a különböző érdekeltségű csoportok száma kettőnél több, akkor minőségileg új dolgokat kell figyelembe vennünk. A legfontosabb újdonság az, hogy a játék folyamán változhat a különböző



érdekeltségű csoportok összetétele, a játékosok — ha ez számukra hasznosnak látszik — időleges koalíciókat alakíthatnak és szüntethetnek meg. Például a pókerben előfordulhat, hogy egy erősen vezető játékos ellen a többi játékos koalíciót alkot, nehogy a vezető játékos mindenkinek — még a viszonylag jól állóknak is — elvigye a pénzét. A többszemélyes játékok jóval bonyolultabbak, mint a kétszemélyesek, megértésük is nehezebb. Könyvünkben ezért a továbbiakban csak kétszemélyes játékokkal foglalkozunk.



## A NYERESÉG

A játékok osztályozásának és vizsgálatának egyik fontos szempontja tehát a játszó személyek száma; a „személy” szó itt különböző érdekelttségű csoportokat jelöl. A játékelmélet másik fontos fogalma a nyereség: mi történik a játék végén? Mondjuk a pókerjáték végén? A pókerben rendszerint kicserélődnek a vagyonok. Ha két játékos van, mondjuk az Olvasó (Kék) és mi (Piros), akkor ha az Olvasó 10 dollárt nyer, akkor mi 10 dollárt veszünk. Másképp

Kék nyeresége = Piros vesztesége,

vagyis

Kék nyeresége — Piros vesztesége = 0.

Ha megállapodunk abban, hogy a nyeresémet pozitív nyereségnek, a veszteséget negatív nyereségnek tekintjük, akkor ezt így is írhatjuk:

Kék nyeresége + Piros nyeresége = 10 dollár — 10 dollár = 0.

A nyereségek összege nem mindig nulla. Például, ha a nyertesnek a nyeresége 10 százalékaival hozzá kell járulnia az elfogyasztott italokhoz és az egyéb váratlan kiadásokhoz (pl. a sarki rendőr megvesztegetéséhez), akkor a nyereségek összege nem nulla:

Kék nyeresége + Piros nyeresége = 9 dollár — 10 dollár = — 1 dollár



A fenti két eset alapján a játékokat két alapvető típusba sorolhatjuk aszerint, hogy a nyereményeket pozitív nyereségekként, a veszteségeket negatív nyereségekként számlálva a nyereségek összege nulla-e, vagy nem. Ha a nyereségek összege nulla, akkor *nulla összegű játékokról* beszélünk. Ha nem nulla, akkor (a matematikusok nem valami találékonyak) *nem nulla összegű játékokról* beszélünk. A megkülönböztetés fontossága nyilvánvaló: a nulla összegű játékokban jó, tiszta, zárt rendszerrel kell foglalkoznunk. Úgy képzelhetjük, mintha a játékosok vagyonukkal együtt be lennének zárva egy szobába. Az ilyen játékok megoldását bizonyos erőfeszítések árán meghatározhatjuk. A nem nulla összegű játékokban viszont megtalálhatjuk a nulla összegű játékokkal kapcsolatos összes problémánkat, és



további nehézségekkel is meg kell küzdenünk. Ezt a helyzetet csak úgy tudjuk leírni, hogy bevezetünk egy harmadik fiktív játékost — nevezzük tudománynak, vagy sarki rendőrnek. Így

Kék nyeresége = 9 dollár

Piros nyeresége = - 10 dollár

A Rendőr nyeresége = 1 dollár,

és most már



$$\begin{aligned} \text{Kék nyeresége} + \text{Piros nyeresége} + \text{Rendőr nyeresége} = \\ = 9 - 10 + 1 = 0 \text{ dollár.} \end{aligned}$$

Így háromszemélyes, nulla összegű játékot kaptunk, amelyben a harmadik személy olyan, mint a malomkőből készült nyaklánc. De ne felejtjük el azt sem, hogy a háromszemélyes játékok elemzése a kétszemélyesekénél lényegesen nehezebb, hiszen a többféle lehetséges koalícióval is számolnunk kell. Így a nulla összegű játékok, különösen a kétszemélyes nulla összegű játékok elemzése lényegesen, könnyebb feladatot jelent, mint a nem nulla összegűeké.

A társasjátékok — póker, bridzs, sakk — rendszerint nulla összegű játékok. Sok más konfliktus is nulla összegű játéknak tekinthető. A játékelmélet eddig kidolgozott részei főként az ilyen játékokra vonatkoznak. A nem nulla összegű játékokkal kapcsolatban is születtek és születnek eredmények, ezekkel azonban könyvünk szűk keretei között nem foglalkozhatunk. A kétszemélyes játékok körében érdekes, de nehezen vizsgálható eset az, amikor a névértékben egyforma nyereségértékek hasznossága a játékosok számára nem egyforma. Ez a helyzet még a társasjátékokban is gyakran előfordul.

## STRATÉGIÁK

Miként a „személy” szót is, a „stratégia” szót is a hétköznapiól némi-kepp eltérő értelemben használjuk a játékelméletben. A mindennapi értelemben használt „stratégia” szóba beleértjük azt is, hogy a terv ügyes és jó, a játékelméletben viszont csak azt kívánjuk, hogy a terv *teljes* legyen. *Stratégiának az olyan teljes tervet nevezzük, amelyet az ellenfél semmiféleképpen sem tud keresztülhúzni.* Akármit is választ ugyanis az ellenfél, az a mi lehetséges cselekvéssorozataink halmazával együtt éppen a stratégia leírásának részét képezi.

Így a játékelmélet stratégia-fogalma két lényeges szempontból különbözik a szó hagyományos jelentésétől: a stratégiának teljesnek kell lennie, de teljesen rossz is lehet. Így például a pókerjátékban az összes lehetséges stratégia között az is benne van, amelyikben valakinek pikk Royal Flushot osztanak és bedobja a lapot. Ez nem túl okos stratégia — de stratégia. Éppen így, a bridzsben is stratégiának számít az, amelyikben valaki 7 szanzadut licitál, noha 13 pikk van a kezében. Az elemzés szempontjából teljes-séggel megközelíthető játékokban az összes lehetőséget előre láthatjuk — ha nem gyakorlatilag, akkor elvileg — és így az összes lehetséges stratégiát fel tudjuk sorolni.

Most már előhozakodhatunk a játékok osztályozásának és tanulmányozásának egy újabb fontos szempontjával: a játékosok számára lehetséges



stratégiák számával. Ha a játékosokat Kéknek és Pirosnak nevezzük és például Kéknek három, Pirosnak öt stratégiája van, akkor a játékot  $3 \times 5$ -ös (olvasd: háromszor ötös) játéknak nevezzük.

Amikor a játékosok számáról beszéltünk, akkor bizonyos számoknak — az egynek, a kettőnek és a kettőnél többnek — különös jelentőséget tulajdonítottunk. Hasonlóképpen, a stratégiák számának is vannak kritikus értékei; itt két főcsoportot kell megkülönböztetnünk. Az első csoportba azok a játékok tartoznak, amelyekben a több stratégiával rendelkező játékos stratégiáinak száma is még véges szám. Ez azt jelenti, hogy a stratégiákat bizonyos meghatározott idő alatt össze tudjuk számlálni. A második főcsoportba azok a játékok tartoznak, amelyekben legalább az egyik játékos stratégiáinak száma végtelen nagy, vagy ha a „végtelen” szó zavarja az Olvasót, úgy is mondhatjuk, hogy stratégiáinak száma bármely megnevezhető számnál nagyobb. (A matematikusok pontosan ezt értik „végtelen nagy” számon.)

Az utóbbi típusú, ún. végtelen játékoknak sok érdekes és hasznos alkalmazása van, elméletük azonban meglehetősen nehéz. A „nehéz” itt azt jelenti, hogy vannak olyan problémái, amiket a matematikusok eddig még nem tudtak megoldani és hogy nem tudjuk, könyvünk szerény keretei között hogyan foglalkozhatnánk velük, hiszen ezek tanulmányozásához az analízis és a matematika más ahhoz hasonló szintű fejezeteinek ismerete szükséges, amit pedig Olvasóinktól nem kívánhatunk meg. Ezért figyelmünket a továbbiakban a véges játékokra irányítjuk.

Könyvünk további részeiben a véges játékok három osztályba sorolása látszik célszerűnek: megkülönböztetünk olyan játékokat, amelyekben a *kevesebb* stratégiával rendelkező játékos stratégiáinak száma pontosan kettő, pontosan három és háromnál több. Továbbá, hogy munkánkat könnyebbé, az Olvasó életét kellemesebbé tegyük, tíz stratégiáznál nagyobb játékokkal csak futólag foglalkozunk.

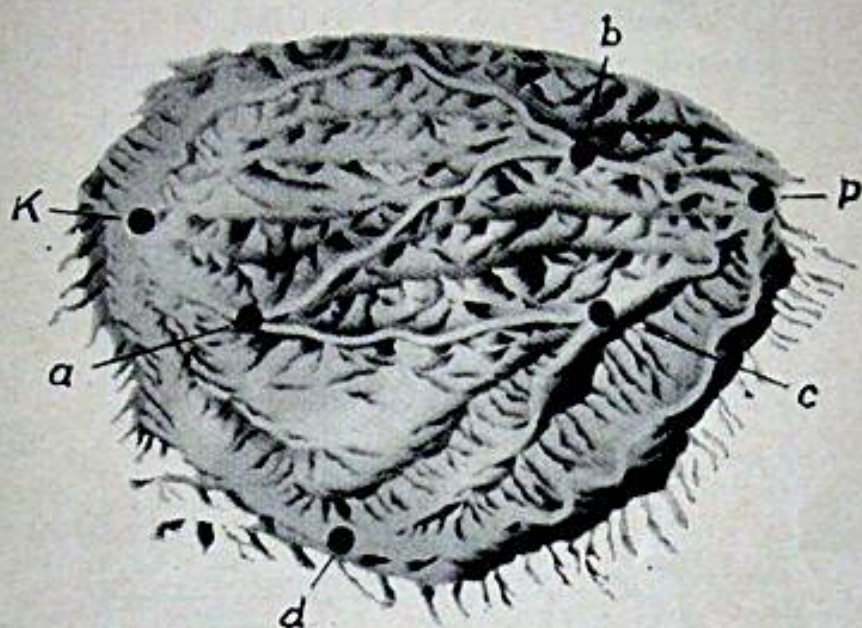
## A JÁTÉK MÁTRIXA

Most már abban a helyzetben vagyunk, hogy a konfliktusokat, vagyis játékokat a játékelméleti elemzés által megkövetelt módon teljes egészében le tudjuk írni. Eddigi összes megszorításunkra építve célunk csak a könyvben tárgyalandó játékok leírása, így megjegyzéseink elsősorban véges, nulla összegű, kétszemélyes játékokra vonatkoznak.

A játékosok neve legyen Kék, ill. Piros. Mindegyiküknek több lehetséges stratégiája van, amelyekről feltesszük, hogy ismerjük őket. A könnyebb azonosítás kedvéért számozzuk meg a stratégiákat. Vegyünk egy példát: Kék stratégiáinak neve legyen Kék 1, Kék 2 és így tovább, mondjuk az utolsó a Kék 9, Piros stratégiái pedig legyenek Piros 1, Piros 2 stb. egészen



Piros 5-ig. Ezt a játékot kilencszer ötös, vagyis  $9 \times 5$ -ös játéknak nevezzük. Ilyen játék például a következő: Tekintsük ezt a térképet:



Szabályaink legyenek a következők: Kéknek  $K$ -ból indulva  $P$ -be kell jutnia úgy, hogy csak az utakon haladhat,  $K$ -ba nem térhet vissza és egy ponton sem mehet át kétszer. Pirosnak  $P$ -ből  $K$ -ba kell jutnia, de ő csak keleti irányban mozoghat. Lehet, hogy Kék szeretné elkerülni Pirost, lehet, hogy más viselkedésmódok tilosak. Könnyen belátható, hogy Kék kilencféleképpen, Piros ötféleképpen teheti meg útját.\*

A szabályoknak azzal kapcsolatban is kell információt tartalmazniuk, hogy mi történik a játék végén: mi a nyereség, ha például Kék a Kék 7 (ez mondjuk az északi út) stratégiát, Piros a Piros 3 (ez mondjuk a déli út) stratégiát alkalmazza?  $9 \times 5 = 45$  ilyen stratégiapár van, ennyi nyereség-

\* Hogy elkerüljük még a lehetőségét is annak, hogy az Olvasót ez a játék elriassza, felsoroljuk a lehetséges utakat. Kék (a  $K$  pontból indulva, a  $P$  pontba érkezve) a következő útelágazásokat látogathatja meg:

$b, bac, bacd, ab, ac, acd, dcab, dc, d$ ;

a Piros pedig az alábbiakat:

$b, ba, ca, cd, d$ .



értéket kell ismernünk. Bármekkora is a nyereségek, ilyen alakban rendezhetjük el azokat:

|     |   | Piros |   |   |   |   |
|-----|---|-------|---|---|---|---|
|     |   | 1     | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Kék | 1 |       |   |   |   |   |
|     | 2 |       |   |   |   |   |
|     | 3 |       |   |   |   |   |
|     | 4 |       |   |   |   |   |
|     | 5 |       |   |   |   |   |
|     | 6 |       |   |   |   |   |
|     | 7 |       |   |   |   |   |
|     | 8 |       |   |   |   |   |
|     | 9 |       |   |   |   |   |

A táblázat mindegyik négyzetébe egy-egy nyereségérték kerül. Az ilyen elrendezést *mátrixnak*, a játék mátrixának nevezzük, és abban állapodunk meg, hogy ha a mátrixban pozitív szám áll, akkor Kék nyer, Piros veszít, ha negatív szám, akkor fordítva. Ha például a 3 és a -8 így helyezkednek el a mátrixban:

akkor ha Kék a Kék 6, Piros a Piros 4 stratégiát alkalmazza, Kék 3 egységet nyer, Piros ugyanennyit veszít, míg ha Kék a Kék 2, Piros a Piros 2 stratégiát alkalmazza, akkor Kék 8 egységet veszít, Piros ugyanennyit nyer.

A játékelméleti elemzés akkor kezdődhet, amikor a problémát ilyen alakra hoztuk és ezzel az összes stratégiával és az összes nyereségértékkel kapcsolatban minden szükséges információt megadtunk. A játékelméletben ez a konfliktusok modellje. Az ez után következő elemzés alkalmazhatósága teljes egészében attól függ, hogy a konfliktusoknak ez a modellje — a stratégiák halmaza és a nyereségmátrix — mennyire helytálló.



|       |  |       |    |   |   |   |
|-------|--|-------|----|---|---|---|
|       |  | Piros |    |   |   |   |
|       |  | 1     | 2  | 3 | 4 | 5 |
| 1     |  |       |    |   |   |   |
| 2     |  |       | -8 |   |   |   |
| 3     |  |       |    |   |   |   |
| 4     |  |       |    |   |   |   |
| Kék 5 |  |       |    |   |   |   |
| 6     |  |       |    | 3 |   |   |
| 7     |  |       |    |   |   |   |
| 8     |  |       |    |   |   |   |
| 9     |  |       |    |   |   |   |

## IMPLICIT FELTEVÉSEK

Előző kijelentésünkkel egy kicsit bővebben fogunk foglalkozni. Korlátozzuk figyelmünket egy pillanatra két bonyolult dologra: az egyik a Kék és Piros közti valóságos konfliktus. Ez különböző szabályokat, előírásokat, tilalmakat és más *valóságos* dolgokat: a játékosok valódi indítékait, a földrajzi környezetet és minden mást tartalmaz, aminek az adott játékkal kapcsolatban van valami jelentősége. A másik dolog is valóságos, de lényegesen egyszerűbb: az *írott* szabályok, a *papíron* felsorolt és jellemzett stratégiák és a játék *leírt* mátrixa. A kettő között — legalábbis reméljük — lényeges kapcsolat van. A második dolgot — a papírra vetett jelek összességét — az elsőből absztraháljuk. A játékelméleti elemzés segítségével felfedezhetjük a második dolog egynémely nem nyilvánvaló tulajdonságát, így értékes ismereteket szerezhetünk az elsőről — a valóságos konfliktusról. Minél tökéletesebb az absztrakció, annál többet tudunk meg így a valóságos világról.

Könyvünk fő témája annak elemzése, hogy a játékelmélet hogyan vizsgálja a második dolgot, az absztrakt modellt. Az elemzés során inkább



technikai, mint fogalmi nehézségekkel, kérdésekkel találkozunk. Ezek a kérdések a nehéz matematikai problémák ügyes kezelésével, a munka nehezének elkerülésével (röviden: magasfokú tornagyakorlatokkal) kapcsolatosak. A könyv olvasása egyébként a továbbiakban viszonylag kellemes időtöltés lesz, mivel sok valóságos — főképpen fogalmi — nehézség felett már átsiklottunk.

A játékelmélet egy kritikus fogalmi nehézsége a következő: hogyan kell a nyereségértékeket meghatározni, ha az elméletet a valóságos élet konfliktusaira alkalmazzuk? Bár vannak olyan esetek, amelyekben követelményeink kevésbé szigorúak, általában számszerűen kell megadnunk a nyereségeket, tudnunk kell, hogyan mérjük őket és elégséges pontossággal meg is kell határozunk mértéküket. Továbbá, az összes nyereségértéket azonos egységben kell megadnunk és az egységnek lehetőleg egyszerűnek kell lennie. Ezen azt értjük, hogy nem tudunk mit kezdeni az olyan mátrixszal, amelyben az egyik nyereségérték egysége a dollár, a másiké egy gramm uránium, a harmadiké valami más — hacsak nem állnak rendelkezésünkre olyan váltószámok, amelyek felhasználásával a mátrixot úgy alakíthatjuk át, hogy minden nyereségértéket ugyanolyan egységben mérjünk. Általában akkor is bajba kerülünk, ha a mátrix egy helyére több, különböző dolgot jelölő számot — mondjuk pénzt, urániumot, esetleg más valamit megadó számokat — kell írunk. Egyszerű példa erre a mesterjatekosok közti kétszemélyes játék. A nyereségeket itt pénzben és presztizsben mérhetjük. Ha nem találunk a pénz és a presztizs között alkalmas váltószámot, akkor az elemzés valószínűleg csődöt mond.

A valóságos élet problémáival kapcsolatban újabb fogalmi nehézséget jelent a problémák megfogalmazása olyan alapossággal, hogy a játékosok számára lehetséges összes cselekvési módot valóban teljes egészében megtalálhassuk a leírásban, de az eredeti környezet fontos hatásaitól ne szíge-  
teljük el azokat.

A későbbi fejezetekben gyakran az is veszélyt jelent, hogy véletlen akadályok miatt gyakran meg kell változtatnunk az elemzés irányát. A kérdés másik oldalához is kell megjegyzéseket fűznünk, mivel a modell szükségképpen nem lehet pontos mása a valóságos életnek. Látni fogjuk, hogy néha tekintélyes terjedelemben foglalkozunk ezzel a kérdéssel.

## A KRITÉRIUM

A matematikai modellalkotás örök problémája (a fából készült modellekkel szemben) a kritériumbetegség. Milyen kritérium szerint kell vagy kellene megítélnünk a játék különböző kimeneteleit?

Problémánkat egy bevásárlási feladattal próbáljuk az Olvasó számára világosabbá tenni. Tegyük fel, hogy valaki 5 dollárért húst szeretne vásárolni. Milyen húst vegyen? Ha kritériuma egyszerűen csak a mennyiség,



akkor a legolcsóbb húsfajtából fog vásárolni és nyereségét fontokban mérjük. Ha a változatosság a kritérium, akkor a legolcsóbbal kezdve többféle húsból vesz minimális, de még használható mennyiséget. A nyereséget most a vásárolt húsfélék száma adja meg. Különböző mellékfeltételei is lehetnek, vagy olyan kényszerítő körülményeket is tekintetbe kell vennie, mint az ízlés, az allergia és a tabuk (tiltott dolgok). Lehet, hogy minimális energiát akar a vásárlásba befektetni és csak annyit mond az eladónak, hogy „Amikor felénk jár, hozzon öt dollárért felvágottat, mindegy, hogy milyen”.



Általánosságban, kritérium-betegségnek azt a problémát nevezzük, hogy eldöntsük hogyan kell mérni és a mérték alapján milyen viselkedésmódot kell választani. A játékelmélet az első kérdéssel kapcsolatban semmit sem tud mondani, viszont a második kérdésre jól meghatározott, explicit választ ad.

A játékelmélet szerint arra a kérdésre, hogy hogyan kell az értelmes embereknek viselkedniük, ha egy adott nyereségmátrixot elfogadtak, meghatározott válasz van. Az, hogy az embereknek bizonyos meghatározott módon kell viselkedniük, nem vonatkozik azokra a kötelezettségekre, amelyeket a törvény és az etika ír elő. Inkább valamiféle matematikai morálra vagy legalábbis a takarékoság elvére vonatkozik, amelyek azt írják elő, hogy a játékosok fő célja az legyen, hogy *ellentétes érdekek által vezérelt ellenfelüktől biztos úton a lehető legtöbbet nyerjék el*. Modellünk szerint mi ezt fogjuk ésszerű viselkedésnek tekinteni. A matematikai modelleket — a csizmákhoz hasonlóan — használat előtt ki kell próbálni, hogy elég jól állnak-e. A háborús gyakorlatból azonban közismert, hogy csámpás csizmában is lehet jól célozni.

Nézzük meg, milyen következtetésekre juthatunk a nulla összegű játékok fenti modelljének alapján. Emlékezzünk vissza arra, hogy a nulla összegű játékok olyan zárt rendszerek, amelyekben a vagyonok cserélődnek, de a játékosok vagyonának összege állandó. Az elemzést egyszerűbbé teszi és semmit sem változtat meg, ha egy pillanatra feltesszük, hogy a játék mátrixának minden nyereségértéke *pozitív*. Ebben az esetben a legjobb





stratégia Piros számára csak a lehető legkevesebb veszteséget biztosító stratégia kiválasztását jelenti. A játék nyilván igazságtalan Pirossal szemben, de hagyjuk, hadd adakozzék a köz javára.

A játékelmélet szerint tehát Kéknek olyan módon kell viselkednie, hogy Piros különböző viselkedésmódjai által meghatározott legkisebb nyerevényei közül a legnagyobbat érje el. Piros pedig figyelembe véve Kék különböző viselkedésmódjait választja ki a legnagyobb, vagyis számára legkedvezőtlenebb nyereségeket eredményező viselkedésmódok közül a számára legkedvezőbbet, a legkisebb nyereséget. Ez a gondolkodásmód — feltéve, hogy a játékosok következetesek — elégséges alapot nyújt a stratégiák közti választásra. Ha Kék eltér az így meghatározott stratégiától, akkor lehet, hogy kevesebbet fog nyerni, mint amennyit nyerhetne. Ha Piros tér el ettől, akkor lehet, hogy többet kell fizetnie, mintha helyesen játszana.

A fenti okoskodás a játékelmélet alapvető következtetése. Minden két-személyes játéknak van olyan játszási módja, amely a fenti kritériumot kielégíti. Mégis, mint a húsvásárlási példában is, nem ez az egyetlen kritérium: ha például tudjuk ellenfelünkről, hogy tudatlan vagy hogy ostoba, akkor másképp kell stratégiát választanunk. A játékelmélet azonban a játékosok képességeinek vizsgálatával nem foglalkozik, úgy vizsgálja a problémákat, hogy a játékosokat egyformán intelligenseknek tekinti.

Kék és Piros céljai megfogalmazásunk szerint látszólag különbözőek, hiszen Kék esetében nyerevényről, Piros esetében veszteségről beszéltünk. A különbség csak látszólagos, valójában a két játékos azonos módon gondolkodik. Csupán arról van szó, hogy megállapodásunk szerint a játék mátrixában a pozitív számok azt jelentik, hogy Kék nyer, a negatívok azt,

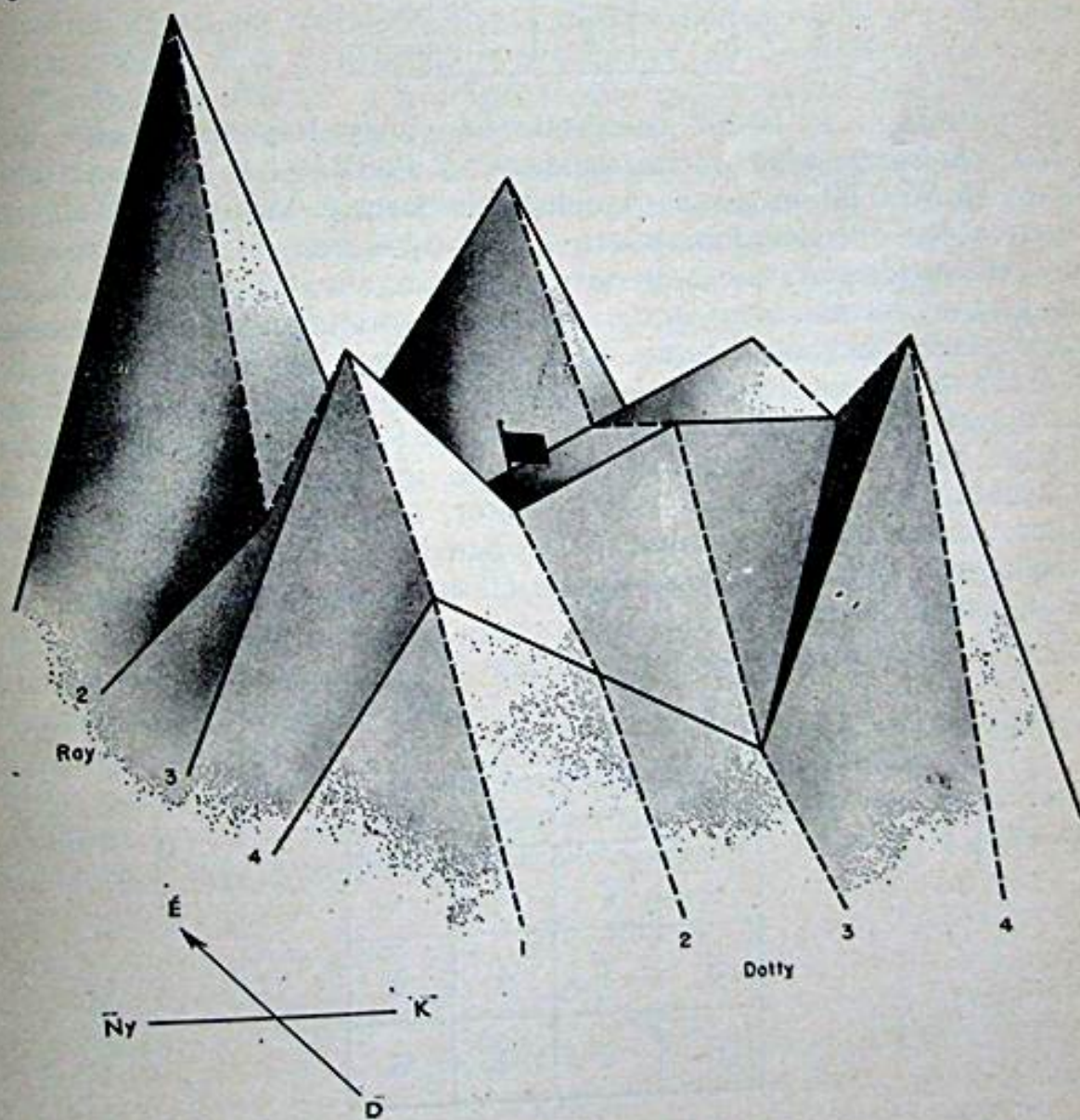


hogy Piros nyer. Tehát Kék a maga számára maximális, Piros pedig Kék számára minimális nyereséget szeretne elérni. E számolástechnikai megállapodás mögött azonban Kék és Piros alapvetően szimmetrikus viselkedés-módja áll.

### 1. Példa. A campingezők

A fenti gondolatok rögzítését egy példával szeretnénk elősegíteni. Ha minden nyereségértéket pozitívnak veszünk, akkor azokat egy hegyvidék magasságpontjainak tekinthetjük. Kék és Piros különböző stratégiáinak a magasságpontok földrajzi szélessége, ill. hosszúsága felel meg.

Tegyük fel, hogy valaki a feleségével — nevezzük őket Raynek és Dotty-nak — campingezni szeretne, de Ray magasan, Dotty alacsonyan fekvő helyen szeretne tábort ütni. A kiszemelt terepen minden irányban utak





haladnak át. A házastársak abban állapodtak meg, hogy valamelyik útkereszteződésnél fognak sátrazni. Továbbá a veszekedések megelőzése céljából abban is megállapodnak, hogy a következőképpen választják ki táborhelyüket: Ray kiválaszt egy kelet-nyugat irányú utat, Dotty egy észak-dél irányút, és sátrukat ezek kereszteződésénél ütik fel.

A Ray számára elérhető útkereszteződések magassága (ezer lábakban) a következő:

|     |   |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|---|
| Ray | 1 | 7 | 2 | 5 | 1 |
|     | 2 | 2 | 2 | 3 | 4 |
|     | 3 | 5 | 3 | 4 | 4 |
|     | 4 | 3 | 2 | 1 | 6 |

Első pillantásra az látszik természetesnek, hogy Raynak az első utat, a 7, 2, 5 és 1 magasságú útkereszteződésekből álló Ray 1-et kell választania, hiszen így 7000 láb magasra is kerülhet a táborhely. Mégis, ez a választás könnyen bajba sodorhatja, hiszen ha Dotty ügyes, megakadályozhatja Rayt elképzeléseinek valóráváltásában. Raynek annak figyelembevételével kell utat választania, hogy Dotty is ésszerűen gondolkodik, ő is a számára legelőnyösebb megoldást keresi. Igaz, hogy Ray a Ray 1 út választásával 7000 láb magasra is kerülhet, de az is lehet, hogy mindössze 1000 láb magasra kerül táborhelyük. A gondos elemzés Rayt arra az elhatározásra juttatja, hogy a Ray 3 utat kell választania, így ugyanis 3000 lábnál alacsonyabbra biztosan nem kerülhet a sátor, ha Dotty nem figyel eléggé, akkor viszont ennél magasabbra is juthatnak.

Felesége a következőképpen sorolja fel az általa választható utak magasságpontjait:

|       |   |   |   |   |  |
|-------|---|---|---|---|--|
| Dotty |   |   |   |   |  |
|       | 1 | 2 | 3 | 4 |  |
|       | 7 | 2 | 5 | 1 |  |
|       | 2 | 2 | 3 | 4 |  |
|       | 5 | 3 | 4 | 4 |  |
|       | 3 | 2 | 1 | 6 |  |



Dotty a Dotty 3 vagy a Dotty 4 út választásával elérheti, hogy a táborhely a lehető legalacsonyabban legyen. Ésszerűen gondolkozva azonban rájön, hogy így nagyon kedvezőtlen helyzetbe is kerülhet. Célszerűbb, ha a Dotty 2 utat választja: így ugyanis biztos, hogy a táborhely nem kerül 3000 méter-nél magasabbra. Ha Dotty bármilyen más utat választ, akkor ennél kedvezőtlenebb helyzetbe kerülhet.

Vizsgáljuk meg közelebbről eredményünket. Raynek olyan stratégiája van (a Ray 3), amely biztosítja, hogy a táborhely legalább 3000 láb magasan lesz, Dottynek viszont olyan stratégiája van (a Dotty 2), amely azt biztosítja, hogy a táborhely magassága legfeljebb 3000 láb lesz. Másképp szólva: mindegyik játékos elérheti, hogy ha a másik is ügyes, akkor 3000 láb magasra, ha a másik nem ügyes, akkor a maga számára kedvezőbb helyre kerüljön sátruk.

Ha Kék és Piros garantált minimális, ill. maximális nyeresége pontosan egyforma, akkor azt mondjuk, hogy a játéknak *nyeregpontja* van. Ha valamelyik játékos eltér a nyeregpont-stratégiától, akkor feleslegesen veszít. Ha mindketten eltérnek a nyeregpont-stratégiától, akkor lehet, hogy az egyik, lehet, hogy a másik veszít feleslegesen.

Ha van nyeregpont, akkor a játékosoknak nem kell titkolniuk, hogy milyen stratégiát választottak: ellenfelük sehogy sem juthat a nyeregpont értékénél, példánkban a 3000 láb magasságnál kedvezőbb nyereséghez.

Nem minden játéknak van azonban nyeregpontja, a nyeregpont létezése nem szükségszerű. Peldánkban a nyeregpont hegyszorosnak vagy nyeregnek felel meg, a hegyek elhelyezkedése azonban a fent látottaknál bonyolultabb is lehet. A játékelméletben az olyan hegyszorosok a nyeregpontok, amelyek bizonyos speciális tulajdonságokkal is rendelkeznek. Például, annak az útnak, amelynek legmagasabb pontja hegyszorosban van, észak-déli irányban kell haladnia, ugyanis a lehető legkisebb nyereség elérésére törekvő játékos választásának ez felel meg. A kelet-nyugati útnak viszont itt kell a legalacsonyabban mennie annak megfelelően, hogy a másik játékos a lehető legnagyobb nyereség elérésére törekszik. Ezek a tulajdonságok azonban még nem elegendőek, a teljes terep összes hegyszorosa közül kell a legmegfelelőbbet kiválasztani.

Bár nem sok játéknak — a  $4 \times 4$ -esek közül például csak minden tizediknek — van nyeregpontja, az elemzést mindig ezzel érdemes kezdeni.

Peldánkban a nyeregpontot egyszerűen úgy tüntethetjük el, hogy a Ray 4 és a Dotty 2 utak metszéspontjában álló 2 helyett 6-ot írunk. A játék ez-



által igen bonyolulttá változik. Az így kapott

|     |   | Dotty |   |   |   |
|-----|---|-------|---|---|---|
|     |   | 1     | 2 | 3 | 4 |
| Ray | 1 | 7     | 2 | 5 | 1 |
|     | 2 | 2     | 2 | 3 | 4 |
|     | 3 | 5     | 3 | 4 | 4 |
|     | 4 | 3     | 6 | 1 | 6 |

játék elemzése az előbbihez hasonló elemi következtetésekkel nem valósítható meg. Az előbbi okoskodást követve Raynek most is a Ray 3 utat kell választania, mert így legalább 3000 láb magasra kerül a sátor, Dotty azonban akkor éri el a legjobb eredményt, ha a Dotty 3 utat választja és ezzel biztosítja, hogy a sátor ne kerüljön 5000 lábnál magasabbra. Így csak annyit mondhatunk, hogy a táborhely magassága 3000 és 5000 láb között lesz.



A 3000 és az 5000 láb közti résről semmit sem tudunk mondani. Egyelőre csak intuíciónk alapján dönthetjük el, hogyan kell játszani. A probléma megoldható, de előbb egyszerűbb játékok megoldásával kell foglalkoznunk. A jó játékhoz itt már nehezebb módszerek alkalmazására és bizonyos titoktartásra van szükség. A játékosoknak vagy egyszerre kell stratégiát választaniuk, vagy zárt borítékban kell letenniük egymás elé a kiválasztott stratégia számát. Problémánk tehát az, hogy mit írjanak a borítékokban lévő cédulákra.



## Kétstratégias játékok

### ELSŐ FEJEZET: $2 \times 2$ -es játékok

#### BEVEZETŐ

A játékelmélet technikai megalapozásához a lehető legnagyobb óvatossággal kezdünk hozzá. Célunknak leginkább a  $2 \times 2$ -es játékok felelnek meg.

Emlékezzünk vissza arra, hogy minden játékot fel lehet írni téglalap (esetleg négyzet) alakú számtáblázat, mátrix formájában. A sorok, ill. az oszlopok a játékosok különféle lehetséges stratégiáit adják meg. Megfordítva is igaz: minden mátrix felfogható úgy, mint egy játék mátrixa. Adott mátrixhoz mindig ki lehet találni olyan játékot, amelynek az a mátrixa. Ezért a továbbiakban eltekinthetünk attól, hogy éppen milyen játékkal kapcsolatos az adott mátrix, időnként teljes egészében annak szentelhetjük, hogy bizonyos mátrixok tulajdonságait és az azokkal kapcsolatos következtetéseket vizsgáljuk. Így a konkrét tartalomtól elvonatkoztatva áttekintő képünk lesz a játékelmélet technikai kérdéseiről.

Mindig a játékok *megoldásait* fogjuk keresni. Ez azt jelenti, hogy megpróbáljuk meghatározni, az egyes játékosoknak milyen stratégiákat kell alkalmazniuk. Ha egynél több stratégiára van szükség, akkor azt kell eldöntenünk, hogy melyiket milyen gyakran alkalmazzuk. A gyakorlatban ugyanis egyszerre csak egy stratégiát alkalmazhatunk. Azok a játékok, amelyeket vizsgálunk, mind megoldhatók, vagyis mindegyikben van a játékosoknak jó stratégiájuk. A jó stratégiákat — hacsak nem jár különösebb számolási nehézségekkel — mindig meg is fogjuk keresni.

Először egyszerű, majd később bonyolultabb nyereségmátrixokkal foglalkozunk. Ebben a fejezetben  $2 \times 2$ -es játékokat vizsgálunk, majd más játékokkal is foglalkozunk. Lesz szó a  $2 \times 3$ -as,  $2 \times 4$ -es játékokról és gyakorlatilag minden olyan játékról, amelyben az egyik játékosnak csak két stratégiája van.

Állapodjunk meg abban, hogy Kék stratégiáit a nyereségmátrix bal oldaláról, a másik játékosét pedig felülről kezdjük írni. A nyereségeket Kékhez fogjuk viszonyítani, vagyis ha a mátrix egy eleme pozitív, akkor



Kék nyer, Piros veszít, ha negatív, akkor Piros nyer, Kék veszít. Ha az Olvasó Kék szerepébe képzei magát, akkor pozitív nyereség esetén nyer, negatív nyereség esetén veszít.

## INGADOZÁSOK

Kezdjük a következő, rendkívül egyszerű esettel:

|     |   | Piros |   |
|-----|---|-------|---|
|     |   | 1     | 2 |
| Kék | 1 | 0     | 0 |
|     | 2 | 0     | 0 |

Emlékezzünk vissza a táblázat jelentésére: a mátrix bal oldalán álló számok Kék stratégiáinak sorszámai. Ebben a játékban Kéknek két tevékenységi módja van. A mátrix felett álló számok pedig Piros stratégiáit jelölik. A mátrix elemei azt adják meg, hogy adott stratégiák alkalmazása esetén mennyi a nyereség.

Ez valószínűleg a világ legunalmasabb játéka, de legalább igazságos. A játékosok nem érdekeltek abban, hogy ellenőrizték az eredményt, hiszen függetlenül attól, hogy mit csinálnak, nyereségük mindig nulla.

Nem árulunk zsákbamacskát: amikor az első részben leírtuk, hogyan kell nyereségmátrixokat felírni, hallgatólagosan olyan egyszerűsítő feltevessel éltünk, amellyel kapcsolatban nem titkolódzhatunk tovább.

A mátrixban mind Kék, mind Piros összes stratégiája szerepel, vagyis megtalálhatók benne mindazok a cselekvéssorozatok, amelyek között Kék, ill. Piros tetszés szerint választhat. A felsorolás teljes, tehát a mátrixban szereplő stratégiák között a játékosok számára lehetséges összes cselekvéssorozat megtalálható. Következik ebből az, hogy a mátrix „kereteibe” csak egy szám kerülhet? Vagy, ha úgy tetszik, mi a helyzet a természetben előforduló véletlen eseményekkel? Abból, hogy Kék is, Piros is egy bizonyos stratégiát dolgoz ki, nem mindig következik, hogy a nyereség egyértelmű. Például, elképzelhető olyan játék, amelyben a stratégiák csak azt határozzák meg, hogy melyik játékos nyer, a nyeremény nagyságát pedig a véletlen határozza meg mondjuk azzal, hogy egy rulett kerekét megpördíti.

Mit jelent tehát az, hogy a mátrix eleme 0, ill. 6 vagy  $-2$  vagy bármi más? Lehet, hogy ez rögzített értéket jelent, vagyis az adott stratégiapárt



alkalmazva csak ez az *egyetlen* elemi esemény következhet be. A játék azonban lehet olyan, hogy a nyereség — rögzített stratégiapárok mellett is — több érték közül kerülhet ki. Ebben az esetben a nyereség a véletlentől függő, lehetséges értékek átlaga. Ezt a lényeges kérdést egy példával szeretnénk világosabbá tenni.

Tegyük fel, hogy egy stratégiapár három lehetséges elemi eseményhez vezethet: az elsőben Kék 8-at nyer, a másodikban Kék 24-et nyer, a harmadikban Kék 8-at veszít. A mátrix megfelelő helyére nem írhatjuk be egyszerűen a három szám átlagát, mert Fortuna szeszélyes: nem biztos, hogy az egyes elemi események valószínűsége egyforma. Lehet, hogy egy pénzdarab feldobásával kell eldönteni, melyik elemi esemény következzen be: a +8 (Kék nyer) a fejnek, a -8 (Kék veszít) az írásnak, a +24 (Kék nyer) pedig annak felelhet meg, hogy a pénzdarab az élén áll meg. Ha a pénz darab vastagsága a szokásos, akkor az utolsó eset nem fordulhat elő. Feltehetjük, hogy a másik két eset egyformán valószínű és így a fenti átlagot úgy számíthatjuk ki, hogy a +8 és -8 összegét elosztjuk 2-vel:  $\frac{8-8}{2} = 0$ . A mátrix megfelelő helyére ezt az értéket írjuk be. Ha viszont a pénzdarab körülbelül harmadolyan vastag, mint amilyen széles, akkor a három eset közelítőleg egyformán valószínű, tehát az átlag érték a következő:  $\frac{8+24-8}{3} = 8$ . Általánosságban, a *valószínűségi arányok szerint súlyozott átlagértéket* kell kiszámítanunk. Például, ha a 8, 24, -8 értékek előfordulásának aránya 1:3:4, akkor az átlagértéket a következőképpen határozhatjuk meg:

$$\frac{1 \cdot 8 + 3 \cdot 24 + 4 \cdot (-8)}{1 + 3 + 4} = \frac{8 + 72 - 32}{8} = 6.$$

Az így kiszámított átlagértéket a matematikusok *várható értéknek* nevezik. Az elnevezéshez némi magyarázatot kell fűznünk. Nem azt várjuk, hogy a nyereség a várható érték legyen — példánkban nyereségként a 6 elő sem fordulhat — hanem azt, hogy nagy számú játszma esetén az átlagértékek 6-hoz közeledjenek. A várható értéket a következőképpen lehet értelmezni: ha Kék és Piros az előbbi stratégiapárt alkalmazza, akkor az az igazságos, ha Kék játszmányként 6-ot fizet pirosnak. Ha bármilyen más összeget fizetnek egymásnak, akkor a játék igazságtalanná válik, vagyis az egyik játékos csődbejutásához vezet.





E rövid kitérő után térjünk vissza a

|     |   | Piros |   |
|-----|---|-------|---|
|     |   | 1     | 2 |
| Kék | 1 | 0     | 0 |
|     | 2 | 0     | 0 |

játékhoz. Most már tudjuk, hogy ebben a játékban lehetnek olyan véletlen események, amelyekben a nyerések és veszteségek átlaga nulla. Ennek felhasználásával rámutatunk az elmélet egyik gyengeségére: tegyük fel, hogy a mátrix „északkeleti” és „délnyugati” elemei nem tartalmaznak véletlen eseményeket, tehát a nyereség mindig annyi, amennyi az ott álló elem, vagyis 0. Tegyük fel, hogy az „északnyugati” nulla két egyforma valószínűségű elemi esemény, a  $+1$  és a  $-1$  átlagértéke és hogy a „délekeleti” nulla a  $+1000$  és a  $-1000$  nyereségek átlaga. Mivel a játékosok vagyona szükségképpen véges, valószínű, hogy a 2 stratégiával szemben előnyben részesítik az 1. stratégiát, hiszen az előbbivel könnyen csődbe juthatnak. Így látható, hogy a várható érték (vagyis a nagyszámú játszma alatt elért átlagérték) fogalma azt a hallgatólagos feltevést tartalmazza, hogy a játékosok a sors szeszélyétől függetlenül tetszés szerinti ideig képesek és hajlandók játszani.

Hová jutunk, ha ez a feltevés így befolyásolja a tényeket? Valószínűleg nem sietnek segítségünkre a játékelmélet tudósai. Ők azt mondják, azért kerültünk bajba, mert a változó nyereség értékével kapcsolatban gondatlanok voltunk, ez pedig nem rájuk tartozik. Mivel a csőd rögtön bekövetkezett, nem sikerült eljutnunk a játék igazi értékéhez, a fenti nyereséghez. A számítások során a nyereség egysége lehet dollár, vagy bármi más; a bonyolultabb, számoktól független problémákban is találhatunk olyan egységet, amelynek segítségével számokban fejezhetjük ki a játék stratégiáinak értékét. Problémánkat úgy oldhatjuk meg, hogy olyan értékskálát dolgozunk ki, amely jobban tükrözi a lehetséges elemi események hasznosságát.

Ha ezt sikerül elérnünk, akkor nem valószínű, hogy Kék és Piros nyeresége továbbra is egyenlő nagyságú és ellentétes előjelű marad — vagyis eltűnik a játék nulla összeg jellege. A következőképpen okoskodhatunk: ha két egyenlő átlagértékű nyereség közül a játékosok az egyiket kedvezőbbnek tartják, mint a másikat, akkor az értékskálát módosítanunk kell; és ha módosítottuk, akkor nem valószínű, hogy a játék továbbra is egyszerűen a vagyonok cseréjét jelenti. Másképpen szólva, a játék valószínűleg nem



nulla összegű és ahogy már a korábbiakban említettük, az ilyen játékoknál nem tudjuk, hogy mekkora összegű.

Lehet, hogy ezekben a kritikus pillanatokban az Olvasó úgy véli, hogy a játékelmélet nagyon gyenge és problematikus elmélet. A nyereség „várható” értékének fogalma nem mindig nyújt elégséges alapot a döntésre és cselekvésre, és jelenleg nincs jobb módszerünk annak vizsgálatára, hogy a stratégiák közül melyeket érdemes alkalmazni. Mindezek a problémák akkor jelentkeztek, amikor még be sem léptünk a játékelmélet kapuján, még el sem kezdtük a legegyszerűbb, a kétszer kettes, nulla összegű játékok tanulmányozását.

Ha sikerült elbátortalanítanunk az Olvasót, akkor újra javasoljuk, hogy tegye le a könyvet, miként a televíziót is kikapcsolja, ha a műsor nem kedvére való. Azok számára viszont, akiket ezek a kezdeti nehézségek nem riasztottak el, érdekes és hasznos dolgokat mondhat az elmélet.

Tegyük fel tehát a továbbiakban, hogy a játékosoknak elegendő vagyonuk van ahhoz, hogy az ingadozások közepette ne kerüljenek csődbe, tehát hogy a várható érték fogalma valóban betöltheti szerepét.

Vizsgáljuk most meg a következő játékot:

|     |   | Piros |   |
|-----|---|-------|---|
|     |   | 1     | 2 |
| Kék | 1 | 5     | 5 |
|     | 2 | 5     | 5 |

Ha például a Kék 1 stratégiát alkalmazzuk a Piros 2 stratégia ellen, akkor Piros 5 egységet fizet Kéknek. Ugyanez a helyzet a többi stratégiapárnál is, a játék tehát csak kevésbé különbözik az előzőtől. A legfontosabb különbség az, hogy a játék Piros számára igazságtalan; csak úgy tehető igazságossá, hogy megállapodás szerint Kék minden játszmaért 5 egységet fizet Pirosnak. Ebben a játékban, akárcsak az előzőben, mindegy, hogy a játékosok melyik stratégiát választják, a nyereség minden esetben ugyanannyi. A játéknak sajátossága az is, hogy információ nem szükséges hozzá, vagyis a helyes stratégia kiválasztásához az ellenfél terveit nem kell ismerni. Ez utóbbi kijelentés sok más olyan játékra is igaz, amelyben a játékosoknak van jó stratégiájuk.

Megjegyezzük, hogy a fenti típusú mátrixok a szerencsejátékok mátrixaihoz hasonlóak. A tiszta szerencsejátékokban a mátrix elemei nemcsak hogy egyformáknak látszanak, hanem valójában is egyformák. Ez azt jelenti, hogy a nyereségek olyan várható értékek, amelyek azonos számú



és valószínűségű eseményen alapulnak; szemben az ügyességi és stratégiai játékokkal, amelyekben a játékosok valamilyen mértékben ellenőrizni tudják a játék elemi eseményeit.

A felesleges terhek elkerülésére egy ideig olyan játékokkal foglalkozunk, amelyek mátrixában nincsenek negatív számok. Ezek a játékok Piros számára mindig igazságtalanok, hiszen ő mindig csak fizet és fizet. Felfoghatjuk ezeket a játékokat úgy, hogy Pirosnak nincs számottevő hatalma, de igyekszik viszonylag a legjobban gazdálkodni; vagy úgy, hogy Piros annak meghatározására törekszik, hogy mennyi vigaszdíjat, kártérítést kérjen a játékért.

## NYEREGPONTOK

Most nézzünk egy olyan játékot, amelyben a stratégiákat érdemes megkülönböztetni egymástól:

|     |   | Piros |   |
|-----|---|-------|---|
|     |   | 1     | 2 |
| Kék | 1 | 6     | 5 |
|     | 2 | 5     | 4 |

A játékelmélet alapvető következtetése így hangzik: Kék a lehető legtöbbet szeretné nyerni, de Piros nagylelkűségére nyilván nem számíthat. Ezért stratégiáit abból a szempontból vizsgálja, hogy mennyit nyerhet annak ellenére, hogy a játékba Piros is beleadja minden erejét. Felteszi, hogy bármilyen stratégiát is választ, Piros is a számára legkedvezőbbet igyekszik választani. Így Kék a saját választásainak eredményeképpen adódó legkisebb nyereségeket sorolja fel az alábbi módon:

|     |   |   |   | Sorminimum |
|-----|---|---|---|------------|
|     |   | 1 | 2 |            |
| Kék | 1 | 6 | 5 | 5*         |
|     | 2 | 5 | 4 | 4          |

Ezek közül nyilvánvalóan a nagyobb — az 5-öt — választja, amit a mátrix jobb oldalán csillaggal meg is jelöltünk. Kéknek tehát alapos oka van arra, hogy a Kék 1-et tartsa jó stratégiának.



Piros viszont az oszlopok vizsgálatával dönti el, hogy mit tegyen. Kiinduláspontja az, hogy ellenfeléhez való viszonya Kékéhez hasonló, de Kékkel szemben ő azt szeretné elérni, hogy a nyereség lehetőleg kicsi legyen. Piros tehát annak figyelembevételével választ a stratégiák között, hogy felteszi, Kék is tudja, mit kell tennie. Ezért Piros azt vizsgálja, hogy a különböző stratégiákat választva mekkora a nyereség számára legkedvezőtlenebb (legnagyobb) értéke. Ezeket az értékeket a mátrix oszlopai alatt sorolja fel:

|                | Piros |    |
|----------------|-------|----|
|                | 1     | 2  |
| Oszlop maximum | 6     | 5  |
|                | 5     | 4  |
|                | 6     | 5* |

Ezek közül természetesen a kedvezőbbet — az 5-öt — választja, amit a mátrix alatt csillaggal meg is jelöltünk. Eszerint ha a Piros 2 stratégiát alkalmazza, akkor sosem veszíthet 5 egységnél többet.

Újra azzal találkoztunk, amivel az első példában: a játékosok olyan egyszerű stratégiát találtak, amely biztosítja számukra, hogy ha az ellenfél intelligens, akkor a nyereség — ebben az esetben 5 — egyértelmű legyen, ha az ellenfél nem intelligens, akkor a nyereség ennél — 5-nél — kedvezőbb legyen számukra. Ezt a helyzetet *nyeregpontnak* nevezzük.

Általánosságban, ha a sorminimumok legnagyobbika megegyezik az oszlopmaximumok legkisebbikével, akkor azt mondjuk, hogy a játéknak van nyeregpontja; és a játékosoknak azokat a stratégiákat kell választaniuk, amelyek a nyeregponthoz vezetnek egymást.

A nyeregponthoz a játékosok úgy találhatják meg, hogy a játékot a saját és az ellenfél szempontjából is megvizsgálják. A mátrix jobb oldalához odairják a sorminimumokat, ezek legnagyobbikát csillaggal jelölik meg. Hasonlóképpen megkeresik az oszlopmaximumokat és ezek minimumát is csillaggal jelölik meg. Ha a két csillaggal megjelölt szám egyenlő, akkor van nyeregpont és a játékosoknak a megjelölt sornak, ill. oszlopnak megfelelő stratégiát kell választaniuk.



## KEVERT STRATÉGIÁK

Próbáljuk meg azzal a csodaszerrel, amellyel az előző játékot megoldottuk, a következő játék megoldását megkeresni:

|                |   | Piros |   | Sorminimum |
|----------------|---|-------|---|------------|
|                |   | 1     | 2 |            |
| Kék            | 1 | 3     | 6 | 3          |
|                | 2 | 5     | 4 | 4*         |
| Oszlop maximum |   | 5*    | 6 |            |

A sorminimumok közül 4 a legnagyobb, ez a Kék 2 stratégia esetére vonatkozik; tehát ha Kék ezt a stratégiát alkalmazza, akkor legalább 4 egységet nyer. Az oszlopmaximumok közül 5 a legkisebb, ez a Piros 1 stratégia esetében van, tehát ezzel a stratégiával Piros nem veszíthet 5 egységnél többet.

Eszerint nincs nyeregpont és így ismeretlen helyzetbe kerültünk. Kék azt tudja biztosítani, hogy legalább 4 egységet nyer, Piros pedig azt, hogy legfeljebb 5 egységet veszít. Azt hihetnénk, hogy erről a játékról ennél több biztos dolgot nem mondhatunk, felesleges a további gondolkodás. A játék mestereinek azonban még van mit keresni ezen a „vadászterületen”.

Vizsgáljuk meg még egyszer Kék helyzetét. Ha a Kék 1 stratégiát játsza, akkor számítania kell arra, hogy Piros észreveszi ezt és így nyeresége 3 egységre csökken; ha a Kék 2 stratégiát alkalmazza, akkor viszont nyeresége csak 4 egységre csökkenhet le. Mégis, Piros helyzetét hasonlóképpen megvizsgálva arra a következtetésre jutunk, hogy Kék átlagos nyeresége játszmányként nem 3 és 4 egység között, hanem 4 és 5 egység között van, noha Kék valóban csak a fenti két stratégia között választhat.

A probléma magában rejti a megoldás kulcsát. Mivel Kéknek valamelyik stratégiát választania kell és ha állhatatosan kitart akármelyik stratégiája mellett, akkor Piros túlságosan jól jár, Kék kénytelen a fennmaradó másik lehetőséghez folyamodni, ahhoz, hogy mindkét stratégiát alkalmazza. Tekintve, hogy mindkét stratégia *teljes* cselekvéssorozat, Kéknek mindegyik játszmányban el kell döntenie, hogy melyik stratégiával dolgozzon. Így Kék számára az a helyes stratégia, hogy néha az egyik, néha a másik stratégiának megfelelően játszik.

Másképpen szólva olyan „szuper-stratégiát” keres, amely az eredeti stratégiákra, mint elemekre épül. A játékelmélet nyelvén ezt a „szuper-stratégiát” *kevert stratégiának*, az elemeket, amelyek neve eddig egyszerűen stra-



tégia volt, megkülönböztetésül tiszta stratégiáknak nevezzük. Tiszta stratégia az, ha az egyes játszmákban a számozott stratégiák egyikét alkalmazzuk. A kevert stratégia a tiszta stratégiák közti választást határozza meg.\*

Könnyen látható, hogy az ilyen cselekvéssorozatoknál elengedhetetlen a titoktartás. Ha példánkban Piros tudja, hogy Kék valójában melyik stratégiával játszik, akkor Kék kedvezőtlen helyzetbe kerül. Világosan látható tehát, hogy Kéknek az az érdeke, hogy titokban tartsa a sorra kerülő játszmákban alkalmazandó stratégiáit. *A már lejátszott játszmákról és Kék kevert stratégiájáról Piros azonban mindent tud vagy tudhat.* Ha Kéknek jó kevert stratégiája van, akkor Piros nem tudja megakadályozni őt abban, hogy sokat nyerjen. Hasonló megjegyzések mondhatók Piros helyzetéről is.

Eddig az ellenfélről csak azt tételeztük fel, hogy intelligens és jólinformált. Most még azt is fel kell tennünk, hogy nem tudja, melyik tiszta stratégiát fogjuk alkalmazni a következő játszmában. Ha ilyen az ellenfelünk, akkor csak egyféleképpen védekezhetünk: *a játék természetétől függően alkalmasan választott véletlen eseményekre bízunk, annak eldöntését, hogy melyik stratégiát fogjuk alkalmazni.*

A jó kevert stratégiák lényeges eleme, hogy a döntést alkalmasan választott véletlen események felhasználásával hozzuk meg. Így ugyanis az előző játszmák alapján az ellenfél semmiféle következtetést nem vonhat le arra vonatkozóan, hogy a következő játszmában melyik stratégiával dolgozunk, hiszen azt mi magunk sem tudjuk előre.

Térjünk vissza előbbi példánkhoz:

|     |   | Piros |   |
|-----|---|-------|---|
|     |   | 1     | 2 |
| Kék | 1 | 3     | 6 |
|     | 2 | 5     | 4 |

Tegyük fel, hogy Piros a következő superstratégiát alkalmazza: egy pénzdarab feldobásával dönti el, hogy melyik stratégiát választja; ha a dobás eredménye fej, akkor a Piros 1, ha írás, akkor a Piros 2 stratégiát. Ha Kék mindig a Kék 1 stratégiát használja, akkor az esetek egyik felében 3, másik

\* Az eddigiekben stratégián az egy játékban követendő cselekvéssorozatot értettük. Ha sokszor játszunk a játékot, a követendő cselekvéssorozatot nevezzük „superstratégiának”. Ez a superstratégia tiszta stratégia akkor, ha mindig ugyanezt a stratégiát választjuk, és kevert stratégia ellenkező esetben. (A lektor.)



felében 6 egység a nyeresége, tehát ha a játszmák száma nagy, akkor nyereségének „várható” átlagértéke

$$\frac{1 \cdot 3 + 1 \cdot 6}{1 + 1} = 4 \frac{1}{2}$$

egység. (A pénzfeldobás valószínűségi aránya 1:1, ezért szerepelnek a képletben egyesek. Az átlagértéket úgy számítottuk ki, hogy meghatároztuk a nyereségek valószínűségi arány szerint súlyozott átlagértékét.)

Ha a pénzfeldobáson alapuló szuper-stratégiával szemben Kék a másik lehetőséget, a Kék 2 stratégiát alkalmazza, akkor az átlagos nyereség:

$$\frac{1 \cdot 5 + 1 \cdot 4}{1 + 1} = 4 \frac{1}{2}$$

egység, vagyis annyi, mint az előző esetben. Tehát ha Piros a döntést pénzdaráb feldobására bizza, akkor az átlagos nyereség  $4 \frac{1}{2}$  egység függetlenül attól, hogy Kék melyik stratégiával játszik. Így Piros jobb eredményt ért el, mint akkor, amikor mindig a Piros 1 stratégiát alkalmazta, hiszen úgy 5 egységet, így pedig csak  $4 \frac{1}{2}$  egységet kell fizetnie egy játszmaért (Pirosnak, mint tudjuk, az az érdeke, hogy a nyereség minél kisebb legyen).

A *kevert stratégia* fogalmának fontos szerepe van a játékelméletben. Eltekintve azoktól az esetektől, amelyekben bizonyos speciális feltételek teljesülnek, a játékok nagyobb részében a játékosok számára az az előnyös, ha néha az egyik, néha a másik tiszta stratégiát használják és *alkalmasan választott véletlen események felhasználásával döntenek el azt, hogy egy adott játszmában melyik tiszta stratégiát alkalmazzák.*

Talán egy pillanatra felelőtlenségnek tűnik, hogy fontos dolgokban a véletlenre bizzuk a döntést. Valójában ez nem felelőtlenség, hiszen mindent, amit végig lehetett gondolni, végiggondoltunk. A véletlen események szerepe korábban kezdődik: akkor, amikor megfogalmazzuk a játékot, amikor a nyereségeket előírjuk, amikor a valószínűségi arányokat előírjuk. A Véletlen alkalmazása nem teher, hanem fontos eszköz a kezünkben. Az, hogy a döntés folyamatának utolsó lépését olyan gépre bizzuk, amely nem gondolkodik, egyáltalában nem jelentős dolog. Egyrészt például egy bomba nem túlságosan intelligens, másrészt elképzelhető, hogy a pilóta esze inkább a nőkön jár, mint azon, hol van a célpont. A láncban visszafelé haladva mégis megnyugtató, ha feltesszük, hogy a lánc valamely szakaszán történt intellektuális tevékenység.



## A GYAKORISÁG

A későbbiekben, amikor arról lesz szó, hogyan kell a kevert stratégiákat kiszámítani, az eredményt gyakran valószínűségi *arányok* segítségével fogalmazzuk meg. Így például az, hogy Kéknek 8:5 arányban kell a Kék 1 és Kék 2 stratégiát kevernie, a következőt jelenti: ha Kék sokszor játszik, akkor minden 13 játszma közül átlagosan 8-ban a Kék 1, 5-ben a Kék 2 stratégia szerint kell játszania. Mivel gyakran lesz szükségünk arra, hogy az arányban szereplő számokról külön-külön beszéljünk, nevezzük el azokat *gyakoriságoknak*. Ha például 8:5 a valószínűségi arány, és a 8-ról szeretnénk beszélni, akkor azt mondhatjuk, hogy a gyakoriság 8. A bevezetett szóhasználatot csak az teszi elfogadhatóvá, hogy Noah Webster népszerű értelmező szótárából vettük. A szóhasználat azonban valójában pontatlan. A matematikában ugyanis a 8:5 arány ekvivalens a 16:10 (vagy 24:15, vagy 4:2½, vagy végtelen sok más hasonló) aránnyal, amiből arra lehetne következtetni, hogy a 8 és a 16 gyakoriságok egyenlők egymással, sőt, minden pozitív gyakoriságérték egyforma. Hozzá kell tennünk tehát a fentiekhez azt, hogy a gyakoriságokat a szóba jöhető események teljes halmazához viszonyítjuk. A kérdés egyébként úgy merül fel, hogy a valószínűségi arányok meghatározásakor egyidejűleg csak egy számmal tudunk foglalkozni.

Megállapodhatunk abban, hogy ha egy stratégiát nem alkalmazunk, akkor azt mondjuk, hogy gyakorisága 0. Így például a 3:0:2 arány azt jelenti, hogy az első és a harmadik stratégiát 3:2 arányban keverjük, a másodikat pedig nem használjuk.

## AZ ARÁNYOK KERESÉSÉNEK SZABÁLYAI

Mivel elhatároztuk, hogy a könyvben nem használunk komolyabb matematikai fogalmakat, nem tudunk *logikus* levezetést adni arra, hogyan lehet jó kevert stratégiát találni. Kénytelenek vagyunk arra szorítkozni, hogy olyan módszert adjunk, amellyel egyszerű, de néha hosszadalmas számolás útján meg lehet határozni a keverés arányát. A 2×2-es játékok esetében az eljárás a következő:

1. lépés. Keressünk nyeregpontot. (Ez egyszerű: hasonlítsuk össze a sor-minimumok legnagyobbikát az oszlopmaximumok legkisebbikével; ha a kettő egyenlő, akkor van nyeregpont.) Ha van nyeregpont, akkor feladatunkat megoldottuk, a legjobb stratégia mindkét játékos számára az a tiszta stratégia, amely metszi a nyeregpontot.

2. lépés. Ha nincs nyeregpont, akkor a kevert stratégia a legjobb. Eddigi munkánkat tegyük félre és végezzük el a következőket.

Vizsgáljuk meg először Piros stratégiáit. Tekintsük a nyereségmátrix



Piros 1 és Piros 2 oszlopait (a számok ugyanazok, mint az előző példában):

| Piros |   |
|-------|---|
| 1     | 2 |
| 3     | 6 |
| 5     | 4 |

Vonjuk ki a második sort az elsőből. A kapott számokat írjuk fel külön, egy új mátrixban:

| Piros |   |
|-------|---|
| 1     | 2 |
| -2    | 2 |

Piros 1 gyakoriságát a

| Piros |   |
|-------|---|
| 1     |   |
|       | 2 |

mátrix vonalkázott helyén levő elem, Piros 2 gyakoriságát pedig a mátrix másik eleme, a

| Piros |   |
|-------|---|
|       | 2 |
| -2    |   |

vonalkázott helyén álló elem adja meg. A két szám közül az egyik mindig negatív. Hagyjuk el a negatív előjelet. Így a fenti gyakoriságok azt jelentik, hogy Pirosnak 2:2 arányban kell stratégiáit kevernie. A 2:2 arány ekvivalens az 1:1 aránnyal, tehát a két stratégiát egyforma gyakorisággal kell alkalmazni, vagyis pénzfeldobással választhatunk közülük. Figyeljük meg



1):

a mátrix furcsa szimmetriáját: Piros 1 oszlopában *nem* a Piros 1 stratégia gyakorisága áll.

$2 \times 2$ -es játékok esetében egyszerűbben is meg lehetne határozni a gyakoriságokat. Azért választottuk ezt a kicsit bonyolultabb módszert, mert ez egyúttal a bonyolultabb játékokra vonatkozó módszerek alapja. Pedagógiai szempontból az látszik helyesnek, hogy már most is ezzel a módszerrel ismerkedjünk meg. Kék legjobb kevert stratégiáját ugyanilyen módon kereshetjük meg, csak oldalra kell fordítanunk az egészet. Példánkban, a

|     |   |   |   |
|-----|---|---|---|
| Kék | 1 | 3 | 6 |
|     | 2 | 5 | 4 |

játékban a következőképpen határozhatjuk meg Kék legjobb kevert stratégiáját: Vonjuk ki a második oszlopot az elsőből. Így a

|     |   |    |
|-----|---|----|
| Kék | 1 | -3 |
|     | 2 | 1  |

mátrixot kapjuk. A

|     |   |   |
|-----|---|---|
| Kék | 1 |   |
|     | 2 | 1 |

mátrix, ill. a

|     |   |    |
|-----|---|----|
| Kék | 1 | -3 |
|     | 2 |    |

mátrix vonalkázott helyén álló számok rendre a Kék 1 és a Kék 2 stratégiák gyakoriságát adják meg. Így Kék számára az a jó stratégia, ha egy rész Kék 1 stratégiához három rész Kék 2 stratégiát „kever”, vagyis ha az 1:3 aránnyal dolgozik.



Ezt az arányt pénzdarab feldobásával nem kaphatjuk meg olyan egyszerűen, mint az előbbi. A II. rész végén lesz szó arról, hogyan juthatunk véletlen események felhasználásával tetszőleges arányhoz.

Módszerünk annyira egyszerű, hogy halálosan unalmas. A gyakorlás kedvéért azonban még egy játék megoldását megkeressük:

|     |   | Piros |    |
|-----|---|-------|----|
|     |   | 1     | 2  |
| Kék | 1 | 7     | 3  |
|     | 2 | 2     | 11 |

Először nyeregpontot keresünk:

|                |   | Piros |    |            |
|----------------|---|-------|----|------------|
|                |   | 1     | 2  | Sorminimum |
| Kék            | 1 | 7     | 3  | 3*         |
|                | 2 | 2     | 11 | 2          |
| Oszlop maximum |   | 7*    | 11 |            |

A csillaggal jelölt számok nem egyenlők, tehát nincs nyeregpont. A módszer lényeges eleme az, hogy *először nyeregpontot* keresünk, hiszen ha találunk, akkor egycsapásra megoldottuk a játékot. Továbbá, ha *olyan játékokra alkalmazzuk a kevert stratégiák keresésének módszerét, amelyeknek van nyeregpontjuk, akkor rendszerint hamis eredményt kapunk.*

Félre tesszük tehát eddigi munkánkat és először Piros jó kevert stratégiáját határozzuk meg:

|  |   | Piros |    |
|--|---|-------|----|
|  |   | 1     | 2  |
|  | 1 | 7     | 3  |
|  | 2 | 2     | 11 |



A második sor elemeit kivonva az első sor elemeiből a

| Piros |    |
|-------|----|
| 1     | 2  |
| 5     | -8 |

mátrixot kapjuk. A Piros 1 stratégia gyakorisága a

| Piros |    |
|-------|----|
| 1     |    |
|       | -8 |

mátrix vonalkázott eleme, a Piros 2 stratégia gyakorisága pedig a

| Piros |   |
|-------|---|
|       | 2 |
| 5     |   |

mátrix vonalkázott eleme. Piros 1 és Piros 2 aránya tehát 8:5, ami azt jelenti, hogy Pirosnak 8:5 arányban kell a Piros 1 és Piros 2 stratégiákat kevernie. Hasonlóan juthatunk el ahhoz az eredményhez, hogy Kéknek 9:4 arányban kell a Kék 1 és a Kék 2 stratégiákat kevernie.

## A JÁTÉK ÉRTÉKE

Már eddig is többször volt szó arról, hogy minden játékban található egy olyan nyereségérték, amelynek birtokába akkor juthatunk, ha mindkét fél jó stratégiával játszik. Ezt az értéket a *játék értékének* nevezzük. Átlagos nyereségünk csak akkor lehet a játék értékénél nagyobb, ha ellenfelünk rosszul játszik. Ha a játék értéke pozitív szám, akkor a játékot csak úgy tehetjük igazságossá, ha előírjuk, hogy Kék minden játszmaért annyi kártérítést fizet Pirosnak, amennyi a játék értéke. A társasjátékok legtöbbje igazságos játék. Ezekben a játék értéke nulla.



Ha a játéknak van nyeregpontja, akkor a játék értéke a nyeregpontban felvett érték. Így például a

|                |   | Piros |    |            |
|----------------|---|-------|----|------------|
|                |   | 1     | 2  | Sorminimum |
| Kék            | 1 | 6     | 5  | 5*         |
|                | 2 | 3     | 4  | 3          |
| Oszlop maximum |   | 6     | 5* |            |

játék értéke 5 egység. Ha a játékosok jól játszanak, tehát a Kék 1 stratégiával dolgoznak a Piros 2 stratégia ellen, akkor a nyereség minden játszmában 5 egység.

Ha egy  $2 \times 2$ -es játékban kevert stratégiát kell alkalmazni, akkor a játék értéke az az átlagos nyereség, amelyet akkor érünk el, ha az egyik játékos legjobb kevert stratégiája ellen a másik játékos *akármelyik tiszta* stratégiáját alkalmazzuk. Így például a

|     |   | Piros |   |
|-----|---|-------|---|
|     |   | 1     | 2 |
| Kék | 1 | 3     | 6 |
|     | 2 | 5     | 4 |

játék értékét a következőképpen határozhatjuk meg: Korábban már kiszámítottuk, hogy ebben a játékban Pirosnak 1:1 arányban kell stratégiát kevernie. Ha Kék a Kék 1 stratégiát alkalmazza, akkor az átlagos nyereség

$$\frac{1 \cdot 3 + 1 \cdot 6}{1 + 1} = 4 \frac{1}{2}.$$

Ez a játék értéke. Ha kiszámítjuk, hogy Kék legjobb kevert stratégiáját (az 1:3 arányú keveréket) alkalmazva milyen eredményt érhet el például Piros 1 ellen, akkor ugyanezt az értéket kapjuk:

$$\frac{1 \cdot 3 + 3 \cdot 5}{1 + 3} = 4 \frac{1}{2}.$$



Azokban a  $2 \times 2$ -es játékokban, amelyekben kevert stratégiával kell játszani, az átlagos nyereség minden esetben ugyanannyi (példánkban  $4\frac{1}{2}$  egység), függetlenül attól, hogy melyik játékos jó kevert stratégiáját alkalmazzuk a másik játékos valamelyik tiszta stratégiája ellen. Ezt az átlagos nyereséget nevezzük a *játék értékének*. Eredményünket annak vizsgálatára is felhasználhatjuk, hogy valóban a legjobb kevert stratégiát határoztuk-e meg. Ha a kiszámított legjobb kevert stratégiák alapján az egyik játékosból és a másik játékosból kiindulva is meghatározzuk a játék értékét és azt tapasztaljuk, hogy a kiszámított értékek különbözők, akkor a legjobb kevert stratégiák előállításakor számolási hibát követtünk el.

## A SKÁLA VÁLTOZÁSAINAK HATÁSA

Oldjuk meg a következő egyszerű játékokat, részint gyakorlás, részint néhány általános megállapítás észrevétele céljából:

|     |   | Piros        |   |   |
|-----|---|--------------|---|---|
|     |   | 1            | 2 |   |
| Kék | 1 | 8            | 1 | 2 |
|     | 2 | 4            | 6 | 7 |
|     |   | Piros aránya |   |   |
|     |   | 5            | 4 |   |

|     |   | Piros        |   |   |
|-----|---|--------------|---|---|
|     |   | 1            | 2 |   |
| Kék | 1 | 11           | 4 | 2 |
|     | 2 | 7            | 9 | 7 |
|     |   | Piros aránya |   |   |
|     |   | 5            | 4 |   |

|     |   | Piros        |    |   |
|-----|---|--------------|----|---|
|     |   | 1            | 2  |   |
| Kék | 1 | 16           | 2  | 2 |
|     | 2 | 8            | 12 | 7 |
|     |   | Piros aránya |    |   |
|     |   | 5            | 4  |   |

Furcsa módon mindhárom játékban a stratégiák keverésének aránya azonos, Kéknek 2:7, Pirosnak 5:4 arányban kell stratégiáit kevernie. Miért kell a három különböző játékban ugyanazt a kevert stratégiát alkalmazni? Figyeljük meg, hogy a második játék mátrixát úgy kaphatjuk meg az első játék



mátrixából, hogy annak minden eleméhez hozzáadunk 3 egységet:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 8 & 1 \\ \hline 4 & 6 \\ \hline \end{array} + 3 = \begin{array}{|c|c|} \hline 11 & 4 \\ \hline 7 & 9 \\ \hline \end{array}$$

a harmadik játékot pedig úgy kaphatjuk meg, hogy az első játék mátrixának minden elemét 2-vel megszorozzuk:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 8 & 1 \\ \hline 4 & 6 \\ \hline \end{array} \cdot 2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 16 & 2 \\ \hline 8 & 12 \\ \hline \end{array}$$

A fenti játékokban tapasztaltak általánosságban is igazak. Megállapíthatjuk tehát, hogy *ha a nyereségmátrix minden eleméhez hozzáadunk egy állandó számot, vagy ha a nyereségmátrix minden elemét megszorozzuk egy állandó számmal, akkor a játékok játsszási módja változatlan marad.*

Példáinkban a játék értéke a következő:

$$\frac{5 \cdot 8 + 4 \cdot 1}{5 + 4} = 4 \frac{8}{9},$$

$$\frac{5 \cdot 11 + 4 \cdot 4}{5 + 4} = 7 \frac{8}{9} = 4 \frac{8}{9} + 3,$$

$$\frac{5 \cdot 16 + 4 \cdot 2}{5 + 4} = 9 \frac{7}{9} = 4 \frac{8}{9} \cdot 2.$$

Tehát annak ellenére, hogy a *játsszási mód* nem változik meg, a *játék értéke megváltozik, mégpedig olyan mértékben, ahogy a nyereségmátrix elemei változnak.*

Ha a nyereséghez egy állandó értéket hozzáadunk, akkor a játék igazságtalansági szintje változik, ha a nyereségeket egy pozitív számmal megszorozzuk, akkor a pénzegység változik.

## JÓ JÁTEKOS ROSSZ ELLEN

A  $2 \times 2$ -es játékokról már szinte mindent tudunk, csak azt nem, hogy mi történik akkor, ha az egyik játékos (mondjuk a Kék) jó stratégia szerint játszik, a másik (Piros) nem. Két esetet különböztethetünk meg:



1. eset. Ha van nyeregpont (tehát valamelyik tiszta stratégia a legjobb), akkor Piros rossz játéka Kék számára azt jelenti, hogy Piros végtelenül nagylelkű vele szemben.

2. eset. Ha kevert stratégia a legjobb, akkor saját jó játékaival Kék képes a nyereséget állandóan az átlagértéken tartani.\* Ugyanígy, ha Piros használna jó kevert stratégiát, akkor a nyereség független attól, hogyan játszik Kék.

Az eddigiekben néhány alapvető szabály felhasználásával mátrixokkal, pontosabban számokkal és mátrixok üres helyeivel, „kereteivel” dolgoztunk, tehát tulajdonképpen élettelen szkémákat tekintettünk játékoknak. A változatosság kedvéért most érdekesebb dolgok, a valósághoz közelebb álló feladatok következnek. Aki korábban csodálkozott azon, hogy miért éppen a „játék” elnevezést használjuk, az még jobban meg fog lepődni, ha meglátja az alábbi példákat. Elméletünk bölcsessége éppen abban áll, hogy nagyon sok jelenséget játékként foghatunk fel.

## 2. Példa. Bombatámadás

Lássunk először egy katonai tárgyú  $2 \times 2$ -es játékot. Tegyük fel, hogy egy támadást két Kék bombázó hajt végre. Az egyik gép a bombákat viszi, a másik radarelhárító készüléket, bombamegsemmisítő berendezést és más hasonló dolgokat szállít. A két gép úgy repül, hogy az 1. helyen repülő bombázó sokkal jobban védi a 2. bombázót, mint a 2. helyen repülő bombázó az 1. bombázót (ezért az 1. repülőt kedvezőtlen, a 2. repülőt kedvező helyzetben levőnek nevezzük).

Egy Piros vadászgép út közben egy alkalommal megtámadja a Kék bombázók egyikét. Kék számára az a fontos, hogy a bombákat szállító gép teljesítse feladatát. A kérdés tehát a következő: Kék az 1. vagy a 2. bombázón helyezze el a bombákat és a Piros vadászgép melyik bombázót támadja meg?

A lehetséges stratégiák a következők:

Kék 1 = a bombákat szállító gép kedvezőtlen helyzetben van

Kék 2 = a bombákat szállító gép kedvező helyzetben van

Piros 1 = a kedvezőtlenebb helyzetű gép megtámadása

Piros 2 = a kedvezőbb helyzetben lévő gép megtámadása

Tegyük fel, hogy támadás esetén a bombákat szállító gép a kedvezőtlen helyzetben 60%, a kedvező helyzetben 80% valószínűséggel menekül meg.

\* De ha Piros rendületlenül rosszul játszik, akkor Kék esetleg növelheti nyereseményét azáltal, hogy ő se a legjobb kevert stratégiával játszik. (A lektor.)



Ha nem támadják meg a gépet, akkor a menekülés valószínűsége nyilván 100%. A helyzet ezek szerint a következő:

|                 |   | Piros |     | Kék<br>aránya |
|-----------------|---|-------|-----|---------------|
|                 |   | 1     | 2   |               |
| Kék             | 1 | 60    | 100 | 20            |
|                 | 2 | 100   | 80  | 40            |
| Piros<br>aránya |   | 20    | 40  |               |

Ha a játékot a szokásos módon elemezzük, akkor azt kapjuk, hogy Kéknek is, Pirosnak is kevert stratégiát kell alkalmaznia. (Jó, ha az Olvasó papírral és ceruzával a kezében maga is elvégzi azokat a számításokat, amelyeknek a könyvben csak az eredményét közöljük.) A keverés aránya mindkét félnél azonos: 20 rész 1. stratégiát kell 40 rész 2. stratégiával keverniük. Másként megfogalmazva az a jó stratégia, ha Kék 40 a 20-hoz arányban a védettebb helyre teszi a bombákat szállító gépet, Piros pedig ugyancsak 40 a 20-hoz arányban a kedvezőbb helyzetben lévő gépet támadja meg. (A 40:20 arány nyilván ekvivalens a 2:1 aránnyal.) Kék számára a játék értéke:

$$\frac{20 \cdot 60 + 40 \cdot 100}{20 + 40} = 86 \frac{2}{3} \text{ százalék.}$$

Tehát ha Kék nem egyszerűen a természetesnek látszó helyre teszi a bombákat szállító gépet, hanem véletlen események alapján határozza meg annak helyzetét, akkor 80% helyett  $86 \frac{2}{3}\%$  valószínűséggel hajthaja végre a kitűzött feladatot. Az elmélet segítségével körülbelül 8%-kal tudtuk növelni Kék esélyeit.

### 3. Példa. A Daiquri-koktél

Az előző példában a kevert stratégia alkalmazása csak 8% hasznot jelentett. A nyereség növekedése azonban nem minden esetben ilyen kicsi. Egy előkelő bár levéltárából vettük az alábbi történetet.

Alex és Olaf békésen isznak a bár egy eldugott sarkában.

— Tudok egy jó játékot — mondja Alex. — A markunkban eldugunk egy vagy két egypennyst. Aztán megnézzük, hogy kinek a kezében hány



penny van. Ha mindkettőnk kezében egy penny van, akkor egy Daiquirit fizetsz nekem. Ha nálam is, nálad is két penny van, akkor két Daiquirit fizetsz. Ha nálad nem annyi penny van, mint nálam, akkor adsz 10 centet.



Ezzel nagyszerűen eltölthetjük az időnket!

Olaf nem mozdult.

— Ez meglehetősen egyhangú játéknak ígérkezik, legalábbis az elején.

Homlokát ráncolva tekintetét a mennyezetre szegezte, ajkát lebiggyesztette. Később megszólalt:

— Nézd, egy koktél 55 centbe kerül. Ha hajlandó vagy játszmányként 42 centet fizetni nekem, akkor boldogan tölteném veled az időmet.

— Negyvenegy cent — mondta Alex.

— Rendben van — válaszolt Olaf. — Tulajdonképpen csak minden harmincadik játszmányban kellene 42 centet fizetned, de ahogy elnézlek, azt hiszem, hogy a játék nem fog olyan sokáig tartani.

A játék nyereségmátrixa a következő (Alex 1 azt jelenti, hogy Alex kezében egy penny van stb.):

|      |   |      |     |
|------|---|------|-----|
|      |   | Olaf |     |
|      |   | 1    | 2   |
| Alex | 1 | 55   | 10  |
|      | 2 | 10   | 110 |

Olaf szerencsére észrevette, hogy a játék igazságtalan számára, azért minden játszmányért kártérítést kért, annyit, hogy a játék igazságossá váljék (feltéve, hogy a szabályokat betartják).



Milyen stratégiát kell ebben a játékban alkalmazni? Végezzük el a szokásos számításokat:

|                 |   | Olaf |     | Alex<br>arányai |
|-----------------|---|------|-----|-----------------|
|                 |   | 1    | 2   |                 |
| Alex            | 1 | 55   | 10  | 100             |
|                 | 2 | 10   | 110 | 45              |
| Olaf<br>arányai |   | 100  | 45  |                 |

Így Olafnak kevert stratégiával kell játszania, az egy és két penny felmutatását 100:45 arányban kell kevernie. Ha így játszik és Alex az Alex 1 stratégiát alkalmazza, akkor játszmányként átlagosan

$$\frac{100 \cdot 55 + 45 \cdot 10}{100 + 45} = 41 \frac{1}{29}$$

centet veszít. Alex másik stratégiájával szemben Olaf átlagos vesztesége

$$\frac{100 \cdot 10 + 45 \cdot 110}{100 + 45} = 41 \frac{1}{29}$$

cent, annyi, mint az előbb. Olaf átlagos vesztesége tehát  $41 \frac{1}{29}$  cent, függetlenül attól, hogy Alex milyen stratégiát alkalmaz. Így a 100:45 (vagyis 20:9) stratégiakeveréssel Olaf állandó értéken tudja tartani a játékot és meg tudja határozni, hogy milyen kártérítést kell követelnie ahhoz, hogy a játék igazságossá váljon.

Alex legjobb stratégiája is a 100:45 arányú keverék. Ez biztosítja számára, hogy játszmányként átlagosan  $41 \frac{1}{29}$  centet nyerjen. Ha Alex tiszta stratégiát alkalmaz, akkor Olaf elérheti, hogy játszmányként csak 10 centet nyerjen. Így Alex számára a tiszta stratégia csak 10, a jó kevert stratégia viszont  $41 \frac{1}{29}$  cent nyereséget biztosít. Példánkban tehát a kevert stratégia többszáz százalékkal jobb, mint a tiszta stratégia.

Általánosságban is igaz, hogy ha egy mátrix egyik átlójában kis számok, a másikban viszonylag nagy számok állnak, akkor a kevert stratégia lényegesen jobb a tiszta stratégiáknál.



#### 4. Példa. Mese a folyón

Stevet megszólította egy ismeretlen ember. Azt ajánlotta, hogy játsszanak „fej vagy írás” játékot. Steve azt válaszolta, hogy túl meleg van ahhoz, hogy ilyen megerőltető játékkal foglalkozzanak. Az idegen erre így válaszolt:

Akkor azt ajánlom, játsszunk úgy, hogy egyszerre mondjuk: fej, vagy írás. Ha én azt mondom „fej” és Ön azt, hogy „írás”, akkor 30 dollárt, ha fordítva mondjuk, akkor 10 dollárt fizetek. És — hogy igazságos legyen a játék — Ön fizet nekem 20 dollárt, ha egyformát mondunk.

Tekintettel a környezetre — a Mississipin egy gőzhajón utaztak — Steve úgy vélte, hogy okosabb az idegent le tartóztatni, mint játszani vele. Hogy sejtését igazolja, nem sajnálta a fáradságot arra sem, hogy elvégezze a következő számításokat:



|                     |   | Idegen |     | Steve<br>aránya |
|---------------------|---|--------|-----|-----------------|
|                     |   | F      | I   |                 |
| Steve               | F | -20    | 30  | 30              |
|                     | I | 10     | -20 | 50              |
| Az idegen<br>aránya |   | 50     | 30  |                 |

Így Steve számára a játék értéke:

$$\frac{30 \cdot (-20) + 50 \cdot 10}{30 + 50} = -1,25$$

dollár. Steve gyanúja tehát igazolódott, hiszen a legjobb esetben is csak annyit remélhet, hogy játszmányként 1,25 dollárt veszít (ehhez a „fejet” és az „írást” 3:5 arányban kellett volna kevernie).



## 5. Példa. Támadás és védekezés

Kéknek két támaszpontja van. Bármelyik támaszpontját sikeresen megtudja védeni, de a két támaszpont egyidejű védelmére nem képes. Piros bármelyik támaszpontot megtámadhatja, de egyszerre csak egy támaszpont ellen intézhet támadást. Az egyik támaszpont háromszor olyan értékes, mint a másik. Milyen stratégiát kell alkalmazniuk?

Legyen a kevésbé értékes támaszpont értéke 1 egység. Így ha Kék mindkét támaszpontot meg tudja védeni, akkor nyeresége 4 egység, ha csak az értékesebbet tudja megtartani, akkor a nyereség 3 egység, ha csak az értéktelenebbet, akkor 1 egység. Ha a kevésbé értékes támaszpont támadását, ill. védését választjuk első stratégiának, akkor a nyereségmátrix a következő:

|     |   | Piros |   |
|-----|---|-------|---|
|     |   | 1     | 2 |
| Kék | 1 | 4     | 1 |
|     | 2 | 3     | 4 |

A sorminimumok és az oszlopmaximumok kiszámításával meggyőződhetünk arról, hogy nincs nyeregpont. Kevert stratégiát kell tehát alkalmaznunk. A szokásos számításokat elvégezve

|              |   | Piros |   | Kék aránya |
|--------------|---|-------|---|------------|
|              |   | 1     | 2 |            |
| Kék          | 1 | 4     | 1 | 1          |
|              | 2 | 3     | 4 | 3          |
| Piros aránya |   | 3     | 1 |            |

azt kapjuk, hogy Kék legjobb stratégiája az, ha 3:1 arányban az értékesebb támaszpontot védi, Piros legjobb stratégiája az, ha 3:1 arányban a kevésbé értékes támaszpont ellen intéz támadást. A játék értéke  $3\frac{1}{4}$ .

Példánk sok mindenben hasonlít a bombatámadással kapcsolatos feladathoz, de ebben a példában Piros számára az a kedvezőbb, ha kevésbé értékes objektumot támadja meg.



## 6. Példa. Randevú az Operánál

Egy esős decemberi napon Sam megbeszélte Genával, hogy 6 óra körül találkoznak az Opera előtt. Ha Sam érkezik előbb, akkor kocsijával kénytelen az Opera körül cirkálni addig, amíg Őnagysága megérkezik. A nagy forgalomra és a latyakra való tekintettel Sam ennek az eseménynek  $-1$  értéket tulajdonít. Ha Őnagysága érkezik előbb, akkor fázik és megázik. Tekintettel az ebből származó kellemetlenségekre Sam ennek az eseménynek  $-3$  értéket tulajdonít. A játék tehát a következő:

|                |       | Gena  |       | Sam<br>aránya |
|----------------|-------|-------|-------|---------------|
|                |       | Korán | Későn |               |
| Sam            | Korán | 0     | $-1$  | 3             |
|                | Későn | $-3$  | 0     | 1             |
| Gena<br>aránya |       | 1     | 3     |               |

A játékban kevert stratégiát kell alkalmazni. Sam akkor játszik helyesen, ha a „korán” és a „későn” stratégiákat 3:1 arányban keveri. Átlagos nyeresége  $-\frac{3}{4}$ .





Kizárólag akadémikusan érdekes azt megjegyezni, hogy Őnagysága számára az az előnyös, ha (3 : 1 arányban) később érkezik. Őnagysága ugyanis nyilvánvalóan nem érdekelt abban, hogy Sam bosszúsága lehetőleg kicsi legyen. A nyereség növelése Sam érdeke, Őnagysága pedig voltaképpen a Természet szerepében mutatkozott be.\*

### 7. Példa. A sötétkamra

Goldy a sötétkamrában pótolhatatlan negatívokat hív elő — egy 8 perces újszülöttről készített felvételeket. Goldy rendszerint kifogástalan munkát végez, de tegnap keveset aludt, ezért ma kissé figyelmetlenül dolgozik. Betszi a filmet az előhívóba és számlálni kezdi a másodperceket. Az előhívás ideje 15 perc.

Egyszerre csak abbahagyja a számolást.

Jó előhívóba tette a filmet? Vagy abba, amit tegnap papírhíváshoz 2:1 arányban felhígított? Először ékes ó-angol nyelven fejezi ki indulatait, aztán gondolkodni kezd.

Ha jó előhívót alkalmazott, akkor pontosan 15 perc szükséges a híváshoz és a negatív kifogástalan lesz. A kifogástalan negatív értékét Goldy 10 egységnek veszi. Ha híg az előhívó, akkor az előhívási idő reciprocitásának törvénye alapján meg lehet menteni a negatívot. Ebben az esetben a hívás ideje 30 perc, a negatív minősége viszont csak 9 egység, kicsit gyengébb, mint az előbb.



\* Pontosabban, ha játékunkat nulla összegű játékként akarjuk kezelni, fel kell tenni, hogy amekkora élvezet (negatív élvezet = bosszúság) valami Samnek, ugyanakkora bosszúság (negatív bosszúság = élvezet) az Genának. Ez azonban nyilván csak idealizáltan ellenséges érzelmű párnál áll fenn. Ha nem így tekintjük, akkor a játék nem nulla összegű, így eddigi módszerünk nem érvényes rá. (A lektor.)



Mi történik akkor, ha a hígított előhívóban csak 15 percig van a film? Rosszul világított szobában készült, gyengén előhívott negatív nem nagy kincs, de azért valamit lehet vele kezdeni. Értéke mondjuk 6 egység. Hátra van még a legrosszabb eset: 30 perc hívás tömény hívóban. A túlhívott negatív koromfekete lesz, értéke szerencsés esetben is csak 2 egység.

Jelöljük a stratégiákat a következőképpen:

Goldy 1 = 15 perc előhívás  
 Goldy 2 = 30 perc előhívás  
 Természet 1 = tömény előhívó  
 Természet 2 = hígított előhívó.

Jelöléseinkkel a játék mátrixa a

|       |   | Természet |   | Goldy<br>aránya |
|-------|---|-----------|---|-----------------|
|       |   | 1         | 2 |                 |
| Goldy | 1 | 10        | 6 | 7               |
|       | 2 | 2         | 9 | 4               |

mátrix. Kevert stratégiával kell dolgozni. A keverés aránya 7:4 a rövidebb hívási idő javára. A negatív várható értéke

$$\frac{7 \cdot 6 + 4 \cdot 30}{7 + 4} = 7 \frac{1}{11}^*$$

Szigorúan véve a fenti arány szerint kellene játszania. Ha azonban felteszi, hogy a kép minősége egyenesen arányos az előhívás idejével, akkor jobban teszi, ha

$$\frac{7 \cdot 15 + 4 \cdot 30}{11} = 20 \frac{5}{11}$$

percig tarrja az előhívóban a negatívot.\*\*

\* Itt érdemes megjegyezni, hogy ezt a stratégiát akkor érdemes alkalmazni, ha semmit nem tudunk a Természet stratégiájáról. Ha azonban tudjuk, hogy milyen arányú a két stratégia valószínűsége, akkor nem. Pl. ha az arány előre ismert 1:1, akkor Goldy első stratégiája  $\frac{10+6}{2} = 8$  egység értéket ad. (A lektor.)

\*\* Az itt és a 9. feladatban található alternatív cselekvési móddal később részletesebben foglalkozunk.



## 8. Példa. A születésnap

Már késő este volt, amikor Frank befejezte napi munkáját. Miközben hazafelé igyekezett, eszébe jutott, hogy ma van Kitty születésnapja. Vagy nem? A virágüzlet kivételével minden üzlet zárva volt már.

Ha nem ma van a születésnapja és nem visz ajándékot, akkor semmi sem történik, tehát a nyereség 0. Ha annak ellenére, hogy Kittynek nem ma van a születésnapja és mégis visz neki virágot, akkor a nyereség 1 egység,



hiszen Kitty nyilván örülni fog Frank figyelmességének. Ha ráadásul éppen aznap van a születésnapja, akkor öröme valamivel nagyobb. Ebben az esetben a nyereség mondjuk 1,5 egység. Ha Frank megfeledkezik Kitty születésnapjáról, akkor Kitty megsértődik, a nyereség – 10 egység.

Frank felírta a nyereségmátrixot:

|       |                             | Természet                     |                           | Frank<br>aránya |
|-------|-----------------------------|-------------------------------|---------------------------|-----------------|
|       |                             | Nem ma van<br>a születésnapja | Ma van a<br>születésnapja |                 |
| Frank | Üres kézzel<br>megy<br>haza | 0                             | - 10                      | 0,5             |
|       | Visz virágot                | 1                             | 1,5                       | 10              |



Látjuk, hogy az arány 10:0,5, vagyis 20:1 a virág javára. A könyv egyik első Olvasójának tanácsára ebben a példában merényletet követtünk el a mit sem sejtő Olvasó ellen. A fenti játékban ugyanis elfelejtettük megvizsgálni hogy van-e nyeregpont. Ezekután lehet sejteni, hogy van: Franknak mindig kell virágot vinnie és az Olvasónak mindig úgy kell a feladatokat megoldania, ahogy elmagyaráztuk, nem pedig úgy, ahogy csináljuk.

Kis mátrixoknak gyakran van nyeregpontjuk. Ha találomra felírunk egy mátrixot, akkor a nyeregpont létezésének valószínűségi aránya  $2 \times 2$ -es mátrixoknál 2:1,  $3 \times 3$ -asoknál 3:7,  $4 \times 4$ -eseknél 4:31.  $9 \times 9$ -es mátrixoknál a nyeregpont létezésének valószínűsége egy ezredrészénél is kisebb.

#### 9. Példa. Az árus

Merill esernyőket és napszemüvegeket árul a Yankee Stadionban. Nyilván az időjárástól függ, hogy hogyan megy az üzlet.

Megfigyelte, hogy ha esik az eső, akkor körülbelül 500 esernyőt tud eladni. Ha süt a Nap, akkor csak 100 esernyőt vásárolnak tőle, de az esernyőkön kívül 1000 napszemüveget is el tud adni. Az esernyőket 50 centért veszi, 1 dollárért adja el, a napszemüvegeket 20 centért veszi és 50-ért adja el. Összesen 250 dollárt fektet be az üzletbe. Amit nem tud eladni, az teljes veszteség (otthon a gyerekek tönkreteszik).

Merill a lehetséges eseteket annak alapján írta fel mátrix alakban, hogy a különböző esetekben mennyi haszna lehet:

Vétel

|        |             | Esik az eső | Süt a nap | Arány |
|--------|-------------|-------------|-----------|-------|
| Eladás | Esik az eső | 250         | -150      | 5     |
|        | Süt a nap   | -150        | 350       | 4     |





A játékban kevert stratégiát kell alkalmazni. Így Merill az időjárás viszonyosságaitól függetlenítheti magát és hasznát állandó értéken tarthatja.

Mivel a játék megoldásakor azt találtuk, hogy Merillnek 5:4 arányban kell esős, ill. napos időre készülnie, a játék értéke

$$\frac{5 \cdot 250 + 4 \cdot (-150)}{9} = 72,22$$

dollár. Ahelyett, hogy így játszana,\* megteheti azt is, hogy tőkéjének öt-kilencedét rossz időben, négykilencedét jó időben eladható cikkekbe fekteti be. Így akkor jár el helyesen, ha 161,11 dollárért esernyőket vesz (ebben benne van az is, hogy napos idő esetére 22,22 dollár értékben esernyőket szerez be) és 88,89 dollárért napszemüvegeket vesz. A haszon így is állandóan 72,22 dollár.

#### 10. Példa. A járőrautó

A most következő példa izgalmasabb az előzőnél.

Az URH-központ villámsebessen közölte az autósztádán cirkáló 2-es számú járőrrel megfigyelését és véleményét:

— „... egy Cadillacban most hagyta el az „Akasztófához” címzett kocsmát a régi országúton. A menekülés iránya ismeretlen. A gyanúsított, Plesset, súlyosan megsebesült, de ha olyan jó orvost talál, amilyen Haydon doktor, akkor ötven százalékos esélye van az életben maradásra. Esetleg Paxson állatorvos is megmentheti, de csak fele akkora eséllyel, mint Haydon. A gyanúsított lelőtte Flood ezredest, a mintaférjet és többszörös családapát.”

Henderson tizedes, akinek végre sikerült letekernie a mikrofon zsinórját riasztópisztolyáról valamint 48-as cipőjéről, így válaszolt:

— Roger! Ha Plesset Haydon doktorhoz megy, akkor biztosan a kezünkbe kerül. Ha az állatorvos felé igyekszik, akkor az országúton 50%-os valószínűséggel vágjuk el az útját. El kell vágnunk az útját, mert utólrni nem tudjuk. Root tizedes a múltkor elszúrta a sebességváltót, amikor hátrafelé hajtott és azóta gyalázatosan rosszul megy a kocsi.

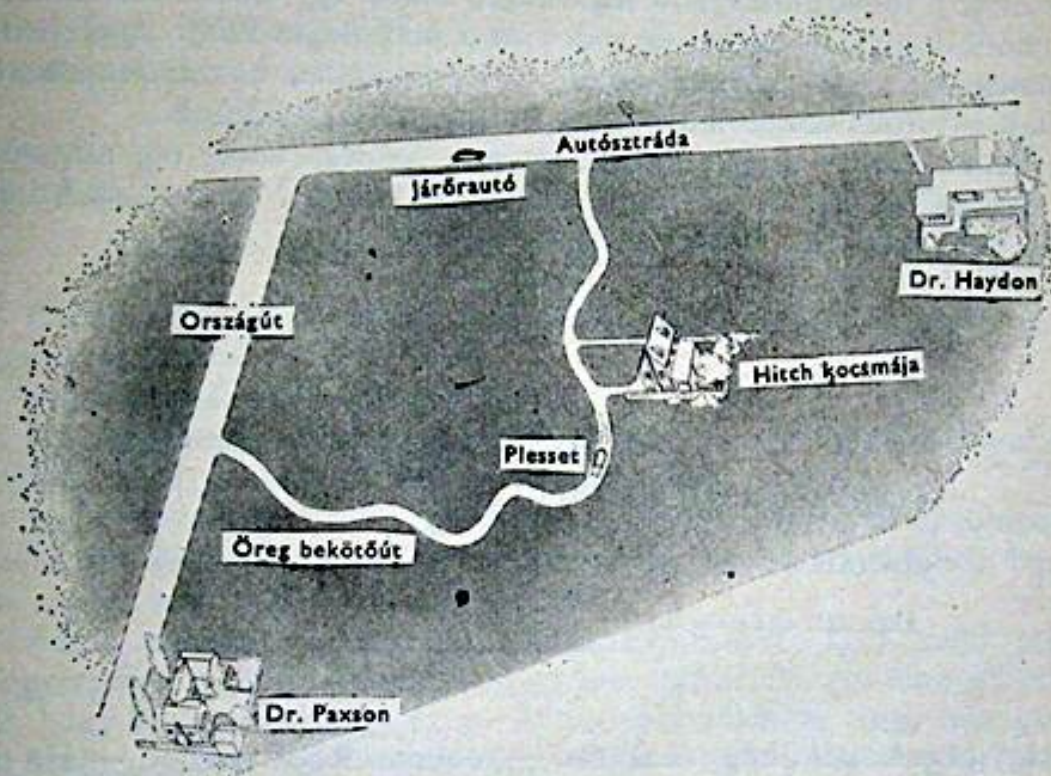
A vevőkészülék éktelen zümmögés kíséretében újra megszólalt, de a diszpécser éneklő hangja helyett Lipp kapitány jelentkezett, megszokott csikorgó hangján.

\* Itt természetesen ismét az a helyzet, hogy ha tud az időjárásról valamit, másképpen kell eljárnia. Ha pl. 3:1 az arány a napos idő valószínűségének javára, akkor a tiszta második stratégia szerint várható nyeresége  $\frac{-150 + 3 \cdot 350}{4} = 225$ , ami jóval több.  
(A lektor.)



— Ha megtudtok is valamit, ne mondjátok be. A Cadillacban URH vevő van. Fogjátok el!

Hogy hogy nem, Rootnak egy gondolata támadt. Jobb lábával benyomta a féket és a kocsi hirtelen zökkenéssel megállt.



— Henderson, ma nem puskára, hanem ceruzára van szükség: ez kétszer kettes játék. A diszpécstől minden adatot megkaptunk.

— Bízol becsléseiben?

— Tudsz jobbat? Bízunk a központban. Meglátjuk, mi lesz... Ha Haydon felé indulunk és Plesset is odamegy, akkor hidegre teszünk egy banditát, hacsak nem lövöd le véletlenül. Ha viszont Paxsonhoz megy, akkor az állatok régi barátja  $\frac{3}{4}$  valószínűséggel megöli.

— Egy szót sem értek az egészből.

— Nen baj, mindjárt megérted. Emlékezz vissza arra, hogy a központ szerint Haydon  $\frac{1}{2}$  valószínűséggel menti meg őt. Paxsonnál feleakkora kilátás van arra, hogy meglép és életben marad. Félnék fele egynegyed. Így hát  $\frac{3}{4}$  annak a valószínűsége, hogy nem menekül meg — tudod, ki kell vonni 1-ből.

— No persze, ez így van — mondta Henderson félálomban.

— Nahát! Ha Paxsonhoz indulunk, akkor nehezebb a helyzet. Először is,



ha Plesset Haydonhoz megy, akkor  $\frac{1}{2}$  a valószínűsége, hogy életben marad és olajra lép.

— Ezt is ki kell vonni 1-ből.

— Én már kivontam. Tegyük fel, hogy ő is Paxsonhoz igyekszik. Két dolog történhet. Az egyik az, hogy elkapjuk. Ennek  $\frac{1}{2}$  valószínűsége van. A másik az, hogy eljut az öreg doktorhoz. Ennek is  $\frac{1}{2}$  a valószínűsége, de az öreg  $\frac{1}{2}$  valószínűséggel a másvilágra küldi. Így annak valószínűsége, hogy előlünk meglóg ugyan, de a doktor a másvilágra küldi, egykettedszer háromnegyed, vagyis háromnyolcad. Az egykettedhez hozzáadva láthatod:  $\frac{7}{8}$  annak a valószínűsége, hogy nem tud megszökni előlünk.

— Nem szeretem az ilyesmiket. Amíg te firkálsz, addig rég megszökik.

— Nyugalom. Ezt ő is ki tudja számítani, nemde? És ő rosszabb helyzetben van, mint mi. Lássuk, hogyan állunk.

| A Cadillac         |                  |                  |
|--------------------|------------------|------------------|
|                    | Haydon           | Paxson           |
|                    | lakása felé megy | lakása felé megy |
| Haydon lakása felé | 1                | $\frac{3}{4}$    |
| A járőrautó        |                  |                  |
| Paxson lakása felé | $\frac{1}{2}$    | $\frac{7}{8}$    |

— Így nem látszik, hogy is állunk — mondta Root tizedes. — Ha mindent megszorozunk nyolccal, akkor világosabban láthatjuk a helyzetet. Úgy tudom, a szorzás nem változtat meg semmit sem.

|            |           | Cadillac  |           |
|------------|-----------|-----------|-----------|
|            |           | Haydonhoz | Paxsonhoz |
| Járőrautó: | Haydonhoz | 8         | 6         |
|            | Paxsonhoz | 4         | 7         |

— Most már látni, hogy bonyolult az ügy...

— Tudom.



— Egyszerű stratégiánk nincs, amely biztos eredményre vezet. Még van annyi időnk, hogy kiszámítsuk a legjobb kevert stratégiát.

|                 |           | Cadillac  |           | A járóautó aránya |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|-------------------|
|                 |           | Haydonhoz | Paxsonhoz |                   |
| Járóautó        | Haydonhoz | 8         | 6         | 3                 |
|                 | Paxsonhoz | 4         | 7         | 2                 |
| Cadillac aránya |           | 1         | 4         |                   |

— Ühüm... három-kettő Haydon javára. Nézd meg az órán a másodpercmutatót. Most!

— Huszonnyolc másodperc.

— Rendben van. Indulás Haydonhoz. Ami persze könnyebb lenne, ha nem ilyen hosszú kocsival kellene megfordulni.

— Az a hókus-pókusz a másodpercmutatóval biztosan ostobaság — zsörtölődött Henderson. — Ha egyszer érdemesebb Haydonhoz hajtani, akkor miért nem indultunk oda egyből?

— Azért, mert az csökkentette volna esélyeinket. Igaz, nem sokkal. Ha egyszerűen csak Haydonhoz megyünk, akkor Plesset átejthet minket azzal, hogy Paxsonhoz megy és így 75% a valószínűsége, hogy nem csúszik ki a kezünk közül. Így viszont attól függetlenül, hogy hogyan számol, 80%-ot kockáztat. Nézz az órára: az első 36 másodperc és a következő 24 másodperc aránya 3:2.

## A 2×2-es MÓDSZEREK ÖSSZEFOGLALÁSA

Az első fejezet anyagát egy újabb játék megoldásán keresztül foglaljuk össze.

Tekintsük a következő játékot:

|     |   | Piros          |               |
|-----|---|----------------|---------------|
|     |   | 1              | 2             |
| Kék | 1 | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ |
|     | 2 | $\frac{1}{2}$  | 0             |



Azt szeretnénk meghatározni, *hogyan kell játszani ezt a játékot*. Tegyük fel, hogy a törtekre és a negatív számokra allergiásak vagyunk. Felfedeztük, hogy konstanssal való szorzás, ill. konstans hozzáadása nem változtatja meg a játékot. Hogy az allergia által okozott kellemetlenségektől megszabaduljunk, szorozzuk meg először a mátrix minden elemét a nevezők egy közös többszörösével, mondjuk 12-vel:

|     |   | Piros |   |
|-----|---|-------|---|
|     |   | 1     | 2 |
| Kék | 1 | -4    | 3 |
|     | 2 | 6     | 0 |

A negatív számoktól úgy szabadulhatunk meg, hogy a mátrix minden eleméhez hozzáadunk például 4-et (lehetne többet is, de felesleges):

|     |   | Piros |   |
|-----|---|-------|---|
|     |   | 1     | 2 |
| Kék | 1 | 0     | 7 |
|     | 2 | 10    | 4 |

Most már hozzáláthatunk a megoldáshoz. Először nyeregpontot keresünk:

|                |   | Piros |    | Sorminimum |
|----------------|---|-------|----|------------|
|                |   | 1     | 2  |            |
| Kék            | 1 | 0     | 7  | 0          |
|                | 2 | 10    | 4  | 4*         |
| Oszlop maximum |   | 10    | 7* |            |



A maximin 4, a minimax 7, tehát nincs nyeregpont. Félretesszük eddigi munkánkat és jó kevert stratégiákat keresünk. Először Piros szempontjából vizsgáljuk meg a játékot:

|  | Piros |   |
|--|-------|---|
|  | 1     | 2 |
|  | 0     | 7 |
|  | 10    | 4 |

Az első sorból kivonva a második sort a

|  | Piros |   |
|--|-------|---|
|  | 1     | 2 |
|  | -10   | 3 |

mátrixot kapjuk és így a Piros 1 és a Piros 2 stratégiák gyakorisága az

|   | 1   | 2 |
|---|-----|---|
| 1 |     | 3 |
| 2 | -10 |   |

mátrixok vonalkázott helyein álló elemekből olvasható le. A negatív előjelet mindig elhagyjuk és így azt kaptuk, hogy (ha seholsem tévedtünk, akkor) Piros jó stratégiája a 3:10 arányú stratégiakeverék.

Következő problémánk Kék arányának meghatározása:

|  |   | Kék |   |
|--|---|-----|---|
|  |   | 1   | 2 |
|  | 1 | 0   | 7 |
|  | 2 | 10  | 4 |

A második oszlopot kivonva az elsőből a

|  |   | Kék |   |
|--|---|-----|---|
|  |   | 1   | 2 |
|  | 1 | -7  |   |
|  | 2 | 6   |   |



mátrixot kapjuk, és így a Kék 1 és a Kék 2 stratégiák gyakorisága a

|    |                                                      |  |   |   |                                                       |    |  |
|----|------------------------------------------------------|--|---|---|-------------------------------------------------------|----|--|
| 1  | <table><tr><td></td></tr><tr><td>6</td></tr></table> |  | 6 | 2 | <table><tr><td>-7</td></tr><tr><td></td></tr></table> | -7 |  |
|    |                                                      |  |   |   |                                                       |    |  |
| 6  |                                                      |  |   |   |                                                       |    |  |
| -7 |                                                      |  |   |   |                                                       |    |  |
|    |                                                      |  |   |   |                                                       |    |  |

mátrixok vonalkázott helyein álló elemekből olvasható le. Ha minden rendben van, akkor Kék stratégiáinak aránya 6:7.

Számításaink helyességét a játék értékének meghatározásával ellenőrizhetjük. Kék 6:7 arányú kevert stratégiáját Piros 1 ellen alkalmazva

$$\frac{6 \cdot 0 + 7 \cdot 10}{6 + 7} = \frac{70}{13},$$

Piros 2 ellen használva

$$\frac{6 \cdot 7 + 7 \cdot 4}{6 + 7} = \frac{70}{13}$$

egység a nyereség. Másrészt Piros 3:10 arányú kevert stratégiáját Kék ellen alkalmazva

$$\frac{3 \cdot 0 + 7 \cdot 10}{3 + 10} = \frac{70}{13},$$

Kék 2 ellen alkalmazva

$$\frac{3 \cdot 10 + 10 \cdot 4}{3 + 10} = \frac{70}{13}$$

egység a nyereség. Ezek szerint minden rendben van, Kék és Piros legjobb stratégiája valóban a fenti arányok szerinti keverés.

Biztos, hogy a játék értéke  $\frac{70}{13}$  egység? Nem! Emlékezzünk vissza arra, hogy minden elemet megszoroztunk 12-vel, aztán mindegyikhez hozzáadtunk 4-et. A játék értékét úgy kaphatjuk meg, hogy a fenti lépések fordítottját hajtjuk végre: mivel hozzáadtunk 4-et, most kivonunk 4-et.

$$\frac{70}{13} - 4 = \frac{70 - 52}{13} = \frac{18}{13}.$$

Ezután, mivel előzőleg 12-vel szoroztunk, 12-vel osztunk:

$$\frac{18}{13} : 12 = \frac{18}{13 \cdot 12} = \frac{3}{26}.$$

Tehát az eredeti játék értéke  $\frac{3}{26}$ . Ezt közvetlen számítással is igazolhatjuk. Ha például Kék 6:7 arányú kevert stratégiáját az eredeti játékban a Piros 2



stratégia ellen alkalmazzuk, akkor az átlagos nyereség

$$\frac{6 \cdot \frac{1}{4} + 7 \cdot 0}{6 + 7} = \frac{3}{26}$$

egység.

Néhány feladatot közlünk azok számára, akik szívesen oldanak meg feladatokat. Új gondolatok rögzítésének valószínűleg ez a legjobb módszere. A feladatok megoldása valahol a könyv végén található.

### Feladatok

Határozzuk meg a következő játékok gyakoriságait és értékét.

1.

|     |   | Piros |   |
|-----|---|-------|---|
|     |   | 1     | 2 |
| Kék | 1 | 7     | 4 |
|     | 2 | 1     | 2 |

2.

|     |   | Piros |   |
|-----|---|-------|---|
|     |   | 1     | 2 |
| Kék | 1 | 5     | 8 |
|     | 2 | 6     | 7 |

3.

|     |   | Piros |    |
|-----|---|-------|----|
|     |   | 1     | 2  |
| Kék | 1 | -5    | -8 |
|     | 2 | -6    | -7 |

4.

|     |   | Piros |   |
|-----|---|-------|---|
|     |   | 1     | 2 |
| Kék | 1 | 2     | 4 |
|     | 2 | 8     | 6 |

5.

|     |   | Piros |   |
|-----|---|-------|---|
|     |   | 1     | 2 |
| Kék | 1 | 1     | 2 |
|     | 2 | 4     | 3 |

6.

|     |   | Piros |   |
|-----|---|-------|---|
|     |   | 1     | 2 |
| Kék | 1 | 1     | 2 |
|     | 2 | 3     | 4 |



7.

|     |   | Piros |   |
|-----|---|-------|---|
|     |   | 1     | 2 |
| Kék | 1 | 1     | 3 |
|     | 2 | 4     | 2 |

8.

|     |   | Piros |   |
|-----|---|-------|---|
|     |   | 1     | 2 |
| Kék | 1 | 0     | 2 |
|     | 2 | 3     | 1 |

9.

|     |   | Piros |   |
|-----|---|-------|---|
|     |   | 1     | 2 |
| Kék | 1 | -1    | 1 |
|     | 2 | 2     | 0 |

10.

|     |   | Piros |    |
|-----|---|-------|----|
|     |   | 1     | 2  |
| Kék | 1 | -3    | 1  |
|     | 2 | 3     | -1 |

11.

|     |   | Piros |    |
|-----|---|-------|----|
|     |   | 1     | 2  |
| Kék | 1 | 4     | -4 |
|     | 2 | -4    | 4  |

12.

|     |   | Piros |    |
|-----|---|-------|----|
|     |   | 1     | 2  |
| Kék | 1 | 4     | -5 |
|     | 2 | -5    | 4  |

13.

|     |   | Piros |   |
|-----|---|-------|---|
|     |   | 1     | 2 |
| Kék | 1 | 4     | 5 |
|     | 2 | 5     | 4 |

14.

|     |   | Piros |    |
|-----|---|-------|----|
|     |   | 1     | 2  |
| Kék | 1 | 5     | 88 |
|     | 2 | 88    | 5  |



15.

|     |   | Piros |    |
|-----|---|-------|----|
|     |   | 1     | 2  |
| Kék | 1 | 4     | -5 |
|     | 2 | -4    | 5  |

16.

|     |   | Piros |    |
|-----|---|-------|----|
|     |   | 1     | 2  |
| Kék | 1 | 4     | -5 |
|     | 2 | -3    | 5  |

17.

|     |   | Piros |   |
|-----|---|-------|---|
|     |   | 1     | 2 |
| Kék | 1 | 1     | 3 |
|     | 2 | 7     | 5 |

18.

|     |   | Piros |    |
|-----|---|-------|----|
|     |   | 1     | 2  |
| Kék | 1 | 1     | -3 |
|     | 2 | -7    | 5  |

19.

|     |   | Piros |     |
|-----|---|-------|-----|
|     |   | 1     | 2   |
| Kék | 1 | 1     | 100 |
|     | 2 | 1000  | 10  |

20.

|     |   | Piros |    |
|-----|---|-------|----|
|     |   | 1     | 2  |
| Kék | 1 | 3     | -3 |
|     | 2 | -4    | 4  |

## MÁSODIK FEJEZET: $2 \times m$ -es játékok

Azokat a játékokat, amelyekben az egyik játékosnak *két*, a másiknak *több* stratégiája van,  $2 \times m$ -es játékoknak nevezzük. Az  $m$  betű bármely 2-nél nagyobb egész számot jelenthet. Ebben a fejezetben végig ilyen játékokkal foglalkozunk. Megoldásukhoz szerencsére szinte semmi mást nem kell tudni, mint azt, hogyan oldunk meg  $2 \times 2$ -es játékokat.

### NYEREGPONTOK

Ezeknek a játékoknak mindig van vagy nyeregpont-megoldásuk (vagyis jó tiszta stratégiájuk) vagy *két* tiszta stratégián alapuló jó kevert stratégiájuk. Így a  $2 \times m$ -es játékokat vissza lehet vezetni a  $2 \times 2$ -es játékokra. A visszavezetés többféle lehet.



Először mindig nyeregpontot keresünk. Ez az eljárás egyszerű és ha csak egy nyeregpont van, akkor célhoz is vezet. Emlékezzünk vissza arra, hogy a nyeregpont keresése során először megnéztük az egyes sorok minimumát, majd ezek közül az értékek közül kiválasztottuk a legnagyobbat. Ezután az egyes oszlopok maximumát kerestük meg, és ezek közül kiválasztottuk a legkisebb számot. Ha a két szám (amelyeknek a maximin, ill. a minimax nevet adtuk) egyenlő, akkor van nyeregpont és a közös érték a játék értéke.

Vizsgáljuk meg a következő játékot:

|                |   | Piros |    | Sorminimum |
|----------------|---|-------|----|------------|
|                |   | 1     | 2  |            |
| Kék:           | 1 | 4     | 4  | 4          |
|                | 2 | 5     | 3  | 3          |
|                | 3 | 6     | 5  | 5*         |
|                | 4 | 1     | 3  | 1          |
|                | 5 | 5     | 4  | 4          |
| Oszlop maximum |   | 6     | 5* |            |

A játéknak van nyeregpontja, a Kék 3 a Piros 2 ellen, hiszen a maximin és a minimax egyenlő (5-tel).

## DOMINÁNS STRATÉGIÁK

Ha nincs nyeregpont, akkor vizsgáljuk meg a több stratégiával rendelkező játékos stratégiáit. Lehet, hogy ezek között vannak olyan nyilvánvalóan rosszak, amelyekkel semmiképpen sem érdemes dolgozni. Tegyük fel, hogy Kéknek van több stratégiája. Ha ezek közül kettőt kiválasztva azt találjuk, hogy az egyik megfelelő értékei mind „jobbak”, mint a másik megfelelő értékei, akkor az egyiket dominánsnak nevezzük, a másikat



pedig elhagyhatjuk a mátrixból.\* Ezt akkor is el lehet végezni, ha a „jobbik” éppen egyenlő a másikkal. Például, tekintsük a következő játékot:

|     |   | Piros |   |
|-----|---|-------|---|
|     |   | 1     | 2 |
| Kék | 1 | 2     | 5 |
|     | 2 | 4     | 3 |
|     | 3 | 3     | 6 |
|     | 4 | 5     | 4 |
|     | 5 | 4     | 4 |

Kék 1-et Kék 3-mal összehasonlítva láthatjuk, hogy

| Kék | 1 | 2 | 5 |
|-----|---|---|---|
|     | 3 | 3 | 6 |

Kék 3 domináns. Hasonlóan, Kék 2 és 4, valamint Kék 4 és 5 összehasonlításából adódik, hogy

| Kék | 2 | 4 | 3 |
|-----|---|---|---|
|     | 4 | 5 | 4 |

| Kék | 4 | 5 | 4 |
|-----|---|---|---|
|     | 5 | 4 | 4 |

\* Hiszen Piros bármely stratégiája esetén a domináns stratégia szerinti értékek nagyobbak, a másikat nem érdemes játszani. (A lektor.)



mindkét esetben Kék 4 a domináns. Így a játékot visszavezettük a

|     |   | Piros |   |
|-----|---|-------|---|
|     |   | 1     | 2 |
| Kék | 3 | 3     | 6 |
|     | 4 | 5     | 4 |

játék kiszámítására.

Hasonlóan, ha Pirosnak van 2-nél több stratégiája, akkor ha két oszlopot kiválasztva az egyik domináns, akkor azt az oszlopot elhagyhatjuk a mátrixból (emlékezzünk vissza arra, hogy Piros lehetőleg kis értékeket akar elérni).

A módszerrel a játékok nyilván jóval egyszerűbbé tehetők. Alkalmazhatjuk  $2 \times 2$ -es játékokra is, de ebben az esetben ha van domináns sor vagy oszlop, akkor van nyeregpont is.

## KEVERT STRATÉGIÁK

Ha nincs nyeregpont, akkor vizsgáljuk meg a több stratégiájú játékos stratégiáit, vannak-e köztük domináns stratégiák. Ha Kéknek van kettőnél több stratégiája, akkor a domináns stratégiákat meg kell tartanunk, ha Pirosnak van kettőnél több stratégiája, akkor a domináns stratégiákat el kell hagynunk. A megmaradó játékban (amely persze játszási módjában megegyezik az eredeti játékkal, de nem tartalmaz domináns stratégiákat) van olyan  $2 \times 2$ -es játék, amelynek megoldása a  $2 \times m$ -es játéknak is megoldása. Az ilyen tulajdonságú  $2 \times 2$ -es játék megkeresése elméletileg egyszerű, a gyakorlatban azonban nagyon unalmas lehet. Lássuk, hogyan kell eljárunk.

A módszer a következő: Válasszunk ki a  $2 \times 2$ -es játékok közül egyet. Próbáljuk ki ennek megoldását az eredeti játékon. Ha a két stratégiával rendelkező játékos kevert stratégiája sikerrel alkalmazható a több stratégiájú játékos összes stratégiája ellen, akkor megtaláltuk az eredeti játék megoldását. A „sikerrel alkalmazható” kifejezés azt jelenti, hogy a két-stratégiás játékos a másik összes stratégiájával szemben legalább olyan jó (gyakran jobb) eredményt ér el, mint a  $2 \times 2$ -es részjátékban szereplő stratégiák ellen.

Megpróbáljuk az előbbieket egy kicsit világosabbá tenni. Tudjuk, hogy ha egy  $2 \times 2$ -es játékban kevert stratégiával kell játszani, akkor az egyik



játékos bármelyik stratégiájával szemben állandó nyereséget biztosít a másik jó kevert stratégiája. Amikor erről volt szó, nem voltunk megelégedve ezzel. Azt mondtuk, hogy később jobb eredményeket tudunk majd felmutatni. Most eljött ennek az ideje. A  $2 \times m$ -es játékokban az egyik játékos nyeresége a másik játékos legjobb stratégiakeverékében szereplő egyes stratégiák ellen egyforma, a többi stratégiával szemben azonban kedvezőbb eredményt érhet el. A többi stratégiával szemben elérhető nyereség csak kivételes esetekben egyezik meg a legjobb kevert stratégiával szemben elérhető nyereséggel, általában kedvezőbb annál.

Talán néhány példával sikerül jobban megvilágítanunk az elmondottakat. Vizsgáljuk meg először a következő játékot:

|                   |   | Piros |   |    |   | Sor<br>minimum |
|-------------------|---|-------|---|----|---|----------------|
|                   |   | 1     | 2 | 3  | 4 |                |
| Kék               | 1 | 1     | 7 | 0  | 3 | 0*             |
|                   | 2 | 4     | 8 | -1 | 6 | -1             |
| Oszlop<br>maximum |   | 4     | 8 | 0* | 6 |                |

Itt a maximin és a minimax egyenlő (nullával), tehát a játéknak van nyereg-pontja. A játék igazságos, hiszen értéke nulla. A legjobb stratégia a Kék 1 a Piros 3 ellen.

Nézzünk egy másik példát:

|                   |   | Piros |     |   |   |    |    |   | Sorminimum |
|-------------------|---|-------|-----|---|---|----|----|---|------------|
|                   |   | 1     | 2   | 3 | 4 | 5  | 6  | 7 |            |
| Kék               | 1 | -6    | -1  | 1 | 4 | 7  | 4  | 3 | -6         |
|                   | 2 | 7     | -2  | 6 | 3 | -2 | -5 | 7 | -5*        |
| Oszlop<br>maximum |   | 7     | -1* | 6 | 4 | 7  | 4  | 7 |            |

Itt a maximin  $-5$ , a minimax  $-1$ , tehát nincs nyereg-pont. A Piros 3, 4, 5 és 7 stratégiák dominánsak a Piros 2 stratégia felett, tehát a továbbiakban



a játék vizsgálatára szorítkozhatunk. Ebben a  $2 \times 3$ -as játékban kell olyan  $2 \times 2$ -es játékot keresnünk, amelynek megoldása a  $2 \times 3$ -as játéknak — és így természetesen az eredeti játéknak is — megoldása.

|     |   | Piros |    |    |
|-----|---|-------|----|----|
|     |   | 1     | 2  | 6  |
| Kék | 1 | -6    | -1 | 4  |
|     | 2 | 7     | -2 | -5 |

Próbálkozzunk meg először a

|     |   | Piros |    |
|-----|---|-------|----|
|     |   | 1     | 2  |
| Kék | 1 | -6    | -1 |
|     | 2 | 7     | -2 |

játékkal. Ismert módszerünkkel meghatározhatjuk a megoldást: Kék stratégiáinak aránya 9:5, Piros stratégiáinak aránya 1:13. Ha Kék a 9:5 arányú stratégiakeveréket Piros 1 ellen alkalmazza, akkor a játék értéke

$$\frac{9 \cdot (-6) + 5 \cdot 7}{9 + 5} = -\frac{19}{14}.$$

A játék értéke persze akkor is ennyi, ha Kék a Piros 2 stratégia ellen játszik:

$$\frac{9 \cdot (-1) + 5 \cdot (-2)}{14} = -\frac{19}{14}.$$

A megoldás igazi próbája az, hogy milyen eredményre vezet Kék 9:5 arányú kevert stratégiája a Piros megmaradt stratégiája (Piros 6) ellen. Az eredménynek nagyobb (vagy egyenlőnek) kell lennie, mint  $-19/11$ . Ha csalódunk ebben a reményünkben, akkor félre kell tennünk a kapott meg-



oldást és másik  $2 \times 2$ -es játékot kell kiválasztanunk. Piros 6 ellen Kék a fenti stratégiájával

$$\frac{9 \cdot 4 + 5 \cdot (-5)}{9 + 5} = \frac{11}{14}$$

egységet nyer, ami egészen biztos hogy nagyobb, mint  $-19/14$ . Így Kék helyes stratégiája a  $9:5$  arányú, Piros helyes stratégiája pedig az  $1:13:0:0:0:0$  arányú stratégia-keverék. Példánkban az első kiválasztott  $2 \times 2$ -es részjáték alapján sikerült meghatároznunk az eredeti játék megoldását. Az élet azonban általában nem ilyen szép! Ha a játékot nem tudtuk volna néhány domináns stratégia eltüntetésével egyszerűbbé tenni, akkor  $\frac{7 \cdot 6}{2}$  számú  $2 \times 2$ -es részjáték lett volna, és kedvezőtlen esetben mind a  $21$ -et végig kellett volna vizsgálnunk ahhoz, hogy megtaláljuk a megoldást. ( $2 \times m$ -es játékokban  $\frac{m(m-1)}{2}$  számú  $2 \times 2$ -es részjáték van.)

## GRAFIKUS MEGOLDÁS

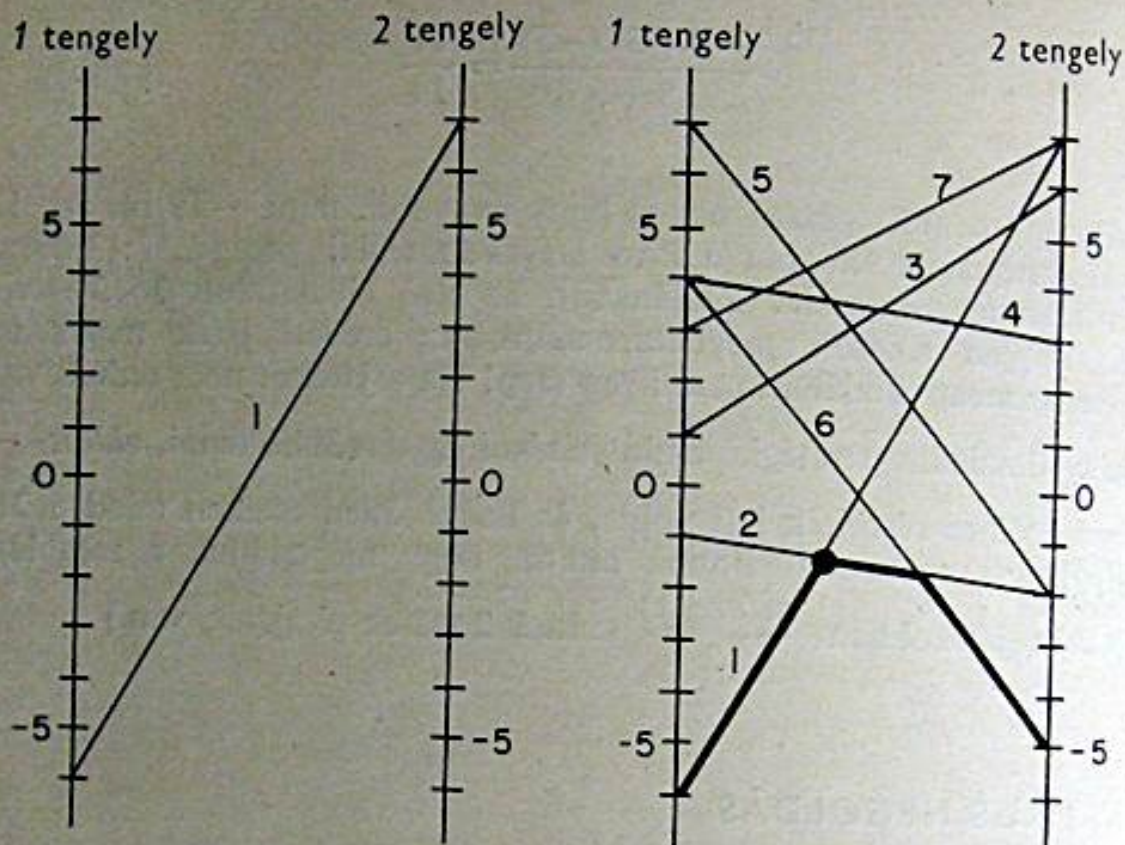
Nem szeretnénk különféle trükkökkel terhelni az Olvasókat, de nem tudjuk megállni, hogy legalább ezt az egyet ne írjuk le. Voltaképpen azért nem hagyhatjuk el ezt a fogást, mert a későbbiekben, a nagyobb játékok megoldásakor fontos szerepe lesz. Vegyük elő újra az előző példát:

|     |   | Piros |    |   |   |    |    |   |
|-----|---|-------|----|---|---|----|----|---|
|     |   | 1     | 2  | 3 | 4 | 5  | 6  | 7 |
| Kék | 1 | -6    | -1 | 1 | 4 | 7  | 4  | 3 |
|     | 2 | 7     | -2 | 6 | 3 | -2 | -5 | 7 |

Rajzoljunk két függőleges tengelyt. A bal oldali ábrán látható módon kössük össze a Piros 1 stratégia nyereségeinek megfelelő pontokat. Rajzoljuk be hasonlóképpen Piros összes stratégiáját. Így a jobb oldalon



látható ábrát kapjuk:



Látszólag teljes a zűrzavar, valójában azonban hasznos dolgot műveltünk. Az ábrán látható módon vastagítsuk meg a *legalsó* „utat”. Jelöljük meg a vastag vonal *legmagasabb* pontját. Piros jó kevert stratégiája az ebben a pontban találkozó vonalaknak megfelelő stratégiákon alapszik.

A grafikonon az 1 és 2 számú egyenesek elégítik ki a fenti feltételeket, tehát Piros jó kevert stratégiája a Piros 1 és Piros 2 stratégiák valamilyen arányú keveréke. Eredményünk eddig megegyezik az előző megoldás eredményével. Ha megtaláltuk ezt a két stratégiát, akkor már csak az van hátra, hogy abból a  $2 \times 2$ -es játékból, amelyben Pirosnak ezek a stratégiái szerepelnek, meghatározzuk a  $2 \times m$ -es játék megoldását. Ez az egyszerű módszer lehetővé teszi, hogy hosszas próbálgatások helyett egycsapásra megtalálhassuk azt a  $2 \times 2$ -es játékot, amelynek segítségével meghatározhatjuk a  $2 \times m$ -es játék megoldását.

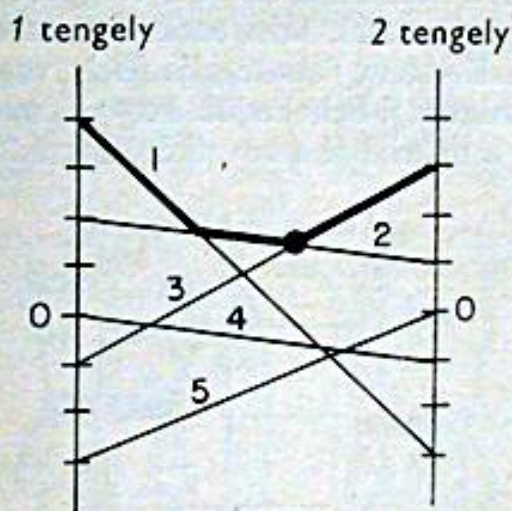
Ha Kéknek van több stratégiája, vagyis a játék  $m \times 2$ -es, akkor a játék megoldását adó  $2 \times 2$ -es játék kiválasztásának módszere eltér az előzőtől: a legmagasabban levő „utat” vastagítjuk meg, és annak legalacsonyabban lévő pontját keressük meg. Az így kapott ponton áthaladó vonalaknak megfelelő stratégiákat kell Kék jó kevert stratégiájában felhasználni.



Például a

|   |       |    |
|---|-------|----|
|   | Piros |    |
|   | 1     | 2  |
| 1 | 4     | -3 |
| 2 | 2     | 1  |
| 3 | -1    | 3  |
| 4 | 0     | -1 |
| 5 | -3    | 0  |

játék grafikonja a következő:



Így Kék kevert stratégiája a Kék 2 és Kék 3 stratégiákon alapul. Az eddig elmondottakat ismét néhány példával illusztráljuk.

#### 11. Példa. Játék a szavakkal

Goldsen és Kershaw természet adta hajlamuknál fogva gyakran vívnak egymással szócsatákat. Kershaw szerette volna ezt jövedelme gyarapítására felhasználni. Ezért egy alkalommal azt javasolta, hogy készítsenek szavakat a következő szabályok szerint:

— Tegyük fel, hogy te az  $a$  vagy  $i$  betűt választhatod, én pedig téled függetlenül az  $f$ ,  $t$  és  $x$  betűk közül választhatok. Ha a két kiválasztott betűből értelmes szót lehet alkotni, akkor 1 dollárt fizetek neked. Ha a kapott szó fő-



név vagy névmás, akkor ezen felül 3 dollár jutalmat is kapsz. Ha a kiválasztott betűkből nem tudunk értelmes szót alkotni, akkor 2 dollárt fizetsz.\*

Goldsen a következőt válaszolta:

— Sosem játszottam ilyesmit anélkül, hogy ne elemeztem volna a játék-elmélet alapján, hogy milyen esélyeim vannak. Várj egy pillanatra!

Felírta a nyereségmátrixot:

|                |     | Kershaw |     |     | Sorminimum |
|----------------|-----|---------|-----|-----|------------|
|                |     | $f$     | $t$ | $x$ |            |
| Goldsen        | $a$ | -2      | 1   | 4   | -2*        |
|                | $i$ | 1       | 4   | -2  | -2*        |
| Oszlop maximum |     | 1*      | 4   | 4   |            |

Először nyeregpontot keresett, de úgy találta, hogy a minimax nem egyenlő a maximinnal, tehát a mátrixnak nincs nyeregpontja. Így Goldsen kénytelen jó kevert stratégiát keresni. Mindenekelőtt észrevette, hogy Kershaw  $t$  stratégiája domináns Kershaw  $f$  stratégiája felett, vagyis Kershaw számára a  $t$  stratégia rosszabb, mint az  $f$ . Feltehetjük, hogy Kershaw nem a  $t$  stratégiát fogja alkalmazni. Így a mátrixból a következő maradt meg:

|                |     | Kershaw |     | Goldsen aránya |
|----------------|-----|---------|-----|----------------|
|                |     | $f$     | $x$ |                |
| Goldsen        | $a$ | -2      | 4   | 3              |
|                | $i$ | 1       | -2  | 6              |
| Kershaw aránya |     | 6       | 3   |                |

Ebből kiszámíthatjuk, hogy Goldsen jó kevert stratégiája az, ha az  $a$  és  $i$  betűket 3:6 (vagyis 1:2) arányban választja. Kershaw stratégiáinak helyes aránya 6:0:3, vagyis kétszer annyi  $f$ -et kell alkalmaznia, mint  $x$ -et és sosem szabad  $t$ -t mondania.

Goldsen még mindig nem döntötte el, hogy játsszon-e.

— Várj csak, cimbor! Még kiszámítom a játék értékét — mormogta. — Valami paramétert vagy ahhoz hasonlót kell keresnem. No, lássuk: ha  $f$ -et

\* A nyereségmátrixot annak alapján határozhatjuk meg, hogy a fenti betűkből a következő angol szavak készíthetők:  $at$  — nál, -nél,  $ax$  — fejsze,  $if$  — ha,  $it$  — ő. (A fordító.)



mond, akkor átlagos nyereményem  $\frac{1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1}{3} = 0$  — nem sok, de nem is végzetes. Ha  $t$ -t mond, akkor  $\frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 4}{3} = 3$  dollárt kapok. Remélem, ezt fogja mondani. Ha  $x$ -et mond, akkor  $\frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot (-2)}{3} = 0$  dollárt kapok. Hümm... ez felettébb igazságos játéknak látszik. Nagy meglepetést okoztál nekem. Játshatunk?

## 12. Példa. Sportfelszerelés

Az amerikai légierő két tisztje — nevezzük őket Joenak és Billnek, bár nem ez az igazi nevük — sportfelszerelést vásárol.\* A felszerelésben néhány csomag Pall Mall cigaretta, egy revolver, benne egy töltény és az amerikai rulett szabályai találhatók. (A példával kapcsolatban egyébként az a legérdekesebb felfedezésünk, hogy a játékot az oroszok francia rulettnek, a franciák spanyol rulettnek nevezik stb.\*\*)

A játék elején mindkét tiszt egy csomag cigarettát tesz a bankba. Joe kezd. Kétféleképpen játszhat: vagy hozzátesz a bankhoz két csomag ciga-



\* A fordítás itt kissé eltér az eredeti szövegtől. (A fordító.)

\*\* A jelenség teljesen általános, pl. amit a frankfurtiak bécsinek neveznek, azt a bécsiek frankfurtinak nevezik.



rettát és átadja a revolvert Billnek, vagy egy csomag cigarettát tesz a bankba és saját halántékának szegezve kipróbálja a revolvert. Ezután találomra elfordítja a tölténytárat és — ha isten is úgy akarja — átadja a revolvert Billnek. Ha Bill megkapta a revolvert, akkor két lehetősége van: vagy félreteszi és két csomag cigarettát tesz a bankba, vagy egy csomag cigarettát tesz a bankba és kipróbálja a revolvert. A játéknak vége van. Ha mindketten életben maradtak, akkor megfelezik a bankot. Ha az egyik meghalt, akkor a másiké a bank.

Joének két stratégiája van: (1) továbbadja a revolvert, vagy (2) kipróbálja. Bill stratégiái a következők: (1) Joe döntésétől függetlenül félreteszi a revolvert, (2) Joetól függetlenül kipróbálja azt, (3) azt teszi, amit Joe, (4) az ellenkezőjét teszi annak, amit Joe tett.

A nyereségmátrix kiszámítása elemi, de olyan hosszadalmas, hogy leírni és elolvasni is unalmas volna. Ezért nagyvonalúan\* csak az eredményt közöljük\*\*:

\* A nagyvonalúság főleg abban jelentkezik, hogy a szerző nem közli a cigaretta és az élet közötti átszámítási arányt. Erre azonban úgy látszik nincs is szükség, mert a nyereségmátrix kiszámításánál nem is vettük figyelembe a halál által okozott veszteséget, csak azt, hogy a halottól elnyerték a cigarettát. (A lektor.)

\*\* Joggal érezheti az Olvasó, hogy tisztességtelenül járnak el vele szemben. Azt ígértük, hogy a könyvben csak az elemi aritmetikát alkalmazzuk, és ennek ellenére már többször magasabb ismeretekre például a valószínűségszámításra alapoztuk mondanivalónkat. A játékelmélettel kapcsolatban eddig csak a matematikusok szűk rétege számára érthető közlemények jelentek meg. Az absztrakciónak és a modellalkotásnak az a folyamata, amely a valóságos világtól a játékmátrixokig vezet, az adott problémával kapcsolatban mély ismereteket, sok matematikai találékonyságot, leleményességet és gyakran éjszaka nyúló munkát igényel. Ezeket a problémákat könyvünkben így oldjuk meg: A játékelmélet szempontjait, módszereit vizsgáljuk, szigorúan aritmetikai eljárásokat mutatunk be. Azokban a példákban, ahol a játék mátrixát egyszerű következtetéssel le lehet vezetni, levezetjük. Ahol nem, ott (titokban) olyan módszereket használunk, amiket szükséges és csak az eredményt, a mátrixot közöljük.

|                |   | Joe            |                  |                  |
|----------------|---|----------------|------------------|------------------|
|                |   | 1              | 2                | Sorminimum       |
| Bill           | 1 | 0              | $-\frac{1}{12}$  | $-\frac{1}{12}$  |
|                | 2 | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{18}$   | $\frac{1}{18}^*$ |
|                | 3 | 0              | $\frac{1}{18}$   | 0                |
|                | 4 | $\frac{1}{12}$ | $-\frac{1}{12}$  | $-\frac{1}{12}$  |
| Oszlop maximum |   | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{18}^*$ |                  |



A maximin és a minimax egyenlő, tehát a játéknak van nyeregpontja, a Joe 2 és Bill 2 stratégiáknál. Így mindkét játékos számára az a jó stratégia, ha kipróbálja a revolvért. A játék Joeval szemben igazságtalan\*.

Ez a játék kicsit különbözik az eddigi  $2 \times m$ -es játékoktól, ugyanis amikor a játékosoknak dönteniük kell, akkor az elmúlt eseményekről már mindent tudnak. A matematikusok bebizonyították, hogy az ilyen, teljes információ

\* A nyereségmátrix elemeinek meghatározása a következőképpen történt:  
A revolver tölténytárában 6 hely van, ezek valamelyikén található a töltény. Így a revolvért kipróbálva a halál valószínűsége  $\frac{1}{6}$ , az életben maradás valószínűsége  $\frac{5}{6}$ . A nyereségmátrixban az egység egy csomag cigaretta. A nyereségértékek meghatározását néhány példán mutatjuk be.

A1—B1 (egyik sem lö). Mindketten három csomag cigarettát tesznek a bankba (egyét a játék elején, kettőt akkor, amikor továbbadják a revolvért.) A bankban így hat csomag cigaretta van, mindegyikük a felét kapja, tehát három csomagot. Mivel  $3 - 3 = 0$ , a nyereség ebben az esetben nulla.

A2—B1 (A lö, B nem). B három, A két csomag cigarettát tett a bankba, ott tehát öt csomag cigaretta van. Ha A meghal (ennek  $\frac{1}{6}$  a valószínűsége), akkor B öt csomag cigarettát kap, ha A életben marad (ennek  $\frac{5}{6}$  a valószínűsége), akkor B  $\frac{5}{2}$  csomag cigarettát kap. B nyeresége így

$$\frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{2} - 3 = -\frac{1}{12}$$

csomag cigaretta.

A1—B2 (A nem lö, B lö). A bankban öt csomag cigaretta van. Ha B meghal (ennek  $\frac{1}{6}$  a valószínűsége), akkor semmit sem kap, ha életben marad (ennek  $\frac{5}{6}$  a valószínűsége), akkor  $\frac{5}{2}$  csomag cigarettát kap. B várható nyeresége így

$$\frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{12}$$

csomag cigaretta.

A2—B2 (mindketten lönek). A bankban négy csomag cigaretta van. Ha A életben marad (ennek  $\frac{5}{6}$  a valószínűsége), akkor B vagy meghal vagy életben marad. Az első esetben (A életben marad, B meghal, ennek valószínűsége  $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$ ) B semmit sem kap. A második esetben (ennek valószínűsége  $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}$ ) B két csomag cigarettát kap. B várható nyeresége tehát

$$\frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{5}{6} \left( \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{5}{6} \cdot 2 \right) - 2 = \frac{1}{18}$$

csomag cigaretta. A többi elem meghatározása is hasonlóképpen történik. (A fordító.)



alapuló játékoknak mindig van nyeregpontjuk, tehát nem meglepő, hogy példánkban is találtunk nyeregpont megoldást. Az ilyen játékoknak lehet jó kevert stratégián alapuló megoldásuk is.

A sakk is teljes információn alapuló játék. Így a sakkban is van jó tiszta stratégia és az legalább olyan jó, mint a legjobb kevert stratégia. A tiszta stratégiát nem ismerjük, azt sem tudjuk, hogy világos győzelmét, sötét győzelmét jelenti vagy döntetlent biztosít-e. Az elemzés szempontjából a játék túl nagy és túl bonyolult. A stratégiák közvetlen kiszámítása lehetetlen, hiszen a becslések szerint számuk olyan nagy, hogy a számjegyek leírásához egy emberélet sem volna elegendő. Ha ismernénk a megoldást, akkor a sakkjáték minden érdekessége egyszerre eltűnne.

A bridzs és a póker — amelyek elemzésétől szintén messze van az elmélet — nem teljes információn alapszik. A véletlen események kimenetelét — a kártyalapok kiosztását — a játékosok csak részben ismerik. A jó játékhoz kétségkívül kevert stratégiára van szükség.

### 13. Példa. Hi-Fi erősítő

A Gunning & Kappler cég olyan erősítőket gyárt, amelyek 10 000 Hz felett is kifogástalanul működnek. A készülék minőségét nagymértékben befolyásolja egy nehezen hozzáférhető, kis kondenzátor. A kondenzátor ára 1 dollár, de ha elromlik, akkor a garanciális javítás a cégnek átlagosan 10 dollárjába kerül.

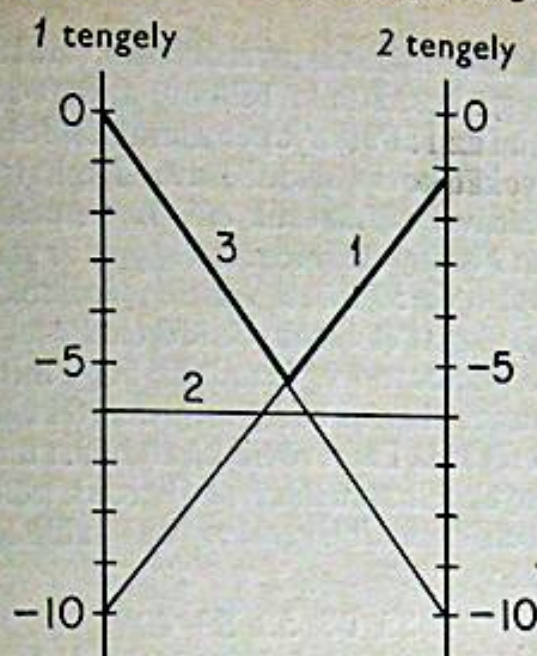
A következő lehetőségei vannak a cégnek: 6 dollárért olyan, jobb minőségű kondenzátort vásárolhatnak, amelyre garancia is van, tehát az esetleges javításra a cégnek nem kell költenie. Másik lehetőségük az, hogy 10 dollárért olyan kondenzátort szereznek be, amelynek meghibásodása esetén a kondenzátort gyártó cég vállalja a javítás költségeit és visszatéríti a kondenzátor árát.

A feladat a következő  $3 \times 2$ -es mátrixba írható fel:

|                   |                       | Természet |               |
|-------------------|-----------------------|-----------|---------------|
|                   |                       | Elromlik  | Nem romlik el |
| Gunning & Kappler | (1) olcsó kondenzátor | -10       | -1            |
|                   | (2) 6 dolláros        | -6        | -6            |
|                   | (3) 10 dolláros       | 0         | -10           |



Grafikus úton (vagy ha jobban tetszik, lehet próbálgatással is)



azt kapjuk, hogy a jó kevert stratégia az (1) és (3) stratégiákon alapszik. Számítsuk ki a gyakoriságokat:

|                    |   | Természet |               | Gunning<br>Kappler<br>aránya |
|--------------------|---|-----------|---------------|------------------------------|
|                    |   | Elromlik  | Nem romlik el |                              |
| Gunning<br>Kappler | 1 | -10       | -1            | 10                           |
|                    | 3 | 0         | -10           | 9                            |

A cég stratégiáinak aránya a  $2 \times 2$ -es játékban 10:9, tehát az eredetiben 10:0:9. Így véletlen események alapján kell eldönteniük, hogy az 1 dolláros vagy a 10 dolláros kondenzátort szerelik-e be. 6 dolláros kondenzátort nem érdemes vásárolniuk.

A játék értéke

$$\frac{10 \cdot (-10) + 9 \cdot 0}{10 + 9} = -5 \frac{5}{19}$$

dollár. Így a kondenzátor a cégnek átlagosan körülbelül 5 dollár 26 centjébe kerül\*.

\* Meg kell jegyeznünk, ha tudjuk tapasztalatból, hogy a kondenzátor ritkán romlik el, pl. átlagosan minden 4 esetből, csak egyszer, akkor könnyen kiszámíthatóan az első stratégiát kell alkalmazni. Az érték ekkor ugyanis  $\frac{-10 \cdot 1 + (-1) \cdot 3}{4} = -3 \frac{1}{4}$ . (A lektor.)



## VÉLETLEN ESEMÉNYEK FELHASZNÁLÁSA

A kevert stratégiák alkalmazásához szükséges valószínűségi arányok előállításáról eddig keveset beszéltünk. Néhány arányt azonban könnyen elő tudunk állítani. Például az 1:1 arányt pénzdarab feldobásával, az 1:5, a 2:4, a 4:2 és az 5:1 arányokat kocka feldobásával kaphatjuk. Bizonyos arányokat kártyalapok húzásával állíthatunk elő. Ilyen például az 1:12 (pl. ász vagy nem ász) és a 4:9 arány (számozott vagy nem számozott lap). Az óra másodpercmutatójával 0 és 59 közti véletlen számokat kaphatunk — ha eltakarjuk az óra számlapját és bizonyos idő elteltével újra megnézzük, akkor nem tudjuk előre pontosan megmondani, hogy mit mutat a másodpercmutató. A játékokban azonban az eddig megismerteknél jóval többféle arány előállítására van szükségünk. Ezért rövid kirándulást teszünk erre a területre.

Ha véletlen események felhasználásával akarunk különféle arányokat létrehozni, akkor véletlen számtáblázatokra van szükségünk. Íme egy ilyen számtáblázat egy része:

|    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|
| 35 | 07 | 53 | 39 | 49 |
| 56 | 62 | 33 | 44 | 42 |
| 36 | 40 | 98 | 32 | 32 |
| 57 | 62 | 05 | 26 | 06 |
| 07 | 39 | 93 | 74 | 08 |
| 68 | 98 | 00 | 53 | 39 |
| 14 | 45 | 40 | 45 | 04 |
| 07 | 48 | 18 | 38 | 28 |
| 27 | 49 | 99 | 87 | 48 |
| 35 | 90 | 29 | 13 | 86 |

A számokat nem elvi okokból, hanem csupán a jobb áttekinthetőség kedvéért csoportosítottuk kettesével. A táblázatot akárhonnan elkezdhetjük olvasni, balra, jobbra, fel vagy le, egyesével, kettesével, vagy hármassal csoportosítva a számjegyeket, az eredmény mindig ugyanaz: értelmetlen, váratlan, véletlenszerű számsorozat. Bár az ilyen táblázatok sok gondolkodás eredményeképpen születnek meg, feltesszük, hogy semmiféle gondolatot nem tartalmaznak. (Táblázatunk egy elektronikus számítógéppel előállított, egymillió számjegyet tartalmazó táblázat része. Könyvünk függelékében a véletlen számok táblázatának egy nagyobb része is megtalálható.)

Nem valószínű, hogy fejből valóban véletlen számsorozatot tudunk mondani. Szokásaink, előítéleteink, a számok szabályosságai stb. mind a véletlen ellen vannak. Csak az írhat fel valóban véletlen számsorozatot, aki (a szó orvosi értelmében) tökéletes idióta.

Hogyan állíthatunk elő a táblázat segítségével különböző arányokat? Ve-



gyük példának az 5:2 arányt. Üssük fel a táblázatot akármelyik oldalon és bökjünk rá akármelyik számra. Ezzel indulunk. Tegyük fel, hogy az első oldal nyolcadik oszlopának kilencedik számjegyét választottuk. Ha ez a számjegy 0, 1, 2, 3 vagy 4, akkor az 1. stratégiát, ha 5 vagy 6, akkor a 2. stratégiát alkalmazzuk. Ha a számjegy 7, 8 vagy 9, akkor valamilyen meghatározott irányban továbbmegyünk a táblázatban, például a közvetlenül alatta vagy a közvetlenül mellette álló számjegyet választjuk (ha az a szám is 7, 8 vagy 9, akkor újra továbblépünk). A következő játékhoz úgy választunk stratégiát, hogy továbbhaladunk a táblázatban. Például az előző stratégiának megfelelő szám alatti számot vesszük és újra az előbb leírt módon határozzuk meg, hogy melyik stratégiával dolgozunk. Ha a kívánt arány 85:9, akkor a számjegyekből párokat alkotunk. A 00 és 84 közötti párok az 1. stratégiának, a 85 és 93 közötti számok a 2. stratégiának felelnek meg. A 94 és 99 közötti számokat mellőzzük és továbblépünk.

Néha érdemes némiképp a módszert módosítani. Például, ha a 7:4 arányt akarjuk előállítani, akkor kétjegyű számokat kell használnunk, de a 11 és 99 közötti számokat át kell lépnünk és így sok időt veszünk. Az időmilliomosoknak persze így is jó a módszer, mi azonban változtatást hajtunk végre. A legnagyobb kétjegyű számot, 99-et elosztjuk a gyakoriságok összegével, 11-gyel. A hányados pontosan 9, általánosságban azonban egy egész szám és egy valódi tört összege. Szorozzuk meg a gyakoriságokat ezzel az egész számmal:  $7 \cdot 9 = 63$  és  $4 \cdot 9 = 36$ . A 7:4 arányt 63:36 alakban felírva már gazdaságosabban használhatjuk a táblázatot. Ha 00 és 62 közti számot találunk, akkor az 1. stratégiát, ha 63 és 98 közti számot találunk, akkor a 2. stratégiát alkalmazzuk. A 99-et mellőzzük és továbblépünk.

## A $2 \times m$ -ES MÓDSZER ÖSSZEFOGLALÁSA

Mielőtt rászabadítjuk a feladatokat az Olvasóra, röviden összefoglaljuk a  $2 \times m$ -es játékok megoldási módszerét. Ebből a célból megoldjuk a

|     |   | Piros |    |   |   |
|-----|---|-------|----|---|---|
|     |   | 1     | 2  | 3 | 4 |
| Kék | 1 | -4    | -2 | 3 | 4 |
|     | 2 | 6     | 5  | 0 | 1 |

játékot. Először megvizsgáljuk, hogy van-e nyeregpont. Keressük meg a

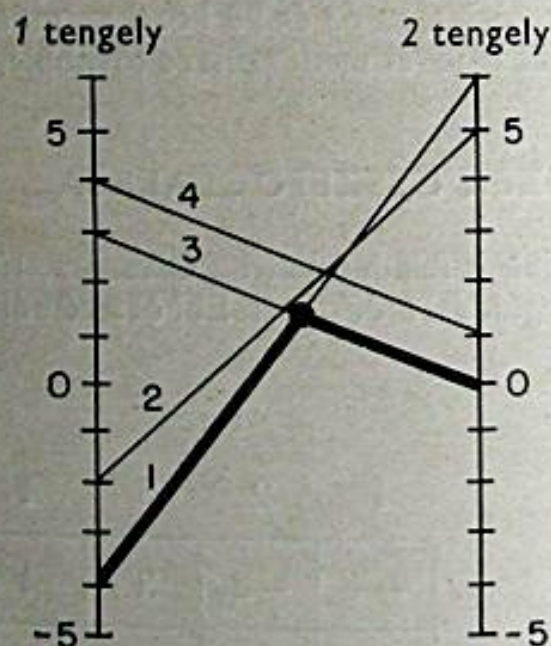


maximint és a minimaxot:

|                |   | Piros |    |    |   | Sorminimum |
|----------------|---|-------|----|----|---|------------|
|                |   | 1     | 2  | 3  | 4 |            |
| Kék            | 1 | -4    | -2 | 3  | 4 | -4         |
|                | 2 | 6     | 5  | 0  | 1 | 0*         |
| Oszlop maximum |   | 6     | 5  | 3* | 4 |            |

A maximin 3, a minimax 0, tehát nincs nyeregpont. Tegyük félre eddigi munkánkat.

A Piros 3 stratégia jobb, mint a Piros 4, tehát az utóbbit elhagyhatjuk a mátrixból. Ha grafikus úton keressük a legjobb stratégiapár elemeit, akkor a domináns stratégiák automatikusan eltűnnek. Piros négy stratégiáját felrajzolva a következő ábrát kapjuk:



Az alsó burkolóegyenesek legmagasabb pontja a Piros 1 és Piros 3 stratégiák metszéspontja, tehát ezek szerepelnek majd a legjobb kevert stratégiák között.



giában. Az őket tartalmazó részjáték a következő:

|     |   | Piros |   |
|-----|---|-------|---|
|     |   | 1     | 3 |
| Kék | 1 | -4    | 3 |
|     | 2 | 6     | 0 |

A részjátéknak nincs nyeregpontja, tehát kevert stratégiát kell keresnünk. Kék stratégiáinak gyakoriságát a

| Kék | 1 | -7 |
|-----|---|----|
|     | 2 | 6  |

mátrix, Piros stratégiáinak gyakoriságát a

|     |   | Piros |   |
|-----|---|-------|---|
|     |   | 1     | 3 |
| Kék | 1 | -10   | 3 |
|     | 2 | 6     | 0 |

mátrix alapján számíthatjuk ki. Kéknek 6:7, Pirosnak 3:10 arányban kell stratégiáit kevernie. Az eredeti,  $2 \times 4$ -es játékhoz visszatérve azt kapjuk, hogy Kék stratégiáinak aránya 6:7, Piros stratégiáinak aránya 3:0:10:0.

A játék értékét úgy határozhatjuk meg, hogy Kék jó kevert stratégiáját Piros jó kevert stratégiájának valamelyik stratégiája, tehát a Piros 1 vagy a Piros 3 ellen alkalmazzuk. Piros 1 stratégiával a játék értéke

$$\frac{6 \cdot (-4) + 7 \cdot 6}{6 + 7} = \frac{18}{13}.$$

### Feladatok

Határozzuk meg a következő játékok gyakoriságait és értékeit.



1.

|     |   | Piros |    |    |
|-----|---|-------|----|----|
|     |   | 1     | 2  | 3  |
| Kék | 1 | 7     | 0  | 3  |
|     | 2 | 2     | -1 | -6 |

2.

|     |   | Piros |    |    |    |
|-----|---|-------|----|----|----|
|     |   | 1     | 2  | 3  | 4  |
| Kék | 1 | -2    | -6 | -5 | -1 |
|     | 2 | -3    | -7 | -6 | -2 |

3.

|     |   | Piros |   |   |
|-----|---|-------|---|---|
|     |   | 1     | 2 | 3 |
| Kék | 1 | 4     | 0 | 2 |
|     | 2 | 6     | 7 | 1 |

4.

|     |   | Piros |    |    |    |    |    |    |    |
|-----|---|-------|----|----|----|----|----|----|----|
|     |   | 1     | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  |
| Kék | 1 | 11    | 18 | 24 | 30 | 24 | 20 | 21 | 23 |
|     | 2 | 24    | 30 | 24 | 23 | 21 | 17 | 18 | 20 |

5.

|     |   | Piros |   |   |   |
|-----|---|-------|---|---|---|
|     |   | 1     | 2 | 3 | 4 |
| Kék | 1 | 2     | 2 | 3 | 4 |
|     | 2 | 4     | 3 | 2 | 2 |



6.

|     |   | Piros |    |    |   |
|-----|---|-------|----|----|---|
|     |   | 1     | 2  | 3  | 4 |
| Kék | 1 | 10    | 7  | 11 | 0 |
|     | 2 | -8    | -2 | -9 | 1 |

7.

|     |   | Piros |    |   |   |   |
|-----|---|-------|----|---|---|---|
|     |   | 1     | 2  | 3 | 4 | 5 |
| Kék | 1 | 5     | -2 | 3 | 7 | 0 |
|     | 2 | 0     | 5  | 2 | 2 | 6 |

8.

|     |   | Piros |    |    |    |     |
|-----|---|-------|----|----|----|-----|
|     |   | 1     | 2  | 3  | 4  | 5   |
| Kék | 1 | 1     | -3 | 5  | -7 | 9   |
|     | 2 | -2    | 4  | -6 | 8  | -10 |

9.

|     |   | Piros |    |    |    |    |
|-----|---|-------|----|----|----|----|
|     |   | 1     | 2  | 3  | 4  | 5  |
| Kék | 1 | -1    | 3  | -5 | 7  | -9 |
|     | 2 | 2     | -4 | 6  | -8 | 10 |

10.

|     |   | Piros |    |    |    |    |
|-----|---|-------|----|----|----|----|
|     |   | 1     | 2  | 3  | 4  | 5  |
| Kék | 1 | 9     | -5 | 7  | 1  | -3 |
|     | 2 | -10   | 4  | -8 | -6 | 2  |



11.

Piros

|     |   | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-----|---|---|---|---|---|
| Kék | 1 | 8 | 0 | 6 | 7 |
|     | 2 | 3 | 6 | 3 | 1 |

12.

Piros

|     |   | 1 | 2 | 3 |
|-----|---|---|---|---|
| Kék | 1 | 4 | 6 | 0 |
|     | 2 | 3 | 0 | 7 |

13.

Piros

|     |   | 1  | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-----|---|----|---|---|---|---|---|
| Kék | 1 | 0  | 9 | 8 | 7 | 4 | 2 |
|     | 2 | 10 | 1 | 2 | 3 | 6 | 8 |

14.

Piros

|     |   | 1 | 2  |
|-----|---|---|----|
| Kék | 1 | 1 | 3  |
|     | 2 | 5 | 7  |
|     | 3 | 9 | 11 |



15.

Piros

1 2

|       |   |   |
|-------|---|---|
| 1     | 1 | 5 |
| 2     | 2 | 4 |
| Kék 3 | 3 | 3 |
| 4     | 4 | 2 |
| 5     | 5 | 1 |

16.

Piros

1 2

|       |    |     |
|-------|----|-----|
| 1     | -1 | -3  |
| Kék 2 | -5 | -7  |
| 3     | -9 | -11 |

17.

Piros

1 2

|       |    |    |
|-------|----|----|
| 1     | -2 | 3  |
| Kék 2 | 3  | -2 |
| 3     | 0  | 0  |

18.

Piros

1 2

|       |    |    |
|-------|----|----|
| 1     | -2 | 3  |
| Kék 2 | 3  | -2 |
| 3     | 1  | 1  |

19.

Piros

1 2

|       |    |    |
|-------|----|----|
| 1     | -1 | 5  |
| 2     | -3 | 1  |
| Kék 3 | 0  | -3 |
| 4     | -3 | 0  |
| 5     | 1  | -3 |
| 6     | 5  | -1 |

20.

Piros

1 2

|       |   |   |
|-------|---|---|
| 1     | 9 | 1 |
| 2     | 7 | 5 |
| Kék 3 | 8 | 3 |
| 4     | 5 | 9 |
| 5     | 6 | 7 |



*Háromstratégias játékok*ELSŐ FEJEZET:  $3 \times 3$ -as játékok

## MORALIZÁLÓ MEGJEGYZÉSEK

Ha csupán az aritmetikára építhetünk, akkor a nagyobb (például  $10 \times 10$ -es) játékok megoldását csak unalmasan lehet elmagyarázni. Feladatunk körülbelül olyan nehéz, mint ha egy értelmes, de analfabéta gyereknek egy másik analfabéta gyerekkel telefonon szeretnénk elmagyaráztatni, hogyan kell adott rímekkel szonettet írni. A  $3 \times 3$ -as játékok megoldása viszont ahhoz hasonlítható, hogyan lehet a fenti körülmények között a CICA szó leírását megtanítani. Reméljük, hogy ezzel a megjegyzéssel sem a szerzőt, sem az Olvasót nem riasztottuk el attól, hogy közösen nekifogjunk a háromstratégias játékok tanulmányozásának.

Mielőtt elkezdjük a  $3 \times 3$ -as játékok tárgyalását, röviden áttekintjük problémamegoldási technikánkat. A konfliktusokban többféle cselekvési mód mellett dönthetünk. Hogyan kell az ilyen helyzetekben a játékelméletet alkalmazni?

Mindenekelőtt felsoroljuk a magunk és az ellenfél számára egyidejűleg lehetséges összes cselekvési módot. Ezt — ha lehetséges — a véletlen események figyelembevételével kell megtennünk. Ez a lépés gyakran megoldhatatlan, ezért rendszerint csak a lényegesebb cselekvési módokat tudjuk figyelembe venni. Matematikai modellt alkotunk, csak annyi tényezőt veszünk figyelembe, amennyinek elemzésére képesek vagyunk. Newton is sok tényezőtől elvonatkoztatva állította fel elméletét: nem vette számításba, hogy a bolygók lapult szferoid alakúak, hogy némelyiken hegyek, legalább az egyiken fák és természetek és egyéb kellemes és kellemetlen dolgok vannak. Általánosságban nehéz eldönteni, hogy adott helyzetben milyen tényezőktől tekinthetünk el. A modellalkotásnak gyakorlatilag akkor van jelentősége, ha a vizsgált probléma megoldásában segítséget nyújt.

A stratégiák felsorolása után stratégiapáronként számítással, becsléssel vagy sejtéssel meg kell határoznunk a nyereségértékeket. Néha maguk a játékszabályai tartalmazzák ezeket az értékeket. Néha tudományos alapokon, többnyire a valószínűségszámítás segítségével lehet meghatározni a nyeresé-



geket. Sok esetben azonban becslésekre, szubjektív ítéletekre vagyunk kénytelenek szorítkozni, de az ilyen játékokban is számszerűen kell megadnunk a nyereségeket. (Ezzel a kérdéssel még több példában, valamint az V. rész mértékekről szóló részében foglalkozunk bővebben.)

Ha a nyereségeket ismerjük, akkor felírhatjuk a játék mátrixát és elkezdhetjük elemezni. Az elemzés célja a legjobb játszási mód meghatározása. Ezen annak megállapítását értjük, hogy milyen nyereségre vagy veszteségre számíthatunk akkor, ha jól játszunk és ellenfelünk is jól játszik. A „hogyan kell játszani” ugyanazt jelenti, mint a „melyik stratégiát kell alkalmazni” vagy a „melyik stratégiák alkalmazása között kell alkalmasan választott véletlen események felhasználásával dönteni”.

Térjünk vissza rögeszménkhez. Némelyik  $3 \times 3$ -as játék könnyen megoldható, némelyik nem. Az új típusú játékokhoz új megoldási módszereket adunk, állandó munkára kárhoztatva az Olvasót, akit ebben a szenvedésben csak a biztosan létező megoldás tudata vigasztalhat.\*

Szerencsénkre, sok módszer azonos a  $2 \times 2$ -eseknél megismert módszerekkel. Szerencsétlenségünkre azonban a többi módszert elemi iskolás módon be kell magolnunk. Ez szomorú, de könyvünk elemi jellege miatt elkerülhetetlen. Reméljük, még így is hasznosak lesznek, hiszen sok matematikai gondolatot rejtenek magukban. Mellesleg kevesen vannak, akik emlékeznek például arra, miért úgy kell négyzetre emelni, ahogy tesszük. E sorok írója is csak az eljárásra emlékszik, az indoklásra nem.

## NYEREGPONTOK

Először nyeregpontot keresünk. Ha szerencsénk van, találunk is. Az eljárás rövid és fájdalommentes. Példaként vizsgáljuk meg a következő játékot:

|     |   | Piros |    |    |
|-----|---|-------|----|----|
|     |   | 1     | 2  | 3  |
| Kék | 1 | 3     | 0  | 2  |
|     | 2 | -4    | -1 | 3  |
|     | 3 | 2     | -2 | -1 |

Szaladjunk végig a mátrixon, keressük meg a sorminimumokat, jelöljük meg

\* Lehet, hogy a könyv e részének olvasása közben az Olvasó már szükségét érzi annak, hogy fellapozza a VI. részt és megismerkedjen a játékok egy általános megoldási módszerével.



ezek legnagyobbikát, aztán keressük meg az oszlopmaximumok minimumát:

|                |   | Piros |    |    | Sorminimum |
|----------------|---|-------|----|----|------------|
|                |   | 1     | 2  | 3  |            |
| Kék            | 1 | 3     | 0  | 2  | 0*         |
|                | 2 | -4    | -1 | 3  | -4         |
|                | 3 | 2     | -2 | -1 | -2         |
| Oszlop maximum |   | 3     | 0* | 3  |            |

Ha a két szám egyenlő — és itt egyenlő —, akkor a játékot megoldottuk, megtaláltuk a játékosok legjobb stratégiáját. Ha van nyeregpont, akkor tiszta stratégia — példánkban a Kék 1, ill. a Piros 2 stratégia — a legjobb. Továbbá, a csillaggal megjelölt számok a játék értékével egyenlők. Pédánkban ez a szám nulla, ami azt jelenti, hogy a játék igazságos. Ha mindketten a jó stratégia alapján játszanak, akkor egyiküket sem érheti kár. Ha azonban egyikük lelép az erény útjáról, míg a másik kitart a nyeregpont stratégia mellett, akkor a virtuskodó biztosan veszít.

## DOMINÁNS STRATÉGIÁK

Nézzük a következő játékot:

|                |   | Piros |   |    | Sorminimum |
|----------------|---|-------|---|----|------------|
|                |   | 1     | 2 | 3  |            |
| Kék            | 1 | 3     | 0 | 2  | 0          |
|                | 2 | 4     | 5 | 1  | 1*         |
|                | 3 | 2     | 3 | -1 | -1         |
| Oszlop maximum |   | 4     | 5 | 2* |            |

Ezek a számok is olyanok, mint az előbbieket, próbáljunk meg most is nyeregpontot keresni. Itt persze nincs nyeregpont: a maximin 1, a minimax 2, tehát eddigi munkánknak semmi eredménye sincs. Pontosabban, valami eredmény



mégiscsak van: a maximin és a minimax értéke alapján tudjuk, hogy a játék értéke 1 és 2 között van.

Keressünk domináns stratégiákat. Van-e Kéknek (vagy Pirosnak) olyan stratégiája, amit ostobaság volna alkalmaznia?

Kék azt szeretné elérni, hogy a nyereség nagy legyen. Kék 2 elemről elemre jobb, mint Kék 3. De akkor minek vizsgáljuk Kék 3-at? Tüntessük el! Hasonlóan, mivel Piros azt szeretné elérni, hogy a nyereség kicsi legyen, Piros 1 rosszabb, mint Piros 3. Így Piros 1-et is elhagyhatjuk a mátrixból. Így az eredeti játékból csak a

|     |   | Piros |   |
|-----|---|-------|---|
|     |   | 2     | 3 |
| Kék | 1 | 0     | 2 |
|     | 2 | 5     | 1 |

$2 \times 2$ -es játék maradt meg. Ezt már meg tudjuk oldani:

|              |   | Piros |   | Kék aránya |
|--------------|---|-------|---|------------|
|              |   | 2     | 3 |            |
| Kék          | 1 | 0     | 2 | 4          |
|              | 2 | 5     | 1 | 2          |
| Piros aránya |   | 1     | 5 |            |

Ily módon a  $3 \times 3$ -as játék megoldása:

|              |   | Piros |   |    | Kék aránya |
|--------------|---|-------|---|----|------------|
|              |   | 1     | 2 | 3  |            |
| Kék          | 1 | 3     | 0 | 2  | 4          |
|              | 2 | 4     | 5 | 1  | 2          |
|              | 3 | 2     | 3 | -1 | 0          |
| Piros aránya |   | 0     | 1 | 5  |            |



Kéknek 4:2:0, Pirosnak 0:1:5 arányban kell stratégiáit kevernie. A 0 gyakoriság persze azt jelenti, hogy azt a stratégiát nem alkalmazzuk.

Ha domináns stratégiák keresésével csak egy stratégiát tudunk eltüntetni, akkor  $2 \times 2$ -es helyett  $2 \times 3$ -as játékot kapunk. Ennek megoldási módszerét is ismerjük.

Látjuk, hogy a nyeregpont és a domináns fogalma semmiben sem különbözik a  $2 \times m$ -es játékoknál tanult fogalmaktól. Eddigi eredményeinket az alábbiakban foglalhatjuk össze: Ha egy  $3 \times 3$ -as játéknak van nyeregpontja, akkor a tiszta stratégia a legjobb. Ha nincs nyeregpont, de van domináns sor (vagy oszlop), akkor a jó stratégia két tiszta stratégián alapuló kevert stratégia.

## A JÁTÉK ÉRTÉKE

A  $3 \times 3$ -as játékok átlagértékét — azt az értéket, amelyet hosszú játszmasorozatban jó játékkal elérhetünk — a  $2 \times 2$ -es játékoknál megismert módszer természetes kiterjesztésével határozhatjuk meg. Kiszámíthatjuk például azt, hogy Kék jó kevert stratégiájával átlagosan milyen eredményt érhet el Piros jó kevert stratégiájának valamelyik stratégiája ellen. Példánkban Kék (Piros 2 ellen)

$$\frac{4 \cdot 0 + 2 \cdot 5 + 0 \cdot 3}{4 + 2 + 0} = \frac{5}{3}$$

átlagos nyereséget érhet el. Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha Piros 2 helyett Piros 3-mal számolunk, vagy ha Piros jó kevert stratégiáját használjuk Kék 1 vagy Kék 2 ellen.

Ha valamelyik játékos tiltott stratégiát — Kék 3-at vagy Piros 1-et — alkalmaz, akkor az eredmény számára kedvezőtlenebb lesz. Ha Piros hibázik, akkor Kék nyeresége:

$$\frac{4 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 0 \cdot 2}{4 + 2 + 0} = \frac{10}{3}$$

egységre növekszik, ha Kék hibázik, akkor a nyereség:

$$\frac{0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 5 \cdot (-1)}{0 + 1 + 5} = -\frac{1}{3}$$

egység lesz, tehát Piros a számára igazságtalan játékban játszmányként  $\frac{1}{3}$  egységet nyerhet. Látjuk, hogy a kedvezőtlenebb helyzetben levő játékos az ellenféltől függetlenül bizonyos átlagértéken tudja tartani a nyereséget. Így volt ez a  $2 \times 2$ -es játékoknál is. A bonyolultabb játékokban akkor is jól kell játszanunk, ha ellenfelünk nem gondolkodik. A hibás játékot sehogy sem lehet jóvátenni, a balgaságért fizetni kell.



## HÁROM STRATÉGIÁN ALAPULÓ MEGOLDÁS

Eddig olyan  $3 \times 3$ -as játékokat elemeztünk, amelyek megoldása egy, ill. két stratégia alkalmazásán alapult (nyeregpont vagy domináns). Most olyan  $3 \times 3$ -as játékok megoldási módszerét közöljük, amelyek megoldásában három stratégiával kell dolgoznunk. Ezt a módszert csak akkor fogjuk alkalmazni, ha már meggyőződünk arról, hogy a játéknak sem nyeregpontmegoldása, sem domináns stratégián alapuló megoldása nincs.

Tekintsük a következő játékot:

|     |   | Piros |    |   |
|-----|---|-------|----|---|
|     |   | 1     | 2  | 3 |
| Kék | 1 | 6     | 0  | 6 |
|     | 2 | 8     | -2 | 0 |
|     | 3 | 4     | 6  | 5 |

Keressünk nyeregpontot és dominánst. Nincs szerencsénk. Rá kell szánunk magunkat az új megoldási módszer megismerésére.

Először azt állapítjuk meg, hogy a Pirosnak milyen gyakorisággal kell alkalmaznia különböző stratégiáit. (Tudom, hogy az Olvasót Kék jó stratégiája érdekli. Erre is sor kerül majd, de úgy érzem, hogy Pirossal indulva kicsit könnyebb dolgunk lesz.) Először is mindegyik sort vonjuk ki a közvetlenül felette álló sorból, vagyis minden nyereségértéket vonjunk ki a közvetlenül felette álló értékből. Így a következő mátrixot kapjuk:

|  |   | Piros |    |    |
|--|---|-------|----|----|
|  |   | 1     | 2  | 3  |
|  | 1 | -2    | 2  | 6  |
|  | 2 | 4     | -8 | -5 |



Piros 1 gyakoriságát a

Piros

1

|  |    |    |
|--|----|----|
|  | 2  | 6  |
|  | -8 | -5 |

mátrix alapján határozhatjuk meg (ezt a mátrixot úgy kaptuk, hogy az előző mátrix Piros 1 oszlopát elhagytuk). A gyakoriság értéke a

|   |    |
|---|----|
| 2 |    |
|   | -5 |

|    |   |
|----|---|
|    | 6 |
| -8 |   |

átlókban álló elemek szorzatának különbsége, vagyis

$$2 \cdot (-5) - 6 \cdot (-8) = 38.$$

Ez a szám, a 38 jelenti Piros 1 gyakoriságát. Ha negatív számot kaptunk volna, akkor az előjel elhagyásával adódott volna a keresett gyakorisága. (Vigyázat! Az előjeleket csak a számítás végén szabad elhagyni, közben gondosan ügyelni kell rájuk!)

Hasonlóképpen határozhatjuk meg Piros 2 és Piros 3 gyakoriságát. Piros 2 esetében mátrixunkból a Piros 2 oszlopot hagyjuk el,

Piros

2

|    |  |    |
|----|--|----|
| -2 |  | 6  |
| 4  |  | -5 |

és a

|    |    |
|----|----|
| -2 | 6  |
| 4  | -5 |



mátrix átlós szorzatainak különbségeként határozzuk meg a Piros 2 stratégia gyakoriságát. Mivel

$$(-2) \cdot (-5) - 4 \cdot 6 = -14,$$

Piros 2 gyakorisága 14. Hasonlóan, Piros 3 gyakorisága 8. Eredményeinket összegezve látjuk, hogy Piros legjobb stratégiája a 38:14:8 arányú stratégiakeverék.

Kék legjobb kevert stratégiáját a fentiekhez hasonlóan határozhatjuk meg, de sorok helyett oszlopokkal kell dolgoznunk. Elemről elemre mindegyik oszlopot kivonjuk a közvetlenül előtte álló oszlopból. Így a következő mátrixot kapjuk:

|     |   |    |    |
|-----|---|----|----|
| Kék | 1 | 6  | -6 |
|     | 2 | 10 | -2 |
|     | 3 | -2 | 1  |

Kék 1 gyakoriságát a

|     |   |    |    |
|-----|---|----|----|
| Kék | 1 |    |    |
|     |   | 10 | -2 |
|     |   | -2 | 1  |

mátrix átlós szorzatainak különbségéből kaphatjuk meg:

$$10 \cdot 1 - (-2) \cdot (-2) = 6.$$

Ugyanilyen módszerrel határozhatjuk meg a Kék 2 és Kék 3 stratégiák gyakoriságát. Számításaink eredménye az, hogy Kék legjobb stratégiája a 6:6:48 arányú stratégiakeverék.



mátrix átlós szorzatainak különbségeként határozzuk meg a Piros 2 stratégia gyakoriságát. Mivel

$$(-2) \cdot (-5) - 4 \cdot 6 = -14,$$

Piros 2 gyakorisága 14. Hasonlóan, Piros 3 gyakorisága 8. Eredményeinket összegezve látjuk, hogy Piros legjobb stratégiája a 38:14:8 arányú stratégiakeverék.

Kék legjobb kevert stratégiáját a fentiekhez hasonlóan határozhatjuk meg, de sorok helyett oszlopokkal kell dolgoznunk. Elemről elemre mindegyik oszlopot kivonjuk a közvetlenül előtte álló oszlopból. Így a következő mátrixot kapjuk:

|     |   |    |    |
|-----|---|----|----|
| Kék | 1 | 6  | -6 |
|     | 2 | 10 | -2 |
|     | 3 | -2 | 1  |

Kék 1 gyakoriságát a

|     |   |    |    |
|-----|---|----|----|
| Kék | 1 |    |    |
|     |   | 10 | -2 |
|     |   | -2 | 1  |

mátrix átlós szorzatainak különbségéből kaphatjuk meg:

$$10 \cdot 1 - (-2) \cdot (-2) = 6.$$

Ugyanilyen módszerrel határozhatjuk meg a Kék 2 és Kék 3 stratégiák gyakoriságát. Számításaink eredménye az, hogy Kék legjobb stratégiája a 6:6:48 arányú stratégiakeverék.



Reméljük\*, hogy megtaláltuk a megoldást:

|                 |   | Piros |    |   | Kék<br>aránya |
|-----------------|---|-------|----|---|---------------|
|                 |   | 1     | 2  | 3 |               |
| Kék             | 1 | 6     | 0  | 6 | 6             |
|                 | 2 | 8     | -2 | 0 | 6             |
|                 | 3 | 4     | 6  | 5 | 48            |
| Piros<br>aránya |   | 38    | 14 | 8 |               |

Mindkét arányban oszthatunk a közös tényezőkkel, így Kék arányát (6-tal osztva) 1:1:8 alakban, Piros arányát (2-vel osztva) 19:7:4 alakban írhatjuk fel.

A háromstratégias eljárás utolsó, de lényeges lépése a következő: ki próbáljuk, megvan-e megoldásunknak az a már ismert tulajdonsága, hogy az egyik játékos legjobb kevert stratégiája a másik mindegyik tiszta stratégiája ellen ugyanakkora nyereséget biztosít. A számításokat könnyen el lehet végezni.

Ha Kék 1:1:8 arányú stratégia-keveréket alkalmaz Piros 1 ellen, akkor az átlagos nyereség

$$\frac{1 \cdot 6 + 1 \cdot 8 + 8 \cdot 4}{1 + 1 + 8} = \frac{23}{5}$$

egység. Piros 2 ellen

$$\frac{1 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) + 8 \cdot 6}{1 + 1 + 8} = \frac{23}{5}$$

egység. Piros 3 ellen

$$\frac{1 \cdot 6 + 1 \cdot 0 + 8 \cdot 5}{1 + 1 + 8} = \frac{23}{5}$$

egység átlagos nyeresémet érhet el. Eddig minden rendben van. Most Piros legjobb kevert stratégiájából indulunk ki. Piros Kék 1 ellen átlagosan

$$\frac{19 \cdot 6 + 7 \cdot 0 + 4 \cdot 6}{19 + 7 + 4} = \frac{23}{5}$$

\* Az óvatos „reméljük” kifejezéssel azt akarjuk érzékeltetni, hogy a megoldás során sem számolási hibákat nem követtünk el, sem pedig abban az alapvető kérdésben nem hibáztunk, amelyet a következő fejezetben vizsgálunk meg.



egységet veszít. Ugyanezt az eredményt kapjuk Piros 2-ből és Piros 3-ból kiindulva is.

A játékot tehát valóban megoldottuk. A játék értéke  $\frac{23}{5}$  vagyis  $4\frac{3}{5}$ . Azt, hogy valóban megoldást kaptunk, onnan tudjuk, hogy bármelyik játékos legjobb kevert stratégiáját alkalmazzuk is a másik legjobb kevert stratégiájában szereplő akármelyik stratégia ellen, mindig ugyanazt az átlagos nyereséget kapjuk.

## JÁTÉKOK, AMELYEKEL JOBB VOLNA SOSEM TALÁLKOZNI

A  $3 \times 3$ -as játékok eddig ismertetett megoldási módszerei néha csődöt mondanak. Ez azt jelenti, hogy a nyereségmátrixokban vannak olyan finomságok, amelyek következtében a módszer nem mindig használható. Most az ilyen játékokra mutatunk egy példát.\*

Emlékezzünk vissza a dominánssal kapcsolatos fejtegetéseinkre. Némelyik tiszta stratégia nyilvánvalóan rosszabb másoknál. Az ilyen tiszta stratégiákkal sosem játszunk. A  $3 \times 3$ -as játékoknál előfordulhat, hogy egy tiszta stratégia rosszabb, mint a másik két tiszta stratégia valamelyik keveréke. Az ilyen tiszta stratégiákat sem alkalmazzuk. Módszerünk azonban ebben az esetben sem használható. Más, hasonló természetű okokból is csődöt mondhat a módszer. Ezeket is rögzíteni fogjuk.

A módszer hibája mindig tiltott stratégiával kapcsolatos: valamilyen — esetleg ismeretlen — ok miatt bizonyos tiszta stratégiákat rögtön az elején félre kell tennünk. Ez módszerünk kulcsa is — lassan járj, tovább érsz.

*Hagyjuk el az egyik (akármelyik) stratégiát és oldjuk meg a megmaradt játékot. Próbáljuk ki a megoldást az eredeti játékon. Ha jó a megoldás, akkor győztünk. Ha nem jó, akkor másik stratégia elhagyásával kell próbálkoznunk. Újra megoldjuk a megmaradt játékot és annak megoldását is kipróbáljuk az eredeti játékon. Így végül a megoldáshoz jutunk.*

Próbáljuk ki:

|     |   | Piros |    |   |
|-----|---|-------|----|---|
|     |   | 1     | 2  | 3 |
| Kék | 1 | 6     | 0  | 3 |
|     | 2 | 8     | -2 | 3 |
|     | 3 | 4     | 6  | 5 |

\* Ezzel a kérdéssel később, Az V. rész második felében részletesebben foglalkozunk.



Ez nem látszik veszélyesebbnek, mint az előző játék, hiszen csak két számot változtattunk meg benne. A szokásos módon járunk el: nincs nyeregpont, nincs domináns. A három stratégián alapuló megoldás az előző fejezet módszere szerint a következő: Kék aránya 0:0:0, Piros aránya 4:4:8. A hiba szembeszökő, hiszen Kék nem játszhat úgy, hogy egyik stratégiát sem alkalmazza. Példánkban a hiba szerencsére könnyen felismerhető. Ha azonban az arány például 3:5:7 alakú, akkor nem tudhatjuk, hogy a tiszteletre méltó külső mögött nem lapul-e valamilyen hiba. A hiba csak akkor bukkan elő, amikor a játék értékét számítjuk ki.

Próbálkozzunk meg a Kék 1 stratégia elhagyásával. Így a következő játékot kapjuk:

|     |   | Piros |    |   |
|-----|---|-------|----|---|
|     |   | 1     | 2  | 3 |
| Kék | 2 | 8     | -2 | 3 |
|     | 3 | 4     | 6  | 5 |

Keressük meg ennek egy  $2 \times 2$ -es megoldását. A

|     |   | Piros |    |
|-----|---|-------|----|
|     |   | 1     | 2  |
| Kék | 2 | 8     | -2 |
|     | 3 | 4     | 6  |

mátrixból kiindulva meghatározhatjuk a megoldást:

|                 |   | Piros |    |   | Kék<br>aránya |
|-----------------|---|-------|----|---|---------------|
|                 |   | 1     | 2  | 3 |               |
| Kék             | 2 | 8     | -2 | 3 | 2             |
|                 | 3 | 4     | 6  | 5 | 10            |
| Piros<br>aránya |   | 8     | 4  | 0 |               |



Próbáljuk ki ezt az eredeti játékon:

|                 |   | Piros |    |   | Kék<br>aránya |
|-----------------|---|-------|----|---|---------------|
|                 |   | 1     | 2  | 3 |               |
| Kék             | 1 | 6     | 0  | 3 | 0             |
|                 | 2 | 8     | -2 | 3 | 1             |
|                 | 3 | 4     | 6  | 5 | 5             |
| Piros<br>aránya |   | 2     | 1  | 0 |               |

Megoldást kaptunk? Kék a Piros 1 ellen

$$\frac{0 \cdot 6 + 1 \cdot 8 + 5 \cdot 4}{0 + 1 + 5} = 4 \frac{2}{3}$$

egységet nyer. Ugyanezt az eredményt érheti el Piros 2 és Piros 3 ellen is. (Nem volna meglepő, ha Piros 3 ellen jobb eredményt érne el. Gyakran van így, bár itt éppen nem.) Másrészt Piros a Kék 1 ellen

$$\frac{2 \cdot 6 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3}{2 + 1} = 4$$

egységet veszít, ami megengedhető, hiszen Piros rendszerint a játék értékénél jobb eredményt képes elérni, ha Kék nem a legjobb kevert stratégiájában szereplő stratégiákat alkalmazza. Hasonlóképpen számítható ki, hogy Kék 2 és Kék 3 ellen Piros  $4 \frac{2}{3}$  egységet veszít.

Így meghatároztuk a játék megoldását. A kiszámított kevert stratégiák (0:1:5, ill. 2:1:0) biztosítják a játékosok számára egyrészt, hogy az ellenfél legjobb kevert stratégiájában szereplő stratégiák ellen átlagosan  $4 \frac{2}{3}$  egység nyereséget, az abban nem szereplő stratégiák ellen pedig legalább  $4 \frac{2}{3}$ , vagy annál jobb eredményt érjenek el.

Egyszerű dolgokról van szó, csak nehéz elmondani őket. Helyzetünk (a III. rész elején levő hasonlattal élve) a CICA szó tanításához hasonlítható.

Talán nem felesleges újra beszélni arról, hogy Kék jó játéka, vagyis a megfelelő kevert stratégia alkalmazása néha mindkét játékos számára életbiztosítás, mivel Piros sok más stratégiával ugyanolyan eredményt érhet el, mint legjobb kevert stratégiájával. Ez a biztosítás azonban csak annak a játékosnak — a Kéknek — nyújt igazi védelmet, amelyik a kevert straté-



giával játszik. Piros csak akkor él meg belőle, ha saját legjobb kevert stratégiája (amiről feltételeztük, hogy nem alkalmazza) az összes tiszta stratégiáját tartalmazza. Ebben az esetben Piros szabadon választhat stratégiái között, Kék legjobb kevert stratégiájával szemben mindig ugyanolyan eredményt ér el. Ha Piros valamelyik tiszta stratégiája nem szerepel a legjobb keverékben, akkor azt a stratégiát *tilos* Kék legjobb kevert stratégiája ellen használnia.

A kevert stratégia alkalmazása az ellenfél számára nem biztosítja automatikusan és teljesen a felesleges veszteségek elkerülését, a kevert stratégiával dolgozó játékos számára viszont mindig automatikus és teljes biztosítékot jelent. A kevert stratégia azt is biztosítja, hogy az ellenfél fizeti meg, ha tiltott stratégiát alkalmaz. Sajnos, arra nincs biztosíték, hogy a büntetés a lehető legnagyobb legyen.

#### 14. Példa. Olló—papír—kő

A játékelmélet egyik legrégebben vizsgált problémája a gyerekek ismert olló—papír—kő játéka.\* A megoldás intuitív úton nyilvánvaló, de érdekes lehet, ha a már ismert eredményt a játékelmélet segítségével is meghatározzuk.

A két játékos egyidejűleg megnevezi vagy kezével megmutatja a három tárgy valamelyikét. Ha mindketten ugyanazt mondják, akkor a játék döntetlen. Ha nem, akkor az elsőbbség azon alapszik, hogy az olló szétvágja a papírt, a kő széttöri az ollót és a papír beborítja a követ. A nyereségmátrix a következő:

|     |       | Piros |       |    |
|-----|-------|-------|-------|----|
|     |       | Olló  | Papír | Kő |
| Kék | Olló  | 0     | 1     | -1 |
|     | Papír | -1    | 0     | 1  |
|     | Kő    | 1     | -1    | 0  |

\* Hadd álljon itt a feladat kínai változata is: Az ember a kakast, a kakas a férget, a férget az embert eszi.



Nincs nyeregpont és nincs domináns stratégia. Piros kevert stratégiáját a

Piros

Olló    Papír    Kő

|    |   |    |
|----|---|----|
| 1  | 1 | -2 |
| -2 | 1 | 1  |

mátrix alapján határozhatjuk meg (mindegyik sort kivontuk a közvetlenül felette álló sorból). Az olló gyakorisága a

Piros

Olló

|  |   |    |
|--|---|----|
|  | 1 | -2 |
|  | 1 | 1  |

mátrix alapján

$$1 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) = 3.$$

Piros számára a Papír gyakorisága a

Piros

Papír

|    |  |    |
|----|--|----|
| 1  |  | -2 |
| -2 |  | 1  |



továbbá az

|    |    |
|----|----|
| 1  | -2 |
| -2 | 1  |

mátrix alapján

$$1 \cdot 1 - (-2) \cdot (-2) = -3.$$

Piros számára a Kő gyakorisága a

Piros

Kő

|    |   |  |
|----|---|--|
| 1  | 1 |  |
| -2 | 1 |  |

mátrix alapján

$$1 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) = 3.$$

A szimmetria miatt Kék gyakoriságaira is ugyanezt az eredményt kapnánk, tehát mindkét játékosnak ugyanolyan, 1:1:1 arányú stratégia-keveréket kell alkalmaznia. (Mivel a módszer néha hibát okoz, az ellenőrzésről sosem szabad megfeledkeznünk.)

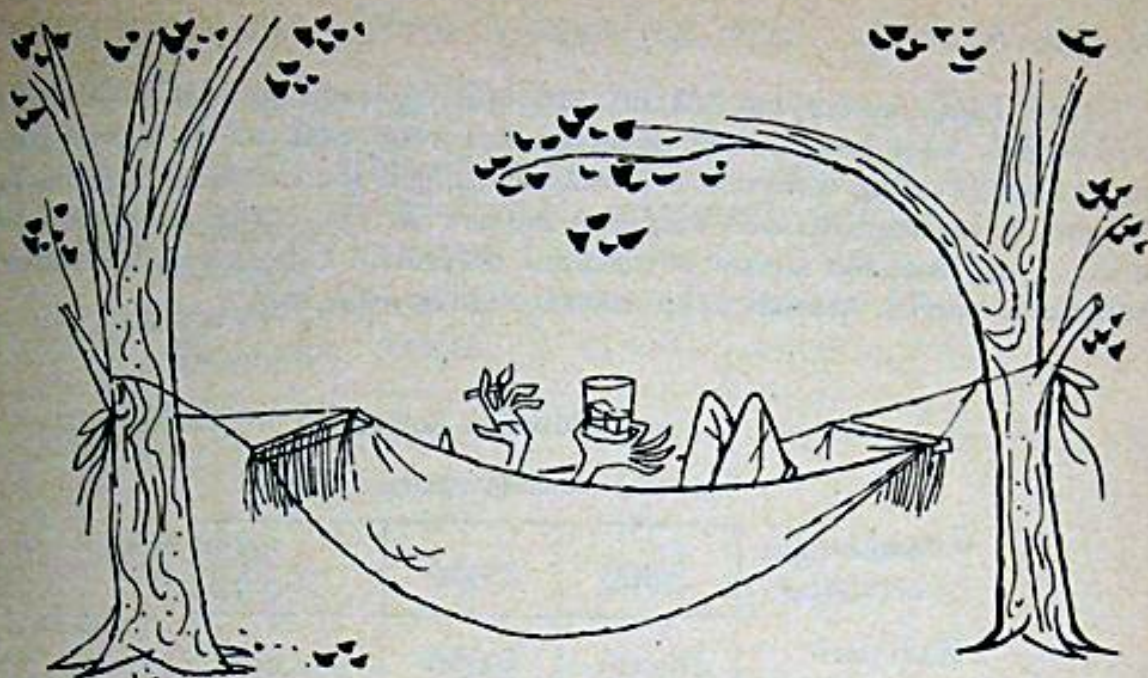
### 15. Példa. Tüzelővásárlás

Egy fülledt nyári délutánon Hans azon gondolkozott, hogy mennyi szenet vásároljon télre. Házának fűtéséhez átlagosan télen 15 tonna, enyhe télen 10 tonna, kemény télen 20 tonna szénre van szüksége. A szén ára is változik attól függően, hogy milyen a tél: enyhe, átlagos, kemény télen rendre 10, 15, 20 dollárba kerül egy tonna szén. Most 10 dollárért vehetné meg a szenet.

Mit tegyen? Mennyi szenet vásároljon? Lehet, hogy tavasszal Kaliforniába költözik, oda nem viheti magával a maradék szenet. Átnézte az összes távprognózist, még azt is, amit a békák viselkedése alapján\* állítottak össze.

\* A szerző a költői szabadság jogával élve írta le ezt, annak ellenére, hogy kéziratának kritikusi szerint: „A békák nyári délutánokon — különösen fülledt melegben — nem foglalkoznak időjósággal.”





Három tiszta stratégiája van: most 10, 15 vagy 20 tonna szén vehet, a többi pedig akkor vásárolja meg, amikor szüksége van rá. A különféle lehetőségekkel kapcsolatos költségeket könnyen ki lehet számolni:

|                |    | Tél   |         |        | Sorminimum |
|----------------|----|-------|---------|--------|------------|
|                |    | Enyhe | Átlagos | Kemény |            |
| Szénkészlet    | 10 | -100  | -175    | -300   | -300       |
|                | 15 | -150  | -150    | -250   | -250       |
|                | 20 | -200  | -200    | -200   | -200*      |
| Cszlop maximum |    | -100  | -150    | -200*  |            |

A játéknak van nyeregpontja, a 20 tonna szén beszerzése.

(Ha Hans tud valamit az éghajlati viszonyokról, akkor ezt előnyösen használhatja ki a maga számára. Az ilyen típusú helyzetekkel később foglalkozunk. Lásd „Az orvosság” című példát.)



# 16. Példa. Az örökös

George hatalmas vagyont örökölt, ami után egy éven belül 100 000 dollár örökösödési adót kell fizetnie. Elhatározta, hogy csak az év végén fizeti be az adót és addig igyekszik a pénzt valamilyen jövedelmező üzletbe befektetni. A legmegbízhatóbb helyre, a Novick & Co. céghez fordult tanácsért. A cég becslése szerint a politikai helyzettől függően a különböző befektetési módok hasznát a következő mátrix adja meg:

|                            | Politikai helyzet |             |        |
|----------------------------|-------------------|-------------|--------|
|                            | Háború            | Hidegháború | Béke   |
| Államkölcson<br>kötvények  | 2,900             | 3,000       | 3,200  |
| Hadiipari<br>részvények    | 18,000            | 6,000       | -2,000 |
| Kereskedelmi<br>részvények | 2,000             | 7,000       | 12,000 |

A Novick & Co. cég a politikai helyzettel kapcsolatban nem bocsátkozott becslésekbe. George megállapította, hogy a játék tulajdonképpen közte és a Természet között játszódik. George maximális, a Természet minimális nyereséget szeretne elérni.

A játéknak nincs nyeregpontja és nincs domináns stratégia sem. Próbáljuk ki tehát a  $3 \times 3$ -as játékok szokásos megoldási módszerét. Badarságot kapunk, vagyis a kapott arányoknak nincsenek meg azok a tulajdonságai, amikkel egy megoldásnak rendelkeznie kell. Menjünk vissza a jó öreg  $2 \times 2$ -esekhez és némi kutatás után próbálkozzunk meg a

|                            | Háború | Hidegháború |
|----------------------------|--------|-------------|
| Hadiipari<br>részvények    | 18 000 | 6 000       |
| Kereskedelmi<br>részvények | 2 000  | 7 000       |

játékkal. Ennek megoldása George számára 5:12 (a Természet számára



1:16). Ez az eredeti játéknak is megoldása, tehát

|                            | Háború | Hidegháború | Béke   | George<br>aránya |
|----------------------------|--------|-------------|--------|------------------|
| Államkölcson<br>kötvények  | 2 900  | 3 000       | 3 200  | 0                |
| Hadiipari<br>részvények    | 18 000 | 6 000       | -2 000 | 5                |
| Kereskedelmi<br>részvények | 2 000  | 7 000       | 12 000 | 12               |
| Természet<br>aránya        | 1      | 16          | 0      |                  |

Georgenak vagy eszerint az arány szerint kell játszania, vagy adójának  $\frac{5}{17}$  részét háborús részvényekbe,  $\frac{12}{17}$  részét kereskedelmi részvényekbe kell befektetnie. A játék értéke körülbelül 6700 dollár.

Példánkban, miként néhány korábbi példában is, szabályainktól eltérő stratégiát javasoltunk: egy játszmán belül a lehetséges stratégiáknak az arány értéke szerinti „fizikai” keverékét. Ahelyett, hogy alkalmasan választott véletlen eseményekkel eldöntenénk, hogy éppen melyik stratégia szerint játsszunk, megtehetjük azt, hogy egy kicsit az egyik, egy kicsit a másik stratégiából alkalmazunk.

Ezzel nyilván megsértettük néhány elvünket, hiszen különben a fizikai keverék nem volna lehetséges. Minden lehetséges cselekvéssorozatnak meg kell feleltetnünk egy tiszta stratégiát, tehát a fizikai keverék lehetősége fel sem léphet.

A fonák helyzetet az teszi világossá, hogy van olyan végtelen játék, amely szoros kapcsolatban van a fenti véges játékkal. A végtelen játékban a játékos végtelen sokféleképpen fektetheti be pénzét — a lehetőségeknek csak a részvények számának és a pénz mennyiségének oszthatóságával kapcsolatos feltételek szabnak határt. Továbbá, a különféle részvények vásárlásából adódó résznyereségek egyenesen arányosak a vásárolt mennyiséggel és a teljes nyereség a résznyereségek összege. Az ilyen helyzeteket nyeregponttal rendelkező végtelen játékokként vagy (rendszerint) kevert stratégiát igénylő véges játékokként kezelhetjük. Az utóbbit fizikai keverékként értelmezve a megfelelő végtelen játék nyeregpont megoldásához jutunk.



## 17. Példa. A marhafarm végnapjai

Dalkey és Kaplan elhatározták, hogy felszámolják marhafarmukat, mivel Kaplan egyre inkább háttérbe szorítva érezte magát. Közös vagyontuk fele-fele arányban eladták, csak három értékes, díjnyertes bikától — Dallantól, Dalkantól és Dalkentől — nem tudtak megválni. Elhatározták, hogy szétszítják őket egymás közt.



Az állatokért könnyen kaphattak volna rendre 20, 30, ill. 40 ezer dollárt, de nem bírták elviselni a gondolatot, hogy másé legyenek. Ugyanakkor egyikük sem akart fizetni értük a másiknak. Mindegyikük főnyereménynek tekintette volna, ha megkapja őket, és nagy veszteségnek, ha a másik kapja meg.\* Az osztozkodásra az alábbi módszert dolgozták ki.

Mindegyikük elővesz egy csomag kártyából egy kettest, egy hármast és egy négyest — a 20, 30 ill. a 40 ezer dollár értékű bikának megfelelően. Az első bika sorsát úgy döntenek el, hogy mindegyikük kiválaszt egy kártyalapot aszerint, hogy mennyit ajánl fel a bikáért. A bikát az kapja meg, aki többet ajánl fel. Ezután a többi állaton osztozkodtak a maradék kártyalapok alapján. A bikák sorrendje véletlenszerű volt. Döntetlen esetén a bikát lelőtték. Hogyan kell játszaniuk? Milyen sorrendben kell kirakniuk kártyáikat? Mit kell a véletlenre bízniuk?

Az elemzés hosszadalmas, ezért csak röviden vázoljuk a gondolatmenetet. Attól függően, hogy melyik állat kerül sorra először, három  $3 \times 3$ -as játékot írhatunk fel.\*\* A  $3 \times 3$ -as játékok mindegyik nyereségértékét egy  $2 \times 2$ -es

\* Ha egyikük sem kapja meg, azt 0 nyereségnek tekintik. Ez elég csúnya tőlük, de a játék csak így lesz nulla összegű. (A lektor.)

\*\* A játékosok előre nem ismerik a bikák sorrendjét, de csak akkor kell a lapokkal licitálniuk, amikor már odavezették a soronkövetkezőt. Így stratégiájukat akkor kell csak rögzíteniük, mikor az első bikát meglátták. Stratégián most az értjük, hogy milyen lappal licitálnak először. A stratégiapárokhoz tartozó nyereséget úgy számítjuk ki, hogy a maradék két bika 2 lehetséges sorrendjét  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$  valószínűségűnek vesszük és mindkét sorrendhez egy-egy új játékot írunk fel (azt a helyzetet véve alapul, ha a második bikát is megláttuk). Ezen  $2 \times 2$ -es játékok értékét egyforma súllyal összegezzük, és hozzáadjuk az első bikánál kapott nyereséget. (A lektor.)



játék értéke adja meg. Például, ha a jó öreg Dalkan (értéke 2 egység) kerül először sorra és mindkét játékos a kettést rakja ki, akkor szegény barátunknak befellegzett, a játékosok nem nyernek, nem is veszítenek. Ha Dalkan következik és Dalken az utolsó, akkor az alábbi lehetőségek vannak:

Dalkey

Hármas után a négyes    Négyes után a hármas

|        |                         |         |          |
|--------|-------------------------|---------|----------|
| Kaplan | Hármas után<br>a négyes | $0 + 0$ | $-3 + 4$ |
|        | Négyes után<br>a hármas | $3 - 4$ | $0 + 0$  |

A játék tehát a következő:

|    |   |
|----|---|
| 0  | 1 |
| -1 | 0 |

Látjuk, hogy van nyeregpont (a bal felső sarokban), tehát a játék értéke nulla (ugyanazt kapjuk, ha az utolsó két bika sorrendjét megcseréljük). Ha ezt a nullát hozzáadjuk az első lépésben kapott nullához, akkor megkapjuk annak a  $3 \times 3$ -as játéknak a bal felső elemét, amelyben Dalkan az első bika:

Dalkey

|        |   | 2               | 3              | 4              |
|--------|---|-----------------|----------------|----------------|
| Kaplan | 2 | 0               | $-\frac{1}{2}$ | $2\frac{3}{4}$ |
|        | 3 | $\frac{1}{2}$   | 0              | $-\frac{1}{2}$ |
|        | 4 | $-2\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{2}$  | 0              |

A mátrix többi elemét hasonlóképpen lehet meghatározni. Így Dalkeynek és Kaplannak az első ajánlatot kell jól megválasztania ahhoz, hogy nyerjen. Mindkét játékosnak  $1:23:1$  arányú stratégia-keveréssel kell játszania. A következő ajánlatokat a  $2 \times 2$ -es játékok meghatározzák. A teljes játék értéke nulla, tehát a játék igazságos.



Ha Dalkan az első, akkor a játék mátrixa a

|        |   | Dalkey         |    |               |
|--------|---|----------------|----|---------------|
|        |   | 2              | 3  | 4             |
| Kaplan | 2 | 0              | -1 | $\frac{5}{3}$ |
|        | 3 | 1              | 0  | -1            |
|        | 4 | $-\frac{5}{3}$ | 1  | 0             |

mátrix, ha Dalken az első, akkor a

|        |   | Dalkey         |                 |                 |
|--------|---|----------------|-----------------|-----------------|
|        |   | 2              | 3               | 4               |
| Kaplan | 2 | 0              | $-1\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$  |
|        | 3 | $1\frac{1}{3}$ | 0               | $-1\frac{1}{3}$ |
|        | 4 | $\frac{1}{3}$  | $1\frac{1}{3}$  | 0               |

mátrixot kell vizsgálnunk. Az előbbiben 3:5:3, az utóbbiban 0:0:1 arányban kell keverniük a játékosoknak stratégiáikat.

Példánk célja — bizonyos érzelmek keltésétől eltekintve — az volt, hogy megmutassuk, milyen bonyolult elemzésre lehet szükség egy egyszerűnek látszó feladatban is. A szerkezetüknél fogva valóban egyszerű játékok kivételével a megoldáshoz általában kitartó álló-, illetve ülőképességre van szükség.

#### 18. Példa. A randevú

David és John Annával szeretnének találkozni. Egyikük sem tudja, hogy Anna mikor ér haza. Valójában Anna egyforma valószínűséggel érkezik haza 3, 4 vagy 5 órakor. Davidot kicsit jobban kedveli, mint Johnt, ezért ha John telefonál előbb, akkor nem ad választ, hanem vár néhány percet, hogy telefonál-e David is. Ha David nem telefonál, akkor visszahívja Johnt és elfogadja a meghívást. Az este egyébként egyik esetben sem ígérkezik túlságosan mozgalmasnak, ugyanis a fiúk vagyona mindössze egy-egy telefonérme — azt is a Postának szánták.



A nyereségmátrix elemi valószínűség-számítási megfontolásokkal határozható meg. Például, ha David 3 órákor, John 5 órákor telefonál, akkor David  $\frac{1}{3}$ , John  $\frac{2}{3}$  valószínűséggel találkozhat Annával. David számára a nyereség ebben az esetben  $\frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$ . A teljes mátrix a következő:

|                           |   |               | John           |                |   |
|---------------------------|---|---------------|----------------|----------------|---|
|                           |   |               | 3              | 4              | 5 |
| 3 4 5<br>órákor telefonál | 3 | $\frac{1}{3}$ | 0              | $-\frac{1}{3}$ |   |
|                           | 4 | 0             | $\frac{2}{3}$  | $\frac{1}{3}$  |   |
|                           | 5 | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | 1              |   |

Nyeregpontot és domináns hiába keresünk, mind a három stratégiát alkalmaznunk kell. (Egyszerűbbek a számítások, ha mindent megszorozunk hárommal.) David aránya 2:2:1, John aránya 10:4:1. A játék értéke David számára  $\frac{1}{5}$ .

A pozitív nyereségérték azt mutatja, hogy Anna Davidot kedveli jobban. Ezt a tényt a megoldásból a következőképpen olvashatjuk ki: Anna feladatunk szerint háromféleképpen töltheti estét: Daviddal, Johnnal vagy egyedül. Az arány szerint ezek az események 97:52:76 arányban fordulnak elő. Így ha a játékot 225 estén át megismétlik és az események pontosan az arány szerint játszódnak le, akkor Anna 97-szer Daviddal, 52-szer Johnnal és 76-szor egyedül tölti az estét. Vegyük észre, hogy  $\frac{97-52}{225} = \frac{1}{5}$ . Reméljük, hogy eredményünket mindenki kielégítőnek találja.

### A 3×3-AS MÓDSZER ÖSSZEFOGLALÁSA

A 2×2-es játékokhoz képest a 3×3-asok megoldási módszerében két lényeges újdonság található: a) stratégiák eltüntetése dominancia segítségével, b) három stratégián alapuló megoldás meghatározása a mátrixok vonalkázott elemei alapján. Az általános eljárás a következő:

1. Nyeregpontot keresünk, vagyis összehasonlítjuk a sorminimumok



maximumát (röviden maximint) az oszlopmaximumok minimumával (röviden minimaxszal). Ha ezek egyenlők, akkor van nyeregpont.

2. Ha nincs nyeregpont, akkor megpróbáljuk domináns stratégiák segítségével egyszerűbbé tenni a játékot. Olyan sorokat keresünk, amelynek elemei túl kicsik ahhoz, hogy Kéknek érdemes legyen azzal a stratégiával dolgoznia. Hasonlóképpen, olyan oszlopokat keresünk, amelynek elemei túl nagyok Piros szempontjából. Így egy sort vagy oszlopot elhagyhatunk és  $2 \times 3$ -as (vagy  $3 \times 2$ -es) játékot kapunk.

3. Ha a fenti két módszer nem alkalmazható, akkor a vonalkázott elemek segítségével megkeressük a három stratégián alapuló módszer legjobb kevert stratégiáit. Az eredményt ellenőrizzük.

4. Ha a fenti három módszer nem vezet eredményre, akkor feltesszük, hogy a  $3 \times 3$ -as játék megoldása megegyezik valamelyik  $2 \times 2$ -es részjáték megoldásával. Sorra kipróbáljuk a  $2 \times 2$ -eseket.

5. Ha egyik módszer sem vezetett eredményre, akkor valahol hibát követtünk el. Helyzetünk egyáltalában nem irigylésre méltó. Az alábbi feladatok a gyakorlásra és a hibák elkövetésére egyaránt sok lehetőséget biztosítanak.

### Feladatok

Határozzuk meg a következő játékok gyakoriságait és értékét.

1.

|     |   | Piros |   |   |
|-----|---|-------|---|---|
|     |   | 1     | 2 | 3 |
| Kék | 1 | 1     | 4 | 7 |
|     | 2 | 1     | 7 | 4 |
|     | 3 | 4     | 7 | 4 |

2.

|     |   | Piros |   |   |
|-----|---|-------|---|---|
|     |   | 1     | 2 | 3 |
| Kék | 1 | 1     | 2 | 3 |
|     | 2 | 8     | 9 | 4 |
|     | 3 | 7     | 6 | 5 |

3.

|     |   | Piros |   |   |
|-----|---|-------|---|---|
|     |   | 1     | 2 | 3 |
| Kék | 1 | 1     | 2 | 1 |
|     | 2 | 2     | 7 | 4 |
|     | 3 | 1     | 0 | 6 |

4.

|     |   | Piros |     |    |
|-----|---|-------|-----|----|
|     |   | 1     | 2   | 3  |
| Kék | 1 | 6     | -10 | 3  |
|     | 2 | 4     | 4   | 4  |
|     | 3 | 7     | 11  | -5 |



maximumát (röviden maximint) az oszlopmaximumok minimumával (röviden minimaxszal). Ha ezek egyenlők, akkor van nyeregpont.

2. Ha nincs nyeregpont, akkor megpróbáljuk domináns stratégiák segítségével egyszerűbbé tenni a játékot. Olyan sorokat keresünk, amelynek elemei túl kicsik ahhoz, hogy Kéknek érdemes legyen azzal a stratégiával dolgoznia. Hasonlóképpen, olyan oszlopokat keresünk, amelynek elemei túl nagyok Piros szempontjából. Így egy sort vagy oszlopot elhagyhatunk és  $2 \times 3$ -as (vagy  $3 \times 2$ -es) játékot kapunk.

3. Ha a fenti két módszer nem alkalmazható, akkor a vonalkázott elemek segítségével megkeressük a három stratégián alapuló módszer legjobb kevert stratégiáit. Az eredményt ellenőrizzük.

4. Ha a fenti három módszer nem vezet eredményre, akkor feltesszük, hogy a  $3 \times 3$ -as játék megoldása megegyezik valamelyik  $2 \times 2$ -es részjáték megoldásával. Sorra kipróbáljuk a  $2 \times 2$ -eseket.

5. Ha egyik módszer sem vezetett eredményre, akkor valahol hibát követtünk el. Helyzetünk egyáltalában nem irigylésre méltó. Az alábbi feladatok a gyakorlásra és a hibák elkövetésére egyaránt sok lehetőséget biztosítanak.

### Feladatok

Határozzuk meg a következő játékok gyakoriságait és értékét.

1.

|     |   | Piros |   |   |
|-----|---|-------|---|---|
|     |   | 1     | 2 | 3 |
| Kék | 1 | 1     | 4 | 7 |
|     | 2 | 1     | 7 | 4 |
|     | 3 | 4     | 7 | 4 |

2.

|     |   | Piros |   |   |
|-----|---|-------|---|---|
|     |   | 1     | 2 | 3 |
| Kék | 1 | 1     | 2 | 3 |
|     | 2 | 8     | 9 | 4 |
|     | 3 | 7     | 6 | 5 |

3.

|     |   | Piros |   |   |
|-----|---|-------|---|---|
|     |   | 1     | 2 | 3 |
| Kék | 1 | 1     | 2 | 1 |
|     | 2 | 2     | 7 | 4 |
|     | 3 | 1     | 0 | 6 |

4.

|     |   | Piros |     |    |
|-----|---|-------|-----|----|
|     |   | 1     | 2   | 3  |
| Kék | 1 | 6     | -10 | 3  |
|     | 2 | 4     | 4   | 4  |
|     | 3 | 7     | 11  | -5 |



5.

|     |   | Piros |   |   |
|-----|---|-------|---|---|
|     |   | 1     | 2 | 3 |
| Kék | 1 | 0     | 1 | 1 |
|     | 2 | 1     | 0 | 1 |
|     | 3 | 1     | 1 | 0 |

6.

|     |   | Piros |    |    |
|-----|---|-------|----|----|
|     |   | 1     | 2  | 3  |
| Kék | 1 | -1    | 1  | 0  |
|     | 2 | 0     | -1 | 1  |
|     | 3 | 1     | 0  | -1 |

7.

|     |   | Piros |   |   |
|-----|---|-------|---|---|
|     |   | 1     | 2 | 3 |
| Kék | 1 | 0     | 2 | 1 |
|     | 2 | 2     | 0 | 2 |
|     | 3 | 1     | 2 | 0 |

8.

|     |   | Piros |   |   |
|-----|---|-------|---|---|
|     |   | 1     | 2 | 3 |
| Kék | 1 | 1     | 1 | 3 |
|     | 2 | 1     | 3 | 2 |
|     | 3 | 3     | 2 | 2 |

9.

|     |   | Piros |   |   |
|-----|---|-------|---|---|
|     |   | 1     | 2 | 3 |
| Kék | 1 | 3     | 5 | 2 |
|     | 2 | 0     | 6 | 8 |
|     | 3 | 4     | 1 | 3 |

10.

|     |   | Piros |   |    |
|-----|---|-------|---|----|
|     |   | 1     | 2 | 3  |
| Kék | 1 | 7     | 0 | -5 |
|     | 2 | 0     | 1 | 4  |
|     | 3 | -5    | 3 | 6  |

11.

|     |   | Piros |   |   |
|-----|---|-------|---|---|
|     |   | 1     | 2 | 3 |
| Kék | 1 | 0     | 1 | 2 |
|     | 2 | 1     | 0 | 1 |
|     | 3 | 2     | 1 | 0 |

12.

|     |   | Piros |   |   |
|-----|---|-------|---|---|
|     |   | 1     | 2 | 3 |
| Kék | 1 | 4     | 3 | 2 |
|     | 2 | 3     | 4 | 3 |
|     | 3 | 2     | 3 | 4 |



13.

Piros

|       |  | 1  | 2 | 3 |
|-------|--|----|---|---|
| 1     |  | -6 | 5 | 0 |
| Kék 2 |  | 2  | 1 | 3 |
| 3     |  | 1  | 2 | 0 |

14.

Piros

|       |  | 1  | 2  | 3  |
|-------|--|----|----|----|
| 1     |  | 0  | 4  | 1  |
| Kék 2 |  | -7 | 2  | 1  |
| 3     |  | 6  | -5 | -1 |

15.

Piros

|       |  | 1  | 2  | 3  |
|-------|--|----|----|----|
| 1     |  | -7 | 4  | 2  |
| Kék 2 |  | 0  | 2  | 1  |
| 3     |  | 6  | -5 | -1 |

16.

Piros

|       |  | 1 | 2 | 3 |
|-------|--|---|---|---|
| 1     |  | 1 | 4 | 7 |
| Kék 2 |  | 1 | 7 | 4 |
| 3     |  | 5 | 7 | 4 |

17.

Piros

|       |  | 1 | 2 | 3 |
|-------|--|---|---|---|
| 1     |  | 1 | 3 | 2 |
| Kék 2 |  | 0 | 7 | 4 |
| 3     |  | 3 | 8 | 1 |

18.

Piros

|       |  | 1 | 2 | 3 |
|-------|--|---|---|---|
| 1     |  | 3 | 1 | 6 |
| Kék 2 |  | 2 | 2 | 0 |
| 3     |  | 8 | 0 | 3 |

19.

Piros

|       |  | 1 | 2 | 3 |
|-------|--|---|---|---|
| 1     |  | 1 | 3 | 5 |
| Kék 2 |  | 2 | 4 | 4 |
| 3     |  | 6 | 1 | 1 |

20.

Piros

|       |  | 1 | 2 | 3 |
|-------|--|---|---|---|
| 1     |  | 3 | 1 | 6 |
| Kék 2 |  | 2 | 4 | 2 |
| 3     |  | 1 | 5 | 4 |



21.

Piros

|       |  | 1 | 2 | 3 |
|-------|--|---|---|---|
| 1     |  | 6 | 4 | 3 |
| Kék 2 |  | 0 | 2 | 8 |
| 3     |  | 1 | 6 | 3 |

22.

Piros

|       |  | 1 | 2 | 3 |
|-------|--|---|---|---|
| 1     |  | 8 | 0 | 7 |
| Kék 2 |  | 3 | 3 | 8 |
| 3     |  | 3 | 6 | 1 |

23.

Piros

|       |  | 1 | 2 | 3 |
|-------|--|---|---|---|
| 1     |  | 3 | 0 | 7 |
| Kék 2 |  | 4 | 6 | 0 |
| 3     |  | 3 | 4 | 3 |

24.

Piros

|       |  | 1   | 2   | 3   |
|-------|--|-----|-----|-----|
| 1     |  | 203 | 403 | 103 |
| Kék 2 |  | 303 | 3   | 103 |
| 3     |  | 3   | 103 | 303 |

25.

Piros

|       |  | 1 | 2 | 3  |
|-------|--|---|---|----|
| 1     |  | 4 | 6 | 0  |
| Kék 2 |  | 0 | 3 | 10 |
| 3     |  | 3 | 6 | 6  |

26.

Piros

|       |  | 1 | 2  | 3  |
|-------|--|---|----|----|
| 1     |  | 2 | 4  | 0  |
| Kék 2 |  | 1 | 4  | 10 |
| 3     |  | 5 | 10 | 4  |

27.

Piros

|       |  | 1 | 2 | 3  |
|-------|--|---|---|----|
| 1     |  | 5 | 5 | 0  |
| Kék 2 |  | 4 | 7 | 8  |
| 3     |  | 2 | 2 | 10 |

28.

Piros

|       |  | 1 | 2 | 3 |
|-------|--|---|---|---|
| 1     |  | 3 | 6 | 0 |
| Kék 2 |  | 5 | 3 | 2 |
| 3     |  | 2 | 1 | 6 |



29.

Piros

|       |  | 1 | 2 | 3 |
|-------|--|---|---|---|
| 1     |  | 3 | 5 | 0 |
| Kék 2 |  | 4 | 4 | 1 |
| 3     |  | 1 | 1 | 6 |

30.

Piros

|       |  | 1 | 2 | 3 |
|-------|--|---|---|---|
| 1     |  | 3 | 2 | 4 |
| Kék 2 |  | 0 | 4 | 1 |
| 3     |  | 1 | 3 | 4 |

31.

Piros

|       |  | 1 | 2 | 3 |
|-------|--|---|---|---|
| 1     |  | 3 | 2 | 4 |
| Kék 2 |  | 4 | 3 | 2 |
| 3     |  | 2 | 4 | 3 |

## MÁSODIK FEJEZET: $3 \times m$ -es játékok

### A MEGOLDÁS MÓDSZERE

A  $3 \times m$ -es játékok — amelyekben az egyik játékosnak három, a másiknak háromnál több tiszta stratégiája van — megoldása éppen úgy a  $3 \times 3$ -as játékokon alapul, mint ahogy a  $2 \times m$ -es játékok megoldásának alapja a  $2 \times 2$ -esek megoldása. A  $3 \times m$ -es játékoknak mindig vagy  $3 \times 3$ -as, vagy  $2 \times 2$ -es megoldásuk vagy nyeregpontjuk van. Feladatunk az alkalmas  $3 \times 3$ -as (vagy  $2 \times 2$ -es) játék megkeresése, megoldása és annak bizonyítása, hogy ez az eredeti játéknak is megoldása.

Először persze nyeregpontot keresünk — azért „persze”, mert ez a legkönnyebb, és nem engedhetjük meg magunknak, hogy ne tudjunk róla, ha létezik. Ha nincs nyeregpont, akkor domináns stratégiák után kutatunk, és így eltüntetjük a felesleges sorokat és oszlopokat. Ha a három stratégiával



rendelkező játékos egy stratégiáját sikerült eltüntetnünk, akkor feladatunk lényegesen könnyebb lett: egy  $2 \times m$ -es játék  $2 \times 2$ -es megoldását kell megtalálnunk.

Ha nincs nyeregpont és nincs domináns, akkor több időt kell szánunk a megoldásra. A  $3 \times m$ -es játék megoldásához addig kell a  $3 \times 3$ -as és a  $2 \times 2$ -es játékok között keresnünk a megoldást, amíg véletlenül rá nem bukkanunk.

Az előző fejezetben olyan grafikus megoldási trükkel terheltük az Olvasókat, amelynek felhasználásával meg tudjuk határozni a  $2 \times m$ -es játékok  $2 \times 2$ -es megoldását. Ennek most komoly hasznát vesszük: a  $3 \times m$ -es játékokban úgy keresünk majd  $2 \times 2$ -es megoldást, hogy a  $3 \times m$ -es játékot  $2 \times m$ -es darabokra vágjuk. Tekintsük először Piros összes stratégiája ellen Kék 1-et és Kék 2-t, majd Kék 2-t és 3-at, végül Kék 1-et és 3-at.

Ha az eredeti játéknak  $2 \times 2$ -es megoldása van, akkor grafikus módszerünkkel könnyen célhoz érünk. Mivel ez a módszer egyszerű, először ezzel dolgozunk, és csak aztán keresünk  $3 \times 3$ -as megoldást. Ha nem találunk  $2 \times 2$ -es megoldást, akkor sem dolgoztunk hiába, hiszen most már *tudjuk*, hogy a játéknak  $3 \times 3$ -as megoldása van. Ehhez azonban már egészen más-képp kell hozzáállni, a rajzok már nem segítenek.

Próbálkozzunk meg egy  $3 \times m$ -es játék megoldásával. Íme egy jól meghízott példány:

|                |   | Piros |   |   |    |   |   |    |   | Sorminimum |
|----------------|---|-------|---|---|----|---|---|----|---|------------|
|                |   | 1     | 2 | 3 | 4  | 5 | 6 | 7  | 8 |            |
| Kék            | 1 | 6     | 0 | 2 | 0  | 7 | 1 | 2  | 3 | 0          |
|                | 2 | 3     | 0 | 2 | -5 | 4 | 8 | -3 | 1 | -5         |
|                | 3 | 1     | 3 | 5 | 1  | 7 | 2 | 4  | 6 | 1*         |
| Oszlop maximum |   | 6     | 3 | 5 | 1* | 7 | 8 | 4  | 6 |            |

Először — megvizsgálva a sorminimumok maximumát és az oszlopmaximumok minimumát — nyeregpontot keresünk. A szokásos indulásnak szokatlan a befejezése. Nyeregpontot találunk is, így a szörnyeteggel egy-csapásra végezhetünk. A játék megoldása a Kék 3 a Piros 4 ellen, a játék értéke 1.



rendelkező játékos egy stratégiáját sikerült eltüntetnünk, akkor feladatunk lényegesen könnyebb lett: egy  $2 \times m$ -es játék  $2 \times 2$ -es megoldását kell megtalálnunk.

Ha nincs nyeregpont és nincs domináns, akkor több időt kell szánunk a megoldásra. A  $3 \times m$ -es játék megoldásához addig kell a  $3 \times 3$ -as és a  $2 \times 2$ -es játékok között keresnünk a megoldást, amíg véletlenül rá nem bukkanunk.

Az előző fejezetben olyan grafikus megoldási trükkel terheltük az Olvasókat, amelynek felhasználásával meg tudjuk határozni a  $2 \times m$ -es játékok  $2 \times 2$ -es megoldását. Ennek most komoly hasznát vesszük: a  $3 \times m$ -es játékokban úgy keresünk majd  $2 \times 2$ -es megoldást, hogy a  $3 \times m$ -es játékot  $2 \times m$ -es darabokra vágjuk. Tekintsük először Piros összes stratégiája ellen Kék 1-et és Kék 2-t, majd Kék 2-t és 3-at, végül Kék 1-et és 3-at.

Ha az eredeti játéknak  $2 \times 2$ -es megoldása van, akkor grafikus módszerünkkel könnyen célhoz érünk. Mivel ez a módszer egyszerű, először ezzel dolgozunk, és csak aztán keresünk  $3 \times 3$ -as megoldást. Ha nem találunk  $2 \times 2$ -es megoldást, akkor sem dolgoztunk hiába, hiszen most már *tudjuk*, hogy a játéknak  $3 \times 3$ -as megoldása van. Ehhez azonban már egészen más-képp kell hozzáállni, a rajzok már nem segítenek.

Próbálkozzunk meg egy  $3 \times m$ -es játék megoldásával. Íme egy jól meghízott példány:

|                |   | Piros |   |   |    |   |   |    |   |            |  |
|----------------|---|-------|---|---|----|---|---|----|---|------------|--|
|                |   | 1     | 2 | 3 | 4  | 5 | 6 | 7  | 8 | Sorminimum |  |
| Kék            | 1 | 6     | 0 | 2 | 0  | 7 | 1 | 2  | 3 | 0          |  |
|                | 2 | 3     | 0 | 2 | -5 | 4 | 8 | -3 | 1 | -5         |  |
|                | 3 | 1     | 3 | 5 | 1  | 7 | 2 | 4  | 6 | 1*         |  |
| Oszlop maximum |   | 6     | 3 | 5 | 1* | 7 | 8 | 4  | 6 |            |  |

Először — megvizsgálva a sorminimumok maximumát és az oszlopmaximumok minimumát — nyeregpontot keresünk. A szokásos indulásnak szokatlan a befejezése. Nyeregpontot találunk is, így a szörnyeteggel egy-csapásra végezhetünk. A játék megoldása a Kék 3 a Piros 4 ellen, a játék értéke 1.



Szinte nem is remélhetjük, hogy a következő játékkal is ilyen szerencsénk lesz:

|                |   | Piros |      |    | Sorminimum |
|----------------|---|-------|------|----|------------|
|                |   | 1     | 2    | 3  |            |
| Kék            | 1 | -7    | -11  | -7 | -11        |
|                | 2 | -7    | -90  | -7 | -90        |
|                | 3 | -9    | -10  | -9 | -10*       |
|                | 4 | -7    | -12  | -7 | -12        |
| Oszlop maximum |   | -7    | -10* | -7 |            |

De mégis, újra találtunk nyeregpontot. Tekintsük most a

|                |   | Piros |   |    |   |   | Sorminimum |
|----------------|---|-------|---|----|---|---|------------|
|                |   | 1     | 2 | 3  | 4 | 5 |            |
| Kék            | 1 | 3     | 5 | -2 | 2 | 1 | -2         |
|                | 2 | 3     | 6 | -1 | 2 | 4 | -1         |
|                | 3 | 4     | 3 | 6  | 7 | 8 | 3*         |
| Oszlop maximum |   | 4*    | 6 | 6  | 7 | 8 |            |

játékot. Ebben végre nincs nyeregpont, de domináns stratégia van: Kék 2 kicsit jobb, mint Kék 1. Így a játékból csak ennyi marad:

|     |   | Piros |   |    |   |   |
|-----|---|-------|---|----|---|---|
|     |   | 1     | 2 | 3  | 4 | 5 |
| Kék | 2 | 3     | 6 | -1 | 2 | 4 |
|     | 3 | 4     | 3 | 6  | 7 | 8 |



Ebben a játékban Piros 3 jobb, mint Piros 4 és Piros 5, tehát újabb stratégiákat hagyhatunk el:

|     |   | Piros |   |    |
|-----|---|-------|---|----|
|     |   | 1     | 2 | 3  |
| Kék | 2 | 3     | 6 | -1 |
|     | 3 | 4     | 3 | 6  |

Így viszonylag egyszerű,  $2 \times 3$ -as játékot kaptunk. A megoldást a három lehetséges  $2 \times 2$ -es játék — Piros 1, 2; Piros 2, 3; Piros 1, 3 — valamelyike adja meg. Ezek közül az egyik az eredeti játéknak is megoldása. Nem volna nehéz végigpróbálni az összes lehetőséget, de szerencsénkre már az első, a

|                 |   | Piros |   | Kék<br>aránya |
|-----------------|---|-------|---|---------------|
|                 |   | 1     | 2 |               |
| Kék             | 2 | 3     | 6 | 1             |
|                 | 3 | 4     | 3 | 3             |
| Piros<br>aránya |   | 3     | 1 |               |

játék megoldása az eredetinek is megoldása. Így Kéknek  $0:1:3$ , Pirosnak  $3:1:0:0:0$  arányban kell stratégiáit kevernie.

Újabb játék következik:

|     |   | Piros |   |   |   |   |
|-----|---|-------|---|---|---|---|
|     |   | 1     | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Kék | 1 | 7     | 1 | 3 | 0 | 2 |
|     | 2 | 0     | 1 | 6 | 4 | 2 |
|     | 3 | 1     | 2 | 0 | 5 | 5 |

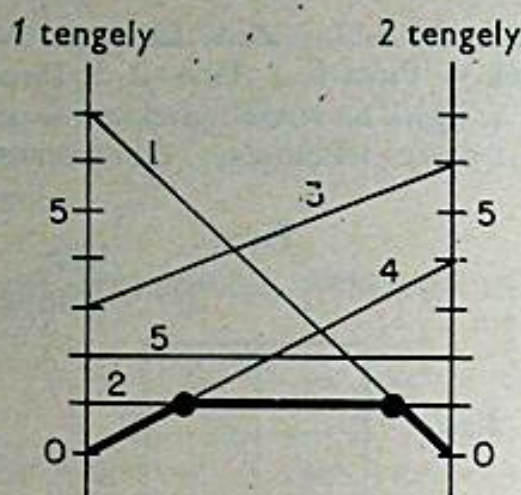
Nincs nyeregpont, nincs domináns, próbáljunk meg  $2 \times 2$ -es megoldást



keresni. Az első  $2 \times 5$ -ös részjáték

|     |   | Piros |   |   |   |   |
|-----|---|-------|---|---|---|---|
|     |   | 1     | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Kék | 1 | 7     | 1 | 3 | 0 | 2 |
|     | 2 | 0     | 1 | 6 | 4 | 2 |

grafikonja:



Ilyennel eddig még nem találkoztunk: a Piros 2 stratégiának vízszintes vonal felel meg. A grafikus megoldás szabálya szerint a burkoló legmagasabb pontjára kellene fordítani figyelmünket. Itt két metszéspont, a Piros 2, 4 és Piros 1, 2 verseng ezért a megtiszteltetésért. A Piros 2, 4 és Piros 1, 2 stratégiákon alapuló  $2 \times 2$ -es játékoknak van nyeregpontjuk, viszont a  $2 \times 5$ -ös játéknak nincs; így ezek a nyeregpontok nem lehetnek a  $2 \times 5$ -ös játék megoldásai. Továbbá, ezeknek a  $2 \times 2$ -es játékoknak a nyeregpont-megoldáson kívül kevert stratégián alapuló megoldásuk is van. Ezek a következők:

|     |   | Piros |   | Kék aránya   |
|-----|---|-------|---|--------------|
|     |   | 1     | 2 |              |
| Kék | 1 | 7     | 1 | 1            |
|     | 2 | 0     | 1 | 6            |
|     |   | 0     | 7 | Piros aránya |

|     |   | Piros |   | Kék aránya   |
|-----|---|-------|---|--------------|
|     |   | 2     | 4 |              |
| Kék | 1 | 1     | 0 | 3            |
|     | 2 | 1     | 4 | 1            |
|     |   | 4     | 0 | Piros aránya |



A Piros 1 és Piros 4 stratégiák gyakorisága ezekben a játékokban pontosan nulla. Ez azt jelenti, hogy míg Kéknek 3:1 (vagy 1:6) arányban kell stratégiáit kevernie, addig Pirosnak a Piros 2 stratégiát kell alkalmaznia. A Piros 1 és Piros 4 stratégiákkal is játszhat, de ez utóbbiakat nulla gyakorisággal! Ez persze nagyon furcsa. A későbbiekben (jóval később) még visszatérünk erre a kérdésre, de most nem érdemes kitérni rá, hiszen ennek a  $2 \times 5$ -ös játéknak úgy sincs olyan megoldása, amely kielégíti az eredeti játékot is. Próbálkozzunk egy másik  $2 \times 5$ -össel:

|     |   | Piros |   |   |   |   |
|-----|---|-------|---|---|---|---|
|     |   | 1     | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Kék | 2 | 0     | 1 | 6 | 4 | 2 |
|     | 3 | 1     | 2 | 0 | 5 | 5 |

Piros 2, 4 és 5 domináns, ezeket elhagyhatjuk:

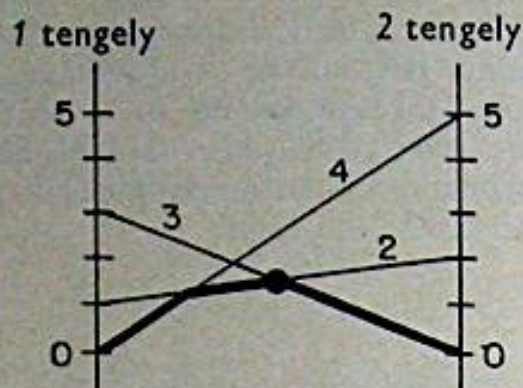
|     |   | Piros |   | Kék<br>aránya |
|-----|---|-------|---|---------------|
|     |   | 1     | 3 |               |
| Kék | 2 | 0     | 6 | 1             |
|     | 3 | 1     | 0 | 6             |
|     |   | 6     | 1 | Piros aránya  |

A megoldás azonban az eredeti játéknak nem megoldása (erről számításokkal győződhetünk meg). Így már csak egy  $2 \times 5$ -ös maradt:

|     |   | Piros |   |   |   |   |
|-----|---|-------|---|---|---|---|
|     |   | 1     | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Kék | 1 | 7     | 1 | 3 | 0 | 2 |
|     | 3 | 1     | 2 | 0 | 5 | 5 |



Piros 1 és Piros 5 domináns, így grafikonunkon csak Piros 2, 3 és 4 szerepel:



Ebből nyilvánvaló, hogy a Piros 2 és Piros 3 stratégiákat tartalmazó  $2 \times 2$ -est kell megvizsgálnunk:

|     |   | Piros        |   |            |  |
|-----|---|--------------|---|------------|--|
|     |   | 2            | 3 | Kék aránya |  |
| Kék | 1 | 1            | 3 | 2          |  |
|     | 3 | 2            | 0 | 2          |  |
|     |   | Piros aránya |   | 3      1   |  |

Ez a  $2 \times 5$ -ös játéknak megoldása, de — az ördög vigye — a  $3 \times 5$ -ösnek ez sem.

Helyzetünk szörnyű: eddig csak annyit tudtunk meg a  $3 \times 5$ -ös játékról, hogy nincs nyeregpontja és nincs  $2 \times 2$ -es megoldása. Ebből csak annyi a hasznunk, hogy most már biztosak lehetünk abban, hogy a játéknak  $3 \times 3$ -as megoldása van. Térjünk tehát vissza a sóbányába (hasonlatunk a nehéz, keserves munkára utal) és próbálkozzunk meg egy  $3 \times 3$ -as játékkal:

|                |   | Piros |    |   | Sorminimum |
|----------------|---|-------|----|---|------------|
|                |   | 1     | 2  | 3 |            |
| Kék            | 1 | 7     | 1  | 3 | 1*         |
|                | 2 | 0     | 1  | 6 | 0          |
|                | 3 | 1     | 2  | 0 | 0          |
| Oszlop maximum |   | 7     | 2* | 6 |            |



Nincs nyeregpont, nincs domináns, tehát a vonalkázott részek alapján végig kell számolnunk az összes stratégiák gyakoriságát. Piros 1 gyakorisága a

|  |   | Piros |    |    |
|--|---|-------|----|----|
|  |   | 1     | 2  | 3  |
|  | 1 | 7     | 0  | -3 |
|  | 2 | -1    | -1 | 6  |

mátrix alapján

|    |    |
|----|----|
| 0  | -3 |
| -1 | 6  |

$$= 0 \cdot 6 - (-3) \cdot (-1) = -3$$

tehát 3. Hasonlóképpen meghatározva Piros és Kék többi stratégiájának gyakoriságát azt kapjuk, hogy Kéknek 7:10:32, Pirosnak 3:39:7 arányban kell stratégiáit kevernie. Ez megoldása az eredeti mátrixnak is, így feladatunkat megoldottuk (és nem kell a maradék kilenc  $3 \times 3$ -ast is végigszámolnunk):

|              |   | Piros |    |   |   |   | Kék aránya |
|--------------|---|-------|----|---|---|---|------------|
|              |   | 1     | 2  | 3 | 4 | 5 |            |
| Kék          | 1 | 7     | 1  | 3 | 0 | 2 | 7          |
|              | 2 | 0     | 1  | 6 | 4 | 2 | 10         |
|              | 3 | 1     | 2  | 0 | 5 | 5 | 32         |
| Piros aránya |   | 3     | 39 | 7 | 0 | 0 |            |

A tudományos irodalomban gyakran tapasztalható, hogy a lényeges dolgokat ugyanannyiszor mondják el, mint a lényegteleneket, vagyis pontosan egyszer. Feltételezik, hogy ennyi információ elegendő ahhoz, hogy mindent jól az Olvasó emlékezetébe véssenek. Ez a világ nyolcadik csodája, mivel egyrészt elősegíti a folyóiratok gazdaságos helykihasználását, másrészt bátorítja a kutatókat, hogy közöljék felfedezéseiket. A munka folya-



matosságát is biztosítja, hiszen ilyen módszer mellett évekig tart, amíg az Olvasók megértenek valamit.

Azok az Olvasóink, akik ehhez a stílushoz vannak szokva, szüntelen ismétléseink következtében bizonyára erős zsibbadást éreznek könyökük táján. Lehet, hogy ha például a nyeregpontokkal kapcsolatban újra figyelmeztetjük valamire az Olvasót, akkor már átkozódni vagy kiabálni fog.



Reméljük, hogy az összes ezzel kapcsolatos problémára rávilágít a szerző következő lidércnyomása: Rajzunkon egy szegény, de becsületes Olvasó látható, aki elhatározta, hogy megtanul valamennyit a játékelméletről, legalábbis a kisebb játékokról, de bajba került. Lehet, hogy úgy érzi magát, mint aki egy palacsinta-forma jég táblára vetődött egy jegesmedvével. Nála csak egy töltetlen puska van és egyetlen óhaja, hogy bölcsen haljon meg. Lehet, hogy íróasztala mellett ül és nincs előtte más félelmetes szörny, csak mátrixaink, amelyek megismerésére elszánta magát. Elképzelhető, hogy elengedte a füle mellett, amikor először beszéltünk valamilyen mód-



szerről vagy fogalomról. Lehetséges, hogy magyarázatunkra az előző alkalommal oda is figyelt, csak számára nem volt elég világos. Bármilyen is a baj, a következtetés ugyanaz: újra el kell mondanunk. Reméljük, sikerült megértetnünk, hogy miért ezt a módszert alkalmazzuk.

### 19. Példa. A sügér és a professzor

Történetünk hőse egy ma született centrarchoid (*Micropterus*), azaz egy, „a sügerek családjába tartozó hal, amelyik sokra becsüli a táplálékot”. A történetet — amelynek kitalálásában Angler Kleene a bűnös — A sügér és a professzor címmel szokták elmesélni. Bizonyos férgekkel és egy tó vizével együtt ezek természetes egységet alkotnak.

A háromféle táplálék — hernyó, szitakötő és poszméh — a tó felszínén helyezkedik el, de nem borítja be teljesen. Ha a professzor (egészben, horoggal) hozzátesz valamelyikből egyet a tavon levőkhöz és a sügér azt bekapja, akkor halálozási aránya 2:6:30, ami azt jelenti, hogy a tavon ötször annyi poszméh van, mint szitakötő és háromszor annyi szitakötő, mint hernyó.\*

A probléma az, hogy mit egyen a sügér és mivel horgásson a professzor?



\* Legyen mondjuk  $15n$  a hernyó,  $5n$  a szitakötő és  $n$  a poszméh és legyen  $n$  elég nagy ahhoz, hogy a professzort ne zavarják meg a gyakoriságok. A halálozási valószínűségek így  $\frac{1}{15n}$ ,  $\frac{1}{5n}$ ,  $\frac{1}{n}$ . Mivel  $n$  jelenléte a számítások szempontjából kellemetlen, szorozzunk végig mindent  $30n$ -nel, így a 2:6:30 arányt kapjuk. Miért éppen  $30n$ -nel? Azért, mert (a) miért ne? és (b) azért, hogy később amikor bevezetjük azt a csodálatos mittudoménmi-csodát, amelyik mindegyik csalétket pótolja, de kétszer olyan gyanús, mint a többi csalétek, ne kelljen törtekkel számolnunk. Ha a halálozási arány 1:3:15 volna, akkor az új csalinak az  $\frac{1}{2}$  érték felelne meg.



A nyereségmátrix a következő:

|                   |           | A professzor családja |           |         |
|-------------------|-----------|-----------------------|-----------|---------|
|                   |           | Hernyó                | Szitakötő | Poszméh |
| A sügér tápláléka | Hernyó    | -2                    | 0         | 0       |
|                   | Szitakötő | 0                     | -6        | 0       |
|                   | Poszméh   | 0                     | 0         | -30     |

Nincs nyeregpont és nincs domináns. A sügér vonalkázott mátrixa, a

| Hernyó    | -2 | 0  |
|-----------|----|----|
| Szitakötő | 6  | -6 |
| Poszméh   | 0  | 30 |

mátrix, tehát

|   |    |       |
|---|----|-------|
|   |    |       |
| 6 | -6 | = 180 |
| 0 | 30 |       |

gyakorisággal kell hernyót,

|    |    |      |
|----|----|------|
| -2 | 0  |      |
|    |    | = 60 |
| 0  | 30 |      |



A nyereségmátrix a következő:

A professzor csalija

|                      |           | Hernyó | Szitakötő | Poszméh |
|----------------------|-----------|--------|-----------|---------|
| A sügér<br>tápláléka | Hernyó    | -2     | 0         | 0       |
|                      | Szitakötő | 0      | -6        | 0       |
|                      | Poszméh   | 0      | 0         | -30     |

Nincs nyeregpont és nincs domináns. A sügér vonalkázott mátrixa, a

| Hernyó    | -2 | 0  |
|-----------|----|----|
| Szitakötő | 6  | -6 |
| Poszméh   | 0  | 30 |

mátrix, tehát

|   |    |       |
|---|----|-------|
|   |    |       |
| 6 | -6 | = 180 |
| 0 | 30 |       |

gyakorisággal kell hernyót,

|    |    |      |
|----|----|------|
| -2 | 0  |      |
|    |    | = 60 |
| 0  | 30 |      |



gyakorisággal kell szitakötőt és

|    |    |
|----|----|
| -2 | 0  |
| 6  | -6 |
|    |    |

= 12

gyakorisággal kell poszméhet ennie. A közös tényezővel osztva azt kapjuk, hogy a sügérnek 15:5:1 arányban kell stratégiáit kevernie. Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a professzor legjobb kevert stratégiája ugyanez.\*

A játék értéke  $-\frac{10}{7}$ , ami a sügér szempontjából igazságtalan.

A horgászok azonban nagy kísérletezők és ha tehetik, szívesen vásárolnak újfajta csalétket, feltéve, hogy nem gilisztáról van szó. A mi professzorunk is beszerzett egy csodálatos csalit, valami nemtudommicsodát. A nemtudommicsoda mind a három csalétket pótolja, de kétszer olyan gyanús, mint a régi csalétkek és ez csökkenti a hatásfokát. A játék most a következő:

|       |           | Professzor |           |         |     |
|-------|-----------|------------|-----------|---------|-----|
|       |           | Hernyó     | Szitakötő | Poszméh | ?   |
| Sügér | Hernyó    | -2         | 0         | 0       | -1  |
|       | Szitakötő | 0          | -6        | 0       | -3  |
|       | Poszméh   | 0          | 0         | -30     | -15 |

A sügérnek most 3:1:0 arányban kell stratégiáit kevernie, ami az előzőhöz képest csak kis módosítást jelent — a poszméh túlságosan veszélyessé vált. A professzor legjobb kevert stratégiája a 7:2:0:1 arányú keverék, tehát a poszméhet sosem kell csaliként használnia. A csodálatos új csalétket mindössze az esetek 10%-ában érdemes alkalmaznia. A játék értéke most

\* Természetesen, ha a sügér járatlan a játékelméletben, és ismert arányban eszi a háromféle táplálékot, akkor a professzornak érdemes más stratégiát alkalmaznia. (A lektor.)



$-\frac{30}{20}$ , ami a professzor számára valamivel kedvezőbb, mint az eredeti játék értéke, a  $-\frac{30}{21}$ . Ez alátámasztja azt a jól ismert tapasztalati tényt, hogy a horgászat költséges mulatság.

## 20. Példa. Az orvosság

Dr. Wendel egyik páciense ágynak dőlt: olyan betegségben szenved, amelynek öt változata ismeretes. A doktor képtelen megállapítani, hogy a betegség melyik változata áll fenn, vagyis hogy milyen típusú baktériumok ellen kell felvennie a küzdelmet.

Újra megfogja a beteg pulzusát. A beteg szemében a bizalom és a hála jelei láthatók. Viselkedése valószínűleg megváltozna, ha tudná, miért számolja meg pulzusát ismételten a doktor. Dr. Wendel azért vizsgálta meg újra, hogy megnézhesse órájának másodpercmutatóját, ugyanis véletlen számára volt szüksége. Ez azt mutatja, hogy doktorunk valóban bizalmat érdemel, hiszen nemcsak a gyógyításban jártas, hanem a játékelméletet is ismeri.



Három orvosság áll a doktor rendelkezésére. Az első orvosság négyféle baktériumra hat, mindegyiket ötven százalékos valószínűséggel pusztítja el. A második orvosság ezek közül egyre biztosan hat. A harmadik ezek közül egy másikra ötven százalék valószínűséggel, az ötödikre biztosan hat.



A mátrix a következő:

|          |   | Baktérium     |               |               |               |   |
|----------|---|---------------|---------------|---------------|---------------|---|
|          |   | 1             | 2             | 3             | 4             | 5 |
| Orvosság | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
|          | 2 | 1             | 0             | 0             | 0             | 0 |
|          | 3 | 0             | $\frac{1}{2}$ | 0             | 0             | 1 |

A Természet szempontjából Baktérium 1 és 2 domináns Baktérium 3 és 4 felett és az utóbbi kettő egyforma hatású. Így a játék egyszerűbbé válik:

|          |   | Baktérium     |   |
|----------|---|---------------|---|
|          |   | 4             | 5 |
| Orvosság | 1 | $\frac{1}{2}$ | 0 |
|          | 2 | 0             | 0 |
|          | 3 | 0             | 1 |

Dr. Wendelnek nem kell zseniális orvosnak lennie ahhoz, hogy ebből kitalálja: a második orvosságot nem érdemes alkalmazni, tehát elég a következő játékot vizsgálni:

|                  |   | Baktérium     |               | Doktor aránya |
|------------------|---|---------------|---------------|---------------|
|                  |   | 4             | 5             |               |
| Orvosság         | 1 | $\frac{1}{2}$ | 0             | 1             |
|                  | 3 | 0             | 1             | $\frac{1}{2}$ |
| Természet aránya |   | 1             | $\frac{1}{2}$ |               |

Az arány  $1:\frac{1}{2}$ , vagyis 2:1 az első orvosság javára. A doktor jó kevert stra-



tégiája tehát a 2:0:1 arányú stratégia-keverék. A játék értéke  $\frac{1}{3}$ , a Természet nem érhet el a maga számára ennél kedvezőbb átlagértéket.

Érdemes megvizsgálni, hogyan változik meg a doktor stratégiája, ha tud valamit a Természet stratégiájáról. Mivel a Természet nem rosszindulatú, a doktornak csak hasznára válhat a tudás.

Tegyük fel, hogy a vizsgálatok szerint a Természet 1:3:3:2:5 arányban keveri a betegség típusait. A doktor most kiszámíthatja, hogy az egyes stratégiák mennyi nyereséget jelentenek számára. Például, ha mindig a Kék 1 stratégiát alkalmazza, akkor (az eredeti mátrix nyereségértékei alapján) átlagos nyeresége

$$\frac{1 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot 0}{1 + 3 + 3 + 2 + 5} = \frac{\frac{9}{2}}{14} = \frac{9}{28}.$$

Ha Kék 2-t alkalmazza, akkor

$$\frac{1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 5 \cdot 0}{14} = \frac{1}{14} = \left( \frac{2}{28} \right).$$

Kék 3-ból  $\frac{13}{28}$  adódik. A játék értékei tehát a következők:

|        |   | Természet       |
|--------|---|-----------------|
| Doktor | 1 | $\frac{9}{28}$  |
|        | 2 | $\frac{2}{28}$  |
|        | 3 | $\frac{13}{28}$ |

Világos, hogy a doktornak a Kék 3 stratégiát kell alkalmaznia. A játék értéke  $\frac{13}{28}$ , ami nagyobb, mint az előző játék értéke  $\left( \frac{1}{3} \right)$ . A betegséggel kapcsolatos információ tehát valóban hasznos. Ez általánosságban is igaz, de különösen a Természet elleni játékokban van nagy szerepe: minél többet tudunk róla, annál jobban játszhatunk ellene.

Érdemes folytatni az elemzést. Tegyük fel, hogy a Természet stratégiája 1:3:3:2:5 arányú kevert stratégia, de a doktor ezt nem tudva a játékelmélet alapján kapott 2:0:1 stratégiával küzd ellene. Mivel a Természet nem a lehetséges legjobb kevert stratégiát alkalmazza, a doktor nyeresége ebben az esetben is nagyobb, mint  $\frac{1}{3}$ . Láttuk, hogy ha a Természet az 1:3:3:2:5



tégiája tehát a 2:0:1 arányú stratégia-keverék. A játék értéke  $\frac{1}{3}$ , a Természet nem érhet el a maga számára ennél kedvezőbb átlagértéket.

Érdekes megvizsgálni, hogyan változik meg a doktor stratégiája, ha tud valamit a Természet stratégiájáról. Mivel a Természet nem rosszindulatú, a doktornak csak hasznára válhat a tudás.

Tegyük fel, hogy a vizsgálatok szerint a Természet 1:3:3:2:5 arányban keveri a betegség típusait. A doktor most kiszámíthatja, hogy az egyes stratégiák mennyi nyereséget jelentenek számára. Például, ha mindig a Kék 1 stratégiát alkalmazza, akkor (az eredeti mátrix nyereségértékei alapján) átlagos nyeresége

$$\frac{1 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot 0}{1 + 3 + 3 + 2 + 5} = \frac{\frac{9}{2}}{14} = \frac{9}{28}.$$

Ha Kék 2-t alkalmazza, akkor

$$\frac{1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 5 \cdot 0}{14} = \frac{1}{14} = \left(\frac{2}{28}\right).$$

Kék 3-ból  $\frac{13}{28}$  adódik. A játék értékei tehát a következők:

|        |   |                 |
|--------|---|-----------------|
|        |   | Természet       |
|        | 1 | $\frac{9}{28}$  |
| Doktor | 2 | $\frac{2}{28}$  |
|        | 3 | $\frac{13}{28}$ |

Világos, hogy a doktornak a Kék 3 stratégiát kell alkalmaznia. A játék értéke  $\frac{13}{28}$ , ami nagyobb, mint az előző játék értéke  $\left(\frac{1}{3}\right)$ . A betegséggel kapcsolatos információ tehát valóban hasznos. Ez általánosságban is igaz, de különösen a Természet elleni játékokban van nagy szerepe: minél többet tudunk róla, annál jobban játszhatunk ellene.

Érdekes folytatni az elemzést. Tegyük fel, hogy a Természet stratégiája 1:3:3:2:5 arányú kevert stratégia, de a doktor ezt nem tudva a játékelmélet alapján kapott 2:0:1 stratégiával küzd ellene. Mivel a Természet nem a lehetséges legjobb kevert stratégiát alkalmazza, a doktor nyeresége ebben az esetben is nagyobb, mint  $\frac{1}{3}$ . Láttuk, hogy ha a Természet az 1:3:3:2:5



kevert stratégiát alkalmazza, akkor a játék értékei:

|        |   |                 |
|--------|---|-----------------|
|        |   | Természet       |
|        | 1 | $\frac{9}{28}$  |
| Doktor | 2 | $\frac{2}{28}$  |
|        | 3 | $\frac{13}{28}$ |

alakban írhatók. Ha a doktor — az eredeti elemzés szerint — 2:0:1 arányban keveri stratégiáit, akkor átlagos nyeresége

$$\frac{2 \cdot \frac{9}{28} + 0 \cdot \frac{2}{28} + 1 \cdot \frac{13}{28}}{2 + 0 + 1} = \frac{31}{84}$$

egység.

Összefoglalva: ha a doktor jól írta fel a játékot és a Természet a számunkra legkedvezőtlenebb stratégiának megfelelően játszik, akkor a doktor nyeresége  $\frac{1}{3}$ . Ha a Természet az 1:3:3:2:5 stratégiát alkalmazza, de a doktor ezt nem tudja, akkor nyeresége  $\frac{31}{84}$ . Ha a doktor ismeri a Természet stratégiáját, akkor 2:0:1 helyett 0:0:1 arányú stratégia-keveréket alkalmaz és ezzel  $\frac{13}{28}$  egységet nyer, tehát ismeretei kb. 26% hasznot jelentenek számára.

Az életben sok olyan helyzettel találkozhatunk, amelyben részleges információ alapján a játékelmélet felhasználásával jó eredményt érhetünk el, még akkor is, ha nem ismerjük a játék valódi értékét.

## 21. Példa. Sakkverseny

Két, három-három játékosból álló csapat elhatározza, hogy barátságos sakkbajnokságot rendeznek. A bajnokság két játszából áll. A csapatok tagjai Barankin, Bodenhorn, Brown, ill. Bellman, Brown és Brown. Sajnáljuk, hogy ennyi Brown van, de mit tegyünk, ilyen az élet. Mindazonáltal feladatunkban — legalábbis a jobb rejtvényfejtők számára — egyértelműen azonosíthatók.

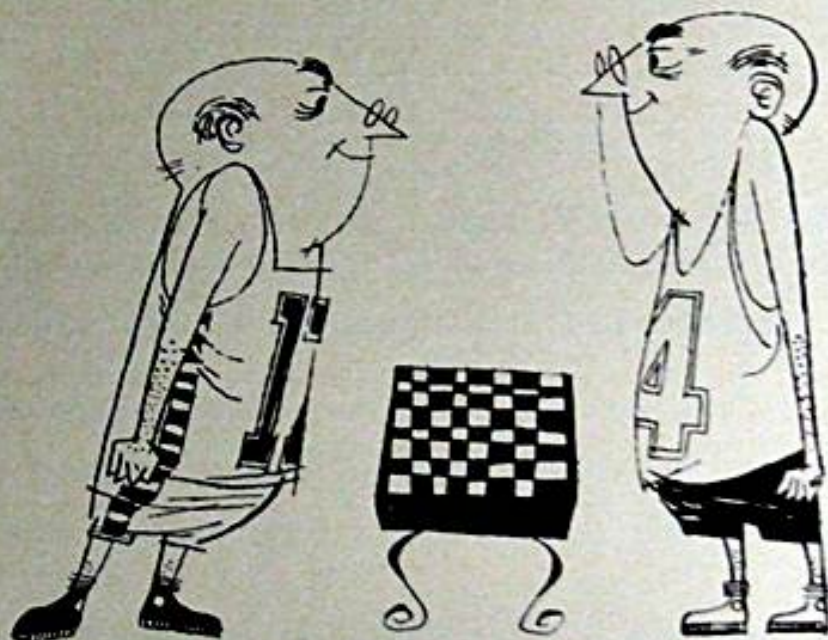
Brown nyer Barankin ellen, Barankin nyer Bellman ellen, Bellman nyer Bodenhorn ellen, minden más lehetséges játszma döntetlen. Brown az utolsó



pillanatban megbetegszik. Információinkat a szokásos módon összegezve az alábbi mátrixot kapjuk:

|    | Ba | Bo | Br |
|----|----|----|----|
| Be | -1 | 1  | 0  |
| Br | 1  | 0  | 0  |

A játékosokat az egyes játszmák előtt a csapatok maguk választják ki. A betegség miatti kiesés ellensúlyozására megállapodnak abban, hogy Brown csapatkapitány — ha kívánja — mindkét játszmában küzdhet csapataért.



A lehetőségek a következők (BaBo azt jelzi, hogy az első mérkőzésen Barankin, a másodikban Bodenhorn játszik stb.):

|      | (1)  | (2)  | (3)  | (4)  | (5)  | (6)  |
|------|------|------|------|------|------|------|
|      | BaBo | BaBr | BoBa | BoBr | BrBa | BrBo |
| BeBr | -1   | -1   | 2    | 1    | 1    | 0    |
| BrBe | 2    | 1    | -1   | 0    | -1   | 1    |
| BrBr | 1    | 1    | 1    | 0    | 1    | 0    |



Nincs nyeregpont, de (1) domináns (2) felett és (3) domináns (5) felett, így a játék az alábbi alakban írható:

|     | (2) | (4) | (5) | (6) |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| (1) | -1  | 1   | 1   | 0   |
| (3) | 1   | 0   | -1  | 1   |
| (5) | 1   | 0   | 1   | 0   |

Némi próbálgatással meghatározhatjuk a megoldást. A csökkent létszámú csapatnak 1:1:1 arányban kell stratégiáit kevernie, a másik csapat két alapmegoldást használhat, a 0:1:0:2:0:0 vagy a 0:0:0:0:1:2 arányú stratégiakeveréket\*.

### A $3 \times m$ -ES MÓDSZER ÖSSZEFOGLALÁSA

A  $3 \times m$ -es játékok megoldása a  $3 \times 3$ -asokétól csak kevésben különbözik. Mint mindig, itt is először nyeregpontot kell keresni. Ha nincs nyeregpont, akkor domináns stratégiák keresésével megpróbálunk a mátrixból sorokat vagy oszlopokat eltüntetni. Ha ezzel a módszerrel nem tudjuk a játékot jól kezelhető — vagyis  $2 \times 2$ -es,  $2 \times m$ -es vagy  $3 \times 3$ -as — játékká átalakítani, akkor kétféleképpen haladhatunk tovább:

1. Válasszunk ki tetszés szerint egy  $3 \times 3$ -as részjátékot, oldjuk meg és vizsgáljuk meg, hogy a kapott megoldás megoldása-e az eredeti játéknak is. Az eljárást addig kell ismételnünk, amíg sikerre nem vezet.

2. Osszuk fel a játékot három  $2 \times m$ -es részjátékre — a Kék 1, 2, a Kék 1, 3, ill. a Kék 2, 3 stratégiák alapján. Grafikus úton keressük meg a  $2 \times m$ -es játékok  $2 \times 2$ -es megoldásait és próbáljuk ki ezeket a  $3 \times m$ -es játékon. Ha egyik sem jó, akkor az eredeti játéknak nincs  $2 \times 2$ -es megoldása. Az 1. pontban leírtak szerint kell továbbhaladnunk.

Bár a most következő feladatokat a lehető legnagyobb jóindulattal állítottuk össze, mégis nehéz dolga lesz az Olvasónak. Majdnem olyan nehéz, mint a szerzőnek.

#### Feladatok

Határozzuk meg a következő játékok gyakoriságait és értékét.

\* Fel kell tennünk azt is, hogy a második játékost is előre meg kell határozni az első mérkőzés előtt (pl. zárt borítékban van a neve). Ellenkező esetben a második mérkőzés előtt már információnk van az ellenfél stratégiájáról. (A lektor.)



1.

Piros

|       | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-------|---|---|---|---|
| 1     | 1 | 7 | 3 | 4 |
| Kék 2 | 5 | 6 | 4 | 5 |
| 3     | 7 | 2 | 0 | 3 |

2.

Piros

|       | 1  | 2  | 3  | 4 |
|-------|----|----|----|---|
| 1     | 1  | 2  | 3  | 5 |
| Kék 2 | 10 | 11 | 12 | 4 |
| 3     | 9  | 8  | 7  | 6 |

3.

Piros

|       | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-------|---|---|---|---|
| 1     | 1 | 6 | 2 | 5 |
| Kék 2 | 5 | 1 | 6 | 2 |
| 3     | 2 | 5 | 1 | 6 |

4.

Piros

|       | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-------|---|---|---|---|
| 1     | 6 | 0 | 1 | 2 |
| Kék 2 | 0 | 3 | 1 | 0 |
| 3     | 2 | 0 | 3 | 1 |

5.

Piros

|       | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-------|---|---|---|---|
| 1     | 1 | 0 | 1 | 0 |
| Kék 2 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 3     | 1 | 0 | 0 | 1 |

6.

Piros

|       | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-------|---|---|---|---|
| 1     | 0 | 1 | 2 | 3 |
| Kék 2 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| 3     | 0 | 2 | 1 | 3 |

7.

Piros

|       | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-------|---|---|---|---|
| 1     | 8 | 0 | 6 | 7 |
| Kék 2 | 3 | 3 | 4 | 8 |
| 3     | 3 | 6 | 3 | 1 |

8.

Piros

|       | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-------|---|---|---|---|
| 1     | 3 | 4 | 0 | 2 |
| Kék 2 | 6 | 1 | 3 | 0 |
| 3     | 2 | 5 | 3 | 6 |



9.

Piros

|     |   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----|---|---|---|---|---|---|
| Kék | 1 | 1 | 3 | 5 | 3 | 1 |
|     | 2 | 4 | 2 | 0 | 0 | 2 |
|     | 3 | 1 | 2 | 1 | 4 | 4 |

10.

Piros

|     |   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|
| Kék | 1 | 4 | 3 | 3 | 2 | 2 | 6 |
|     | 2 | 6 | 0 | 4 | 2 | 6 | 2 |
|     | 3 | 0 | 7 | 3 | 6 | 2 | 2 |

12.

Piros

11.

Piros

|     |   | 1  | 2  | 3  |
|-----|---|----|----|----|
| Kék | 1 | 8  | 2  | -4 |
|     | 2 | 4  | 1  | -2 |
|     | 3 | 0  | 0  | 0  |
|     | 4 | -4 | -1 | 2  |
|     | 5 | -8 | -2 | 4  |

|     |   | 1   | 2   | 3   |
|-----|---|-----|-----|-----|
| Kék | 1 | 0   | -17 | -34 |
|     | 2 | -2  | -15 | -35 |
|     | 3 | -20 | -22 | -24 |
|     | 4 | -3  | -15 | -35 |
|     | 5 | -40 | -27 | -14 |
|     | 6 | -5  | -21 | -30 |



Piros

|       | 1  | 2   | 3   |
|-------|----|-----|-----|
| 1     | -1 | 0   | 1   |
| 2     | 1  | 0   | 0   |
| 3     | 1  | -1  | 0   |
| Kék 4 | 5  | -4  | -2  |
| 5     | 0  | 0   | 1   |
| 6     | 0  | 1   | 0   |
| 7     | 25 | -13 | -12 |

14.

Piros

|       | 1  | 2 | 3 |
|-------|----|---|---|
| 1     | 3  | 5 | 1 |
| 2     | -6 | 2 | 0 |
| Kék 3 | 5  | 4 | 3 |
| 4     | -7 | 3 | 6 |

15.

Piros

|       | 1 | 2 | 3 |
|-------|---|---|---|
| 1     | 3 | 1 | 4 |
| 2     | 1 | 5 | 9 |
| Kék 3 | 2 | 6 | 5 |
| 4     | 3 | 5 | 8 |



*Négystratégias és nagyobb játékok*

A négystratégias és nagyobb játékok megoldása bizony csak azok számára gyönyörűség, akik patológiusan vonzódnak az aritmetikához. Az elemzett helyzetek bizonyos fokig ellensúlyozzák ezt; a nagyobb játékok megoldása után nem is fogjuk magunkat olyan rosszul érezni.

## MEGOLDÁS KINYILATKOZTATÁSSAL

Számunkra a nagyobb játékok legjobb megoldási módszere a kinyilatkoztatás\*. Ha a probléma felépítése vagy bármilyen más forrás alapján sejtjük a megoldást, vizsgáljuk meg. Egyszerűen számítsuk ki, milyen átlagos nyereséget érhet el mondjuk Kék, ha feltételezett legjobb kevert stratégiáját rendre Piros tiszta stratégiái ellen alkalmazza. Ha valóban sejtjük a megoldást, akkor két dolognak kell történnie: először is ezeknek a nyereségértékeknek egyenlőknek kell lenniük. Azok ellen a stratégiák ellen azonban, amelyek nem szerepelnek Piros legjobb kevert stratégiájában, Kék jobb eredményt érhet el. Másodszor, ugyanennek az átlagos nyereségnek kell szerepelnie akkor, amikor Piros alkalmasan választott kevert stratégiáját alkalmazzuk azok ellen a tiszta stratégiák ellen, amelyek benne vannak Kék legjobb kevert stratégiájában. Kék többi stratégiája ellen Piros jobb eredményt (kisebb nyereséget) érhet el. Egy példán bemutatjuk, hogy mennyivel könnyebb ezt elmondani, mint végigcsinálni.

\* Ha az Olvasó nagyobb játékok megoldásával kíván foglalkozni, fellapozhatja a VI. részt, amelyben az itt következőknél hatásosabb módszert talál.



Vizsgáljuk meg a következő  $5 \times 5$ -ös játékot:

|     |   | Piros |   |   |   |   |
|-----|---|-------|---|---|---|---|
|     |   | 1     | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Kék | 1 | 0     | 1 | 0 | 2 | 0 |
|     | 2 | 3     | 0 | 0 | 1 | 2 |
|     | 3 | 0     | 0 | 2 | 1 | 2 |
|     | 4 | 1     | 3 | 0 | 0 | 1 |
|     | 5 | 1     | 2 | 3 | 1 | 0 |

Ha az Olvasó egy hetedhét országon túl élő varázsló hetedik fia és atyjától örökölte a csodatétel nélkülözhetetlen kellékeit, a kristálygömböt és a varázspálcát, akkor könnyen kitalálhatja, hogy Pirosnak 4:35:6:57:40 arány-





ban kell stratégiáit kevernie. (Ez annyira bonyolult számhalmaz, hogy várószőr nélkül fel sem fogható. Példánkkal nem is ez a célunk, hanem az, hogy megmutassuk, bármilyen feltételezett megoldást meg tudunk vizsgálni, hogy helyes-e vagy nem.)

A számok helyességéről úgy győződhetünk meg, hogy feltesszük, igazak és kiszámítjuk a játék értékét. Írjuk fel a gyakoriságokat a szokásos módon:

|   | 4 | 35 | 6 | 57 | 40 |
|---|---|----|---|----|----|
| 0 | 0 | 1  | 0 | 2  | 0  |
| 3 | 3 | 0  | 0 | 1  | 2  |
| 0 | 0 | 0  | 2 | 1  | 2  |
| 1 | 1 | 3  | 0 | 0  | 1  |
| 1 | 1 | 2  | 3 | 1  | 0  |

Soronként szorozzuk meg a gyakoriságokat a megfelelő nyereségértékekkel, adjuk össze az így kapott számokat és az összeget osszuk el a gyakoriságok összegével. Így Kék 1 stratégiája ellen Piros fenti stratégiája (a mátrix első sora)

$$\frac{4 \cdot 0 + 35 \cdot 1 + 6 \cdot 0 + 57 \cdot 2 + 40 \cdot 0}{4 + 35 + 6 + 57 + 40} = \frac{149}{142},$$

átlagos nyereséget eredményez. Kék 2 stratégiája ellen (a nulla eredményű szorzatokat elhagyva)

$$\frac{4 \cdot 3 + 57 \cdot 1 + 40 \cdot 2}{142} = \frac{149}{142},$$

Kék 3 ellen

$$\frac{6 \cdot 2 + 57 \cdot 1 + 40 \cdot 2}{142} = \frac{149}{142},$$

Kék 4 ellen

$$\frac{4 \cdot 1 + 35 \cdot 3 + 40 \cdot 1}{142} = \frac{149}{142},$$



végül Kék 5 ellen

$$\frac{4 \cdot 1 + 35 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 57 \cdot 1}{142} = \frac{149}{142}$$

nyereséget eredményez.

Információforrásunkat érdemes becsben tartani, hiszen ha Piros a javasolt stratégiakeverékkel dolgozik, akkor biztató eredményt kapunk. Még nem bizonyítottuk, hogy a fenti keverék valóban a legjobb: lehet, hogy Kék legjobb kevert stratégiája mondjuk csak  $\frac{148}{142}$ , vagyis  $\frac{149}{142}$ -nél kisebb nyereséget biztosít. Ezért Kék számára is kell jó kevert stratégiát keresnünk. Érintsük meg újra varázsvesszőnkkel a kristálygömböt: Kéknek 28:33:31:21:29 arányban kell stratégiáit kevernie. Kiszámítható, hogy Kék átlagos nyeresége is  $\frac{149}{142}$  egység.

Ezzel a módszerrel minden megoldást lehet ellenőrizni. Ez az egyetlen biztosítékunk az aritmetikai számítások szeszélyei valamint az emberek és a módszer gyengeségei ellen.

## NYEREGPONTOK

Ha egy nagy játékban egy vagy több nyeregpontot találunk, akkor egyszerű a megoldás. Például, tekintsük a

|                |   | Piros |    |   |    | Sorminimum |
|----------------|---|-------|----|---|----|------------|
|                |   | 1     | 2  | 3 | 4  |            |
| Kék            | 1 | 6     | 5  | 6 | 5  | 5*         |
|                | 2 | 1     | 4  | 2 | -1 | -1         |
|                | 3 | 8     | 5  | 7 | 5  | 5*         |
|                | 4 | 0     | 2  | 6 | 2  | 0          |
| Oszlop maximum |   | 8     | 5* | 7 | 5* |            |

játékot. A legnagyobb sorminimum 5, a legkisebb oszlopmaximum is 5, tehát van nyeregpont. (Négy nyeregpont is van. Ha egy játékban több



nyeregpontra van, akkor értékük egyforma.) Kék vagy a Kék 1 vagy a Kék 3 tiszta stratégiát alkalmazhatja, Piros a Piros 2 vagy a Piros 4 stratégiával, esetleg ezek keverékével játszhat. A játék értéke 5.

## DOMINÁNS STRATÉGIÁK

Miként a kisebb játékokban, itt is érdemes domináns sorokat és oszlopokat keresni. Ha találunk ilyeneket, akkor elhagyhatjuk a mátrixból, ill. nulla gyakoriságot rendelhetünk hozzá. Például, az alábbi játék valószínűleg  $3 \times 3$ -as játék. A †-tel jelzett sorok és oszlopok mind jobbak, mint a jelzés nélküli sorok, ill. oszlopok valamelyike.

|     |   | Piros |   |   |   |   |   |
|-----|---|-------|---|---|---|---|---|
|     |   | 1     | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Kék | 1 | 3     | 5 | 7 | 2 | 3 | 6 |
|     | 2 | 7     | 5 | 5 | 4 | 5 | 5 |
|     | 3 | 4     | 6 | 8 | 3 | 4 | 7 |
|     | 4 | 5     | 0 | 3 | 4 | 4 | 2 |
|     | 5 | 7     | 2 | 2 | 3 | 5 | 3 |
|     | 6 | 6     | 3 | 4 | 5 | 6 | 5 |
|     |   |       | † |   | † | † |   |

Példánkból látszik, hogy nagyobb játékokban a domináns stratégiák keresése egyszerű ugyan, de szemünk számára meglehetősen fárasztó.

## AZ ÖSSZES STRATÉGIÁT ALKALMAZZUK

Miként a  $3 \times 3$ -as játékoknál is, ha nincs nyeregpontra és nincs domináns stratégia, akkor kísérletképpen feltesszük, hogy a legjobb kevert stratégiában az összes stratégia szerepel és megpróbáljuk kiszámítani a keverés arányát. Ehhez a  $3 \times 3$ -asoknál megismerteken kívül egy újabb technikai trükkre



lesz szükségünk. Az eljárást egy  $4 \times 4$ -es játékon, mégpedig a

|     |   | Piros |   |   |   |
|-----|---|-------|---|---|---|
|     |   | 1     | 2 | 3 | 4 |
| Kék | 1 | 1     | 7 | 0 | 3 |
|     | 2 | 0     | 0 | 3 | 5 |
|     | 3 | 1     | 2 | 4 | 1 |
|     | 4 | 6     | 0 | 2 | 0 |

játékon mutatjuk be, de a módszert könnyen általánosíthatjuk tetszőleges alakú játékokra.

Szokás szerint, először Piros szempontjából vizsgáljuk meg a problémát. Vonjuk ki mindegyik nyereségértékből a közvetlenül alatta álló értéket úgy, ahogy a  $2 \times 2$ -es és  $3 \times 3$ -as játékoknál tettük. Így a

|  |   | Piros |    |    |    |
|--|---|-------|----|----|----|
|  |   | 1     | 2  | 3  | 4  |
|  | 1 | 1     | 7  | -3 | -2 |
|  | 2 | -1    | -2 | -1 | 4  |
|  | 3 | -5    | 2  | 2  | 1  |

mátrixot kapjuk. Valamely adott tiszta stratégia gyakoriságát úgy határozhatjuk meg, hogy a fenti vonalkázott mátrixból elhagyjuk a neki megfelelő oszlopot. Például, a Piros 1 stratégia gyakorisága az alábbi számok alap-



ján határozható meg:

1

|  |    |    |    |
|--|----|----|----|
|  | 7  | -3 | -2 |
|  | -2 | -1 | 4  |
|  | 2  | 2  | 1  |

A gyakoriságok meghatározása elvben — még nagy mátrixoknál is — egyszerű, csak ismerni kell a lépések sorrendjét. Könnyebb csinálni, mint magyarázni, lássunk tehát hozzá!

A vonalkázott számok alapján úgy tudjuk meghatározni a gyakoriságot, hogy a számok közé néhány nullát csempészünk. Pontosabban, bizonyos megengedhető eljárások\* segítségével azt kell elérnünk, hogy *egy sorban (vagy egy oszlopban) egy kivételével az összes szám nulla legyen*, vagyis arra törekszünk, hogy a

|    |    |    |
|----|----|----|
| 7  | -3 | -2 |
| -2 | -1 | 4  |
| 2  | 2  | 1  |

3×3-as elrendezést

|  |  |   |
|--|--|---|
|  |  | 0 |
|  |  | 0 |
|  |  | * |

\* A módszer nem olyan ostoba és esetleges, mint ahogy első látásra tűnik. A módszer helyességét komoly matematikai elmélet támasztja alá. Annak, aki tanult algebrát és tudja, hogyan kell egy determináns értékét kiszámítani, bizonyára nem okoz problémát ezt felismerni.



vagy

|   |   |   |
|---|---|---|
|   |   |   |
| 0 | * | 0 |
|   |   |   |

alakra hozzuk, ahol a sötétebb helyeken valamilyen alkalmas, az eredetitől esetleg különböző számok állnak. A sor (vagy oszlop) egyetlen nullától különböző elemét csillaggal jelöltük meg. Nagyobb mátrixok esetén hasonlóképpen járhatunk el, például az ilyen

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

alakú elrendezést így

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
|   |   |   |   |
|   |   |   |   |
| 0 | * | 0 | 0 |
|   |   |   |   |

szeretnénk átalakítani. Miért fontos az, hogy bizonyos helyeken nullák álljanak? Azért, mert ha egyszer ezt elérjük, akkor a csillaggal jelölt elemtől északra, délre, keletre, nyugatra álló elemeket elhagyhatjuk és a csillaggal jelölt



elemet szorzótényezőként kihozhatjuk a mátrix elé. Így

|   |  |  |
|---|--|--|
| * |  |  |
| 0 |  |  |
| 0 |  |  |

ekvivalens a

|   |  |  |
|---|--|--|
| * |  |  |
|   |  |  |
|   |  |  |

elrendezéssel, ami ekvivalens a

|  |  |  |
|--|--|--|
|  |  |  |
|  |  |  |

 $\cdot$ 

|   |
|---|
| * |
|---|

szorzattal. Hasonlóképpen

|   |   |   |
|---|---|---|
|   |   |   |
| 0 | * | 0 |
|   |   |   |

 $=$ 

|  |   |  |
|--|---|--|
|  |   |  |
|  | * |  |
|  |   |  |

 $=$ 

|   |
|---|
| * |
|---|

 $\cdot$ 

|  |  |
|--|--|
|  |  |
|  |  |

(Itt az utolsó lépésben a sarkokon álló elemeket egymás mellé toltuk.)

Az eljárással egy  $3 \times 3$ -as elrendezést egy — a csillag helyén álló — számmal megszorozott  $2 \times 2$ -es elrendezéssé alakítottuk át. A  $2 \times 2$ -es elrendezés értékét — az átlók szorzatának különbségeként — ki tudjuk számítani. Ha  $4 \times 4$ -es elrendezésből indulunk ki, akkor az eljárást kétszer egymás után kell alkalmazni. Így két számmal szorzott  $2 \times 2$ -es elrendezéshez jutunk.



Meggyőződünk arról, hogy érdemes bizonyos elemeket nullává tenni. Lásuk, hogyan lehet a gyakorlatban ezt elérni. Az átalakításnál a következő szabályokat kell betartanunk:

1. Szabad egy sorhoz egy másik sort — elemről elemre — hozzáadni.
2. Szabad egy sorból egy másik sort — elemről elemre — kivonni.
3. Mielőtt hozzáadnánk egy sort egy másikhoz, megszorozhatjuk akármi-lyen rögzített számmal.

4. Az oszlopokra ugyanazok érvényesek, mint a sorokra, az előző szabályok akkor is alkalmazhatók, ha sorok helyett mindig oszlopokat mondunk.

5. Az előző szabályokat ügyesen kell alkalmazni.

Az 5. szabályra azért van szükség, mert bizonyos helyeken könnyebb nullát csinálni, mint másokon, tehát érdemes egy kicsit körülnézni.

Térjünk vissza a

|    |    |    |
|----|----|----|
| 7  | -3 | -2 |
| -2 | -1 | 4  |
| 2  | 2  | 1  |

elrendezéshez és alkalmazzuk szabályainkat. Az utolsó sorban két kettes és egy egyes van (5. szabály). Kivonással (2. szabály) és szorzással (3. szabály) elérhetjük, hogy az utolsó sorban egy kivételével csupa nulla álljon. Vonjuk ki az első oszlopból a másodikat:

|    |    |    |
|----|----|----|
| 10 | -3 | -2 |
| -1 | -1 | 4  |
| 0  | 2  | 1  |

Így egy helyen nullát kaptunk. Továbbmegyünk, vonjuk ki a harmadik oszlop kétszeresét a második oszlopból, így a

|    |    |    |
|----|----|----|
| 10 | 1  | -2 |
| -1 | -9 | 4  |
| 0  | 0  | 1* |



elrendezéshez jutunk. Éppen ez volt a célunk: az utolsó sorban egy kivétellel mindegyik helyen nulla áll. Most már egyszerűen megkaphatjuk a keresett gyakoriságértéket:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 10 & 1 & -2 \\ \hline -1 & -9 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1^* \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 10 & 1 & \\ \hline -1 & -9 & \\ \hline & & 1^* \\ \hline \end{array} \\
 \\
 = \begin{array}{|c|} \hline 1^* \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline 10 & 1 \\ \hline -1 & -9 \\ \hline \end{array} \\
 \\
 = 1 \cdot [10 \cdot (-9) - 1 \cdot (-1)] = -89.$$

tehát a 156. oldalon szereplő játékban a Piros 1 stratégia gyakorisága 89. Aki biztos a dolgában, az számítsa ki a Piros 2 stratégia gyakoriságát, mielőtt továbbolvasná a könyvet.

A Piros 2 stratégia gyakoriságát a

|    | Piros |    |    |    |
|----|-------|----|----|----|
|    | 1     | 2  | 3  | 4  |
| 1  | 1     | 7  | -3 | -2 |
| -1 | -1    | -2 | -1 | 4  |
| -5 | -5    | 2  | 2  | 1  |

mátrix második oszlopának elhagyása után maradó

|    | 3  | 4  |
|----|----|----|
| 1  | -3 | -2 |
| -1 | -1 | 4  |
| -5 | 2  | 1  |



mátrix alapján határozhatjuk meg. Itt a második sorban lehet könnyen nullákat csinálni. Vonjuk ki a második oszlopot az elsőből:

|    |    |    |
|----|----|----|
| 4  | -3 | -2 |
| 0  | -1 | 4  |
| -7 | 2  | 1  |

Adjuk hozzá a második oszlop négyszeresét a harmadik oszlophoz:

|    |     |     |
|----|-----|-----|
| 4  | -3  | -14 |
| 0  | -1* | 0   |
| -7 | 2   | 9   |

Ebből meghatározhatjuk a keresett gyakoriságértéket:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & & -14 \\ \hline & -1^* & \\ \hline -7 & & 9 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline -1^* \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & -14 \\ \hline -7 & 9 \\ \hline \end{array}$$

$$= -1 \cdot [4 \cdot 9 - (-7) \cdot (-14)] = 62.$$

Hasonló módszerrel Piros 3, ill. Piros 4 gyakoriságára 119, ill. 83 adódik.

Kék legjobb kevert stratégiájának meghatározásához térjünk vissza az eredeti mátrixhoz:

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 7 | 0 | 3 |
| 2 | 0 | 0 | 3 | 5 |
| 3 | 1 | 2 | 4 | 1 |
| 4 | 6 | 0 | 2 | 0 |

Kék



Vonjuk ki mindegyik oszlopból a tőle közvetlenül jobbra álló oszlopot:

|   |    |    |    |
|---|----|----|----|
| 1 | -6 | 7  | -3 |
| 2 | 0  | -3 | -2 |
| 3 | -1 | -2 | 3  |
| 4 | 6  | -2 | 2  |

Kék

Az első sort elhagyva a

|    |    |    |
|----|----|----|
| 0  | -3 | -2 |
| -1 | -2 | 3  |
| 6  | -2 | 2  |

mátrix adódik. A számítások elvégzéséhez szükséges nullákat úgy kaphatjuk meg, hogy a második sor hatszorosát hozzáadjuk a harmadik sorhoz:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & -3 & -2 \\ \hline -1^* & -2 & 3 \\ \hline 0 & -14 & 20 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & -3 & -2 \\ \hline -1^* & & \\ \hline & -14 & 20 \\ \hline \end{array}$$

$$= \begin{array}{|c|} \hline -1^* \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline -3 & -2 \\ \hline -14 & 20 \\ \hline \end{array}$$

$$= -1 \cdot [(-3) \cdot 20 - (-14) \cdot (-2)] = 88.$$

Így Kék 1 gyakoriséga 88. Hasonlóan határozhatjuk meg Kék többi stra-



tégiájának arányát. Eredményeinket a következőkben foglalhatjuk össze:

|                 |   | Piros |    |     |    | Kék<br>aránya |
|-----------------|---|-------|----|-----|----|---------------|
|                 |   | 1     | 2  | 3   | 4  |               |
| Kék             | 1 | 1     | 7  | 0   | 3  | 88            |
|                 | 2 | 0     | 0  | 3   | 5  | 86            |
|                 | 3 | 1     | 2  | 4   | 1  | 78            |
|                 | 4 | 6     | 0  | 2   | 0  | 101           |
| Piros<br>aránya |   | 89    | 62 | 119 | 83 |               |

Még igazolnunk kell azt, hogy valóban megoldást kaptunk. A játék értékét meghatározhatjuk például úgy, hogy Piros legjobb kevert stratégiáját mondjuk Kék 2 ellen alkalmazzuk (a legjobb kevert stratégiát persze akármelyik tiszta stratégia ellen használva ugyanazt az eredményt kapjuk). A játék értéke

$$\frac{119 \cdot 3 + 83 \cdot 5}{89 + 62 + 119 + 83} = \frac{772}{353}$$

egység, tehát Kék nyer, jó játékkal játszománként átlagosan két egységnél valamivel többet.

Nem merünk feladatokat engedni az Olvasó közelébe addig, amíg nem mutattuk be legalább egy példán a módszer ismételt alkalmazását. Tekintsük a

|     |   | Piros |   |   |   |   |
|-----|---|-------|---|---|---|---|
|     |   | 1     | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Kék | 1 | 0     | 1 | 0 | 2 | 0 |
|     | 2 | 3     | 0 | 0 | 1 | 2 |
|     | 3 | 0     | 0 | 2 | 1 | 2 |
|     | 4 | 1     | 3 | 0 | 0 | 1 |
|     | 5 | 1     | 2 | 3 | 1 | 0 |



játékot. Az Olvasóra bízunk annak igazolását, hogy nincs nyeregpont és domináns stratégia (vagy van?). Piros legjobb kevert stratégiájának meghatározása céljából vonjunk ki minden sort a közvetlenül felette álló sorból:

|  |   | Piros |    |    |    |    |
|--|---|-------|----|----|----|----|
|  |   | 1     | 2  | 3  | 4  | 5  |
|  | 1 | -3    | 1  | 0  | 1  | -2 |
|  | 2 | 3     | 0  | -2 | 0  | 0  |
|  | 3 | -1    | -3 | 2  | 1  | 1  |
|  | 4 | 0     | 1  | -3 | -1 | 1  |

Határozzuk meg az így kapott mátrix alapján például Piros 3 gyakoriságát. Hagyjuk el Piros 3 oszlopát. Így a

|   | 1  | 2  | 3  | 4  |
|---|----|----|----|----|
| 1 | -3 | 1  | 0  | 1  |
| 2 | 3* | 0  | -2 | 0  |
| 3 | -1 | -3 | 2  | 1  |
| 4 | 0  | 1  | -3 | -1 |

mátrixot kapjuk. Szerencsénkre a második sor máris a kívánt alakú, így anélkül, hogy bármilyen műveletet végeznénk, máris megvagyunk az első lépéssel. A 3\*-tól északra, délre és keletre levő elemeket elhagyva:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & 1 & 1 & -2 \\ \hline 3^* & & & \\ \hline & -3 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 3^* \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & -2 \\ \hline -3 & 1 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ \hline \end{array}$$



A  $3 \times 3$ -as második oszlopát alakíthatjuk át a legkönnyebben. Csak a harmadik sort a másodikhoz, majd az elsőhöz kell hozzáadnunk:

$$\begin{aligned}
 & \boxed{3^*} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \boxed{3^*} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1^* & 1 \end{bmatrix} \\
 & = \boxed{3^*} \cdot \begin{bmatrix} 2 & & -1 \\ -2 & & 2 \\ & -1^* & \end{bmatrix} \\
 & = \boxed{3^*} \cdot \boxed{-1^*} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \\
 & = 3 \cdot (-1) \cdot [2 \cdot 2 - (-2) \cdot (-1)] = -6.
 \end{aligned}$$

Piros 3 gyakorisága tehát 6, ami azt mutatja, hogy a IV. rész elején ennek a játéknak a megoldását valóban szakképzett varázslók nyilatkoztatták ki.

## 22. Példa. A használt kocsi

Gladyn és Don egy 800 dollár értékű autót örököltek. A közös tulajdon hátrányait ismerték, ezért elhatározták, hogy egymás közötti titkos árveréssel döntenek el, hogy kié legyen a kocsi. A többet kínáló testvér kapja a kocsit, de a felajánlott pénzösszeget testvérenek adja át. Ha ugyanannyit ajánlanak fel érte — ez elképzelhető, mert abban egyeztek meg, hogy csak 100 dollár egész számú többszöröseit ajánlhatják fel — akkor pénzfeldobással döntenek el, hogy kié lesz a kocsi, pénzesere nem történik. Gladynnak 500, Donnak 800 dollárja volt. Hogyan kell játszaniuk?

Ha a játszma döntetlen, akkor várható nyereségük egyforma. Mivel az autó értéke 800 dollár, a várható nyereség ebben az esetben 400 dollár. Ennek felhasználásával felírhatjuk a nyereségmátrixot.





A mátrixban Gladyn várható nyereségét tüntettük fel (100 dolláros egységekben):

|                 |   | Don ajánlata |   |   |    |    |   |   |   | Sor minimum |    |
|-----------------|---|--------------|---|---|----|----|---|---|---|-------------|----|
|                 |   | 0            | 1 | 2 | 3  | 4  | 5 | 6 | 7 | 8           |    |
| Gladyn ajánlata | 0 | 4            | 1 | 2 | 3  | 4  | 5 | 6 | 7 | 8           | 1  |
|                 | 1 | 7            | 4 | 2 | 3  | 4  | 5 | 6 | 7 | 8           | 2  |
|                 | 2 | 6            | 6 | 4 | 3  | 4  | 5 | 6 | 7 | 8           | 3  |
|                 | 3 | 5            | 5 | 5 | 4  | 4  | 5 | 6 | 7 | 8           | 4* |
|                 | 4 | 4            | 4 | 4 | 4  | 4  | 5 | 6 | 7 | 8           | 4* |
|                 | 5 | 3            | 3 | 3 | 3  | 3  | 4 | 6 | 7 | 8           | 3  |
| Oszlop maximum  |   | 7            | 6 | 5 | 4* | 4* | 5 | 6 | 7 | 8           |    |



Először nyeregpontot keresünk, és mindjárt találunk is, mivel a minimax és a maximin egyenlő (4-gyel). A játéknak négy nyeregpontja van, a 300 és a 400 dolláros ajánlatoknál. Valójában jobb, ha Gladyn a 300 dollárt választja, hiszen így bátyja nagyobb büntetést fizet, ha rosszul licitál.

### 23. Példa. Növényvédelem

A most következő példa hasonló az előzőhöz. Harris és Danskin elhatározták, hogy felszámolják gyümölcsfa-permetező cégüket. A társak két kitűnő gépet szerettek volna a cégtől megvenni, egy 400 dollár értékű légsűrítőt és egy 600 dollár értékű elektromos targoncát. Elhatározták, hogy egymás között elárverezik ezeket a tárgyakat. Úgy határoztak, hogy mindegyik



cikkért csak 200 dollár egész számú többszöröseit lehet felajánlani. Döntetlen esetén egy játszma pókerrel döntik el, hogy kié legyen a gép. Az eladásból származó haszon a cégé, ezért ezen a partnerek egyenlő arányban osztozkodnak.



Az árverési ajánlatokat két számjeggyel jelezhetjük, például a 42 azt jelenti, hogy a játékos a légsűrítőért 400, a targoncáért 200 dollárt ajánl fel. Ennek alapján könnyen felírhatjuk a nyereségmátrixot, mondjuk Harris szempontjából vizsgálva a helyzetet. Például, ha Harris a 22, Danskin a 06 stratégiát választja, akkor Harris megkapja a 400 dollár értékű légsűrítőt és a  $200 + 600$  dollár bevétel felét, 400 dollárt. Mivel 200-at fizet, végül is 600-at kap. Döntetlen esetén a pókerjáték kiszámíthatatlanságára való tekintettel az értékeket megfelezzük. A mátrix a következő:

|                   |    | Danskin |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    | Sor<br>minimum |
|-------------------|----|---------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----------------|
|                   |    | 00      | 02 | 04 | 06 | 20 | 22 | 24 | 26 | 40 | 42 | 44 | 46 |                |
| Harris            | 00 | 5       | 3  | 4  | 5  | 4  | 2  | 3  | 4  | 5  | 3  | 4  | 5  | 2              |
|                   | 02 | 7       | 5  | 4  | 5  | 6  | 4  | 3  | 4  | 7  | 5  | 4  | 5  | 3              |
|                   | 04 | 6       | 6  | 5  | 5  | 5  | 5  | 4  | 4  | 6  | 6  | 5  | 5  | 4              |
|                   | 06 | 5       | 5  | 5  | 5  | 4  | 4  | 4  | 4  | 5  | 5  | 5  | 5  | 4              |
|                   | 20 | 6       | 4  | 5  | 6  | 5  | 3  | 4  | 5  | 5  | 3  | 4  | 5  | 3              |
|                   | 22 | 8       | 6  | 5  | 6  | 7  | 5  | 4  | 5  | 7  | 5  | 4  | 5  | 4              |
|                   | 24 | 7       | 7  | 6  | 6  | 6  | 6  | 5  | 5  | 6  | 6  | 5  | 5  | 5*             |
|                   | 26 | 6       | 6  | 6  | 6  | 5  | 5  | 5  | 5  | 5  | 5  | 5  | 5  | 5*             |
|                   | 40 | 5       | 3  | 4  | 5  | 5  | 3  | 4  | 5  | 5  | 3  | 4  | 5  | 3              |
|                   | 42 | 7       | 5  | 4  | 5  | 7  | 5  | 4  | 5  | 7  | 5  | 4  | 5  | 4              |
|                   | 44 | 6       | 6  | 5  | 5  | 6  | 6  | 5  | 5  | 6  | 6  | 5  | 5  | 5*             |
|                   | 46 | 5       | 5  | 5  | 5  | 5  | 5  | 5  | 5  | 5  | 5  | 5  | 5  | 5*             |
| Oszlop<br>maximum |    | 8       | 7  | 6  | 6  | 7  | 6  | 5* | 5* | 7  | 6  | 5* | 5* |                |

Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy ebben a  $12 \times 12$ -es játékban csak úgy hemzsegnének a nyeregpontok. A 24, 26, 44 és 46 stratégiáknak megfelelően 16 van belőlük. Ha a játékosok jól játszanak, akkor mindegy, hogy melyik nyeregpont-stratégiát alkalmazzák. A rossz játék büntetése azonban nyeregpont-stratégiaként változó. Például, ha Harris a légsűrítőért és a



targoncáért rendre 200, ill. 400 dollárt ajánl fel, akkor haszna, Danskin gondatlansága esetén 700 dollár is lehet. Ha Danskin teszi ezt az ajánlatot és Harris figyelmetlen, akkor nyeresége esetleg csak 300 dollár lesz. Ha egyikük sem él nyeregpont-stratégia adta lehetőséggel, akkor a nyereség 200 és 800 dollár között változhat.

Mivel a játék értéke Harris számára 500 dollár, úgy tűnik, mintha Danskinnal szemben igazságtalan volna a játék. Valójában a játék szimmetrikus: a gépek értéke 1000 dollár, Danskin ennek felét kapja.

Ebben és az előző példában olyan megjegyzéseket tettünk, hogy az egyik jó stratégia jobbolehet, mint a másik. A játékelmélettel foglalkozó matematikusok jelentős része ezt nem ismeri el. Azt mondják, hogy a minimax elv — az, hogy nyeregpont létezése esetén a maximin és a minimax egyenlő — elegendő a megoldáshoz, ezeken kívül semmiféle vizsgálatra nincs szükség. Álláspontjukat azzal indokolják, hogy a nyeregpontokat annak feltevésével kerestük, hogy az ellenfél intelligens. Ilyen kiindulás után nem fordulhatunk vissza, nem tehetjük fel azt, hogy az ellenfél mégsem intelligens, vagyis nem nyeregpont-stratégiát alkalmaz.

A szerző tiszteli ugyan ezt az álláspontot, de számára nem túlságosan szimpatikus.

#### 24. Példa. Színpóker

Mel és Ray nem számolnak valami megbízhatóan. Ez egy kicsit gátolja őket abban, hogy a hagyományos pókert játsszák. A színeket viszont kitűnően ismerik, ezért kidolgozták a póker egy leegyszerűsített változatát. A játékosok befizetnek 1 dollárt a bankba. Ezután egy jól megkevert kártyacsomagból kapnak egy-egy lapot. Ezen kívül újabb lapot nem kaphatnak. A fekete jobb, mint a piros, egyébként a játszma döntetlen.

Az első játékos, Mel vagy tartja a tétet (passzol), vagy még egy dollárral rálicitál. Ha tartja, akkor leterítik a lapokat és a bank vagyonát az kapja meg, akinek jobb lapja van (ha a lapok egyformák, akkor megfelezik a pénzt). Ha rálicitál 1 dollárt, akkor Ray vagy bedobja a lapot (és így veszít) vagy megadja ő is az 1 dollárt (és leterítik a lapokat) vagy 2 dollárral rálicitál.

Ha Ray rálicitál, akkor Mel vagy bedobja a lapot (és így veszít) vagy megadja az 1 dollárt (és leterítik a lapokat).

Így a játékosok játszmánként 1, 2 vagy 3 dollárt kockáztatnak. Különböző stratégiákat azzal jellemezhetjük, hogy mennyit hajlandók áldozni, ha piros, ill. fekete lap van a kezükben. Például, (1, 3) jelentse azt a stratégiát, amellyel egy játékos 1 dollárt kockáztat, ha piros lap van a kezében és 3 dollárt, ha fekete. A játékosoknak kilenc ilyen stratégiájuk van.

A nyereségmátrix felírása könnyű, de unalmas. A különböző stratégia-párokhoz tartozó nyereségértékeket ilyen számításokkal határozhatjuk meg



(példaként a Mel (2, 2) és Ray (3, 2) stratégiáját mutatjuk be):

|           |                             | Ray lapja                     |                                |
|-----------|-----------------------------|-------------------------------|--------------------------------|
|           |                             | Piros és<br>3 dollárban fogad | Fekete és<br>2 dollárban fogad |
| Mel lapja | Piros és 2 dollárban fogad  | -2                            | -2                             |
|           | Fekete és 2 dollárban fogad | -2                            | 0                              |

A két bal oldali esetben Mel 2 dollárt veszít: Ray nagy tétjével kiblöffölte őt a játékból. A jobb felső sarokban levő 2 dolláros veszteség jobb lap elleni leterítésből adódik, a jobb alsó nulla egyforma lapot, tehát döntetlent jelent. A kártyacsomagban a piros és a fekete lapok száma megegyezik, így a négy elemnek megfelelő négy esemény valószínűsége egyforma. Ezért Mel (2, 2)

|                   |     | Ray |     |     |     |     |     |     |     |     | Sor<br>minimum |
|-------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----------------|
|                   |     | 1,1 | 1,2 | 1,3 | 2,1 | 2,2 | 2,3 | 3,1 | 3,2 | 3,3 |                |
| Mel               | 1,1 | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0*             |
|                   | 1,2 | 1   | 0   | -2  | 2   | 1   | -1  | -2  | -3  | -5  | -5             |
|                   | 1,3 | 1   | 0   | 0   | 2   | 1   | 1   | 3   | 2   | 2   | 0*             |
|                   | 2,1 | 3   | 0   | 0   | 2   | -1  | -1  | 0   | -3  | -3  | -3             |
|                   | 2,2 | 4   | 0   | -2  | 4   | 0   | -2  | -2  | -6  | -8  | -8             |
|                   | 2,3 | 4   | 0   | 0   | 4   | 0   | 0   | 3   | -1  | -1  | -1             |
|                   | 3,1 | 3   | 0   | -1  | 2   | -1  | -2  | 2   | -1  | -2  | -2             |
|                   | 3,2 | 4   | 0   | -3  | 4   | 0   | -3  | 0   | -4  | -7  | -7             |
|                   | 3,3 | 4   | 0   | -1  | 4   | 0   | -1  | 5   | 1   | 0   | -1             |
| Oszlop<br>maximum |     | 4   | 0*  | 0*  | 4   | 1   | 1   | 5   | 2   | 2   |                |



stratégiáját Ray (3, 2) stratégiája ellen alkalmazva az átlagos nyereség

$$\frac{1 \cdot (-2) + 1 \cdot (-2) + 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 0}{1 + 1 + 1 + 1} = -\frac{6}{4}$$

dollár, vagyis Mel  $6/4$  dollárt veszít. Mivel dollár az egység, a negyedek 25 centesek. Kézenfekvő, hogy a nyereségmátrixban ezeket vegyük egységnek (tehát például a  $-6/4$  nyereséget  $-6$  egységnek vesszük).

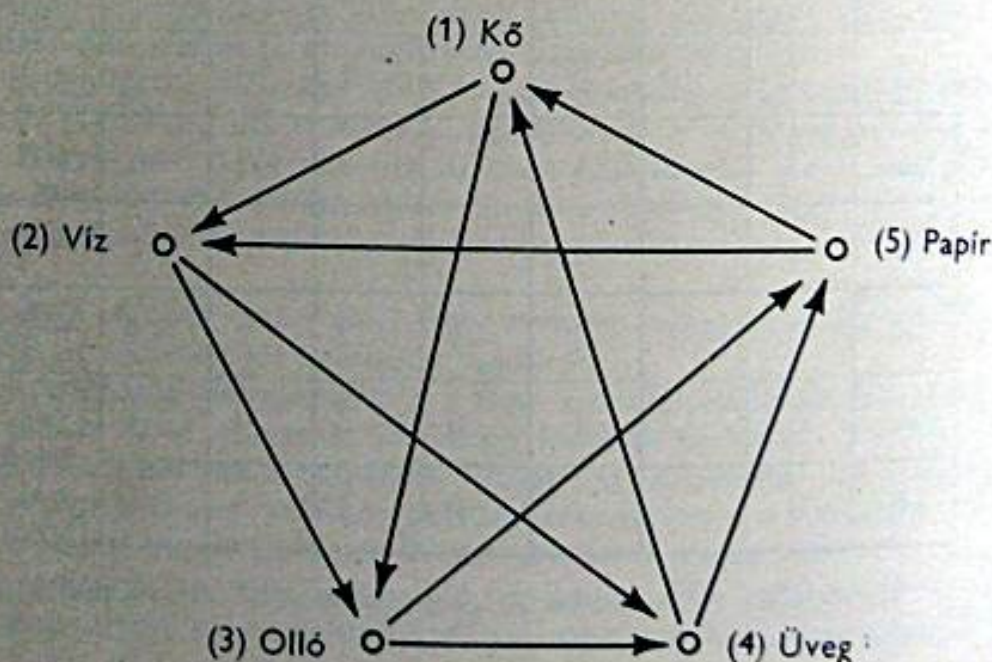
Az elemzés szerencsére nem nehéz: a mátrixnak négy nyeregpontja van. Ezeket a Mel (1, 1), ill. (1, 3) és a Ray (1, 2) ill. (1, 3) stratégiák metszéspontjánál találjuk. Így egyik játékosnak sem kell blöffölnie abban az értelemben, hogy rossz lapra sokat tesz fel, de Mel kis (Ray közepes) téttel is küzdhet jó lap ellen.

A nyeregpont értéke nulla, tehát a játék igazságos. Ez kicsit meglepő, hiszen a játék nem szimmetrikus. Példánk rávilágít arra, hogy milyen bonyolult lehet az igazi póker elemzése.

## 25. Példa. Nagyobb gyerekeknek

A III. részben foglalkoztunk a gyerekek ismert játékával, a kő—papír—olló játékkal. Öt tárgy esetére ezt a játékot két alapvetően különböző módon általánosíthatjuk. Az egyik megoldása intuitívan nyilvánvaló, a másiké nem.

Az általánosított játék neve kő—víz—olló—üveg—papír játék. Minden gyereknek természetes, hogy a víz megnedvesíti a követ és a papírt, az olló drágább, mint a víz és a kő, az üveg sokkal törékenyebb, mint a víz és az olló, a papír hajlékonyabb, mint az olló és az üveg, végül a kő keményebb,



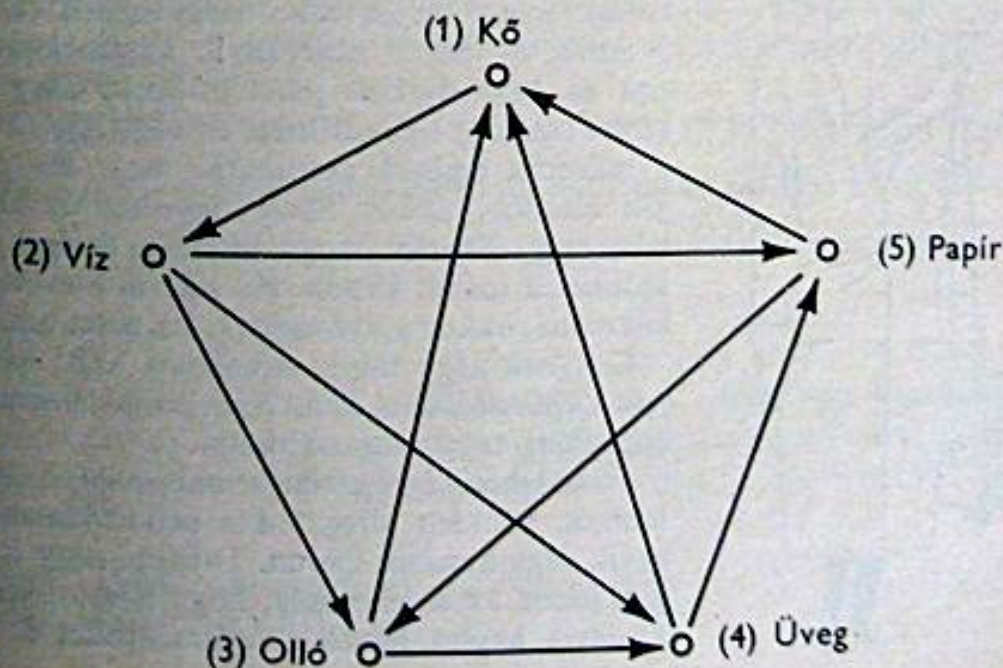


mint az üveg és a papír. Az összefüggéseket a következő rajzon nyilakkal jelöltük meg, a nyíl mindig a „jobbik” felé mutat.

A lehetséges eseteket Kék szemszögéből vizsgálva legyen a nyereség 1, ha Kék nyer, 0 ha a játszma döntetlen és  $-1$ , ha Kék veszít. A stratégiákat az előző rajzon szereplő számokkal jelölve a nyereségmátrix a következő:

|     |   | Piros |    |    |    |    |
|-----|---|-------|----|----|----|----|
|     |   | 1     | 2  | 3  | 4  | 5  |
| Kék | 1 | 0     | -1 | -1 | 1  | 1  |
|     | 2 | 1     | 0  | -1 | -1 | 1  |
|     | 3 | 1     | 1  | 0  | -1 | -1 |
|     | 4 | -1    | 1  | 1  | 0  | -1 |
|     | 5 | -1    | -1 | 1  | 1  | 0  |

Nyeregpont, domináns nincs, a megoldást az összes stratégián alapuló módszer adja meg: a játékosoknak  $1:1:1:1:1$  arányban kell stratégiáikat keverniük. Ha három nyíl irányát megváltoztatjuk, — például annak alapján, hogy a papír jobban ég, mint a víz, az olló elvágja a papírt és a kő eltöri az üveget, — vagyis





akkor a nyereségmátrix így módosul:

|     |   | Piros |    |    |    |    |
|-----|---|-------|----|----|----|----|
|     |   | 1     | 2  | 3  | 4  | 5  |
| Kék | 1 | 0     | -1 | 1  | 1  | 1  |
|     | 2 | 1     | 0  | -1 | -1 | -1 |
|     | 3 | -1    | 1  | 0  | -1 | 1  |
|     | 4 | -1    | 1  | 1  | 0  | -1 |
|     | 5 | -1    | 1  | -1 | 1  | 0  |

Némi keresgélés után megkaphatjuk a megoldást: most a 3:3:1:1:1 arányú stratégia-keverék a legjobb.

## 26. Példa. A végrehajtó



Gary, a végrehajtó, Stevet szeretné elcsípni. Steve két kapun — a bal oldalin vagy a jobb oldalin — távozhat az épületből. Steve barátja, Scott is az épületben tartózkodik és kész segítséget nyújtani Stevenak, hogy olajra lépjen. Mivel eddig még sohasem voltak ilyen helyzetben, nem ismerik Garyt.

Steve és Scott akármelyik kapun kimehetnek és bármelyikük jöhet elsőnek. Gary egyszerre csak egy ajtónál lehet és vagy az első vagy a második embert szólíthatja meg. Ha Scott jön elsőnek, akkor Steve figyelheti az ablakból, hogy Scottot megszólítják-e, és így megszökhethet a másik kapun. Ha sikerül Stevevel találkoznia, akkor a nyereség 1, ha nem, akkor 0.

Garynek négy tiszta stratégiája van: bármelyik kapunál állhat és az első kilépő embert elengedheti vagy megszólíthatja.

Steve lehetőségei gazdagabbak — és bonyolultabbak. Minden vizsgálódás nélkül kimehet az egyik vagy a másik kapun. További négy stratégiát jelent az a lehetőség, hogy Scottot kiküldi az egyik kapun, figyeli a fejleményeket és vagy



megszökik a másik kapun, vagy követi Scottot. Négy ilyen típusú stratégia van, aszerint, hogy Scott melyik kapun megy ki és hogy Steve követi-e őt vagy a másik kaput választja.

A játék  $4 \times 6$ -os. A tiszta stratégiákat meghatároztuk, úgy hogy semmi nehézséget nem okoz a nyereségmátrix felírása. Jeleink a következők:  $B$  és  $J$  azt jelenti, hogy Steve a bal oldali vagy a jobb oldali kapun megy ki,  $b$  és  $j$  pedig Scottal kapcsolatban jelenti ugyanezeket:

|                   |                           | Steve és Scott |            |               |               |               |               |
|-------------------|---------------------------|----------------|------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| A figyelt<br>ajtó | A megszólított<br>személy | $B$<br>(1)     | $J$<br>(2) | $b, B$<br>(3) | $b, J$<br>(4) | $j, J$<br>(5) | $j, B$<br>(6) |
| Bal               | Első (1)                  | 1              | 0          | 0             | 0             | 0             | 1             |
|                   | Második (2)               | 0              | 0          | 1             | 0             | 0             | 0             |
| Jobb              | Első (3)                  | 0              | 1          | 0             | 1             | 0             | 0             |
|                   | Második (4)               | 0              | 0          | 0             | 0             | 1             | 0             |

Szokásos módszerünkkel a megoldás semmi nehézséget sem jelent, a játékban több alap kevert stratégia is található: Steve bármelyik négy olyan stratégiáját kiválaszthatjuk, amelynek  $4 \times 4$ -es mátrixában minden sorban és minden oszlopban szerepel egyes. A kiválasztott stratégiákat  $1:1:1:1$  arányban kell kevernie. Ilyen stratégianégyest alkotnak például a Steve 3, 4, 5, 6 stratégiák.

Gary legjobb kevert stratégiája az  $1:1:1:1$  arányú keverék, a játék értéke számára  $\frac{1}{4}$ . Ha Steve egyedül lenne az épületben, akkor a játék értéke  $\frac{1}{2}$  lenne. Ez azt mutatja, hogy Scott jelenléte Steve számára nagyon értékes.

## 27. Példa. Egyszerű snóbli

A játékot ketten játsszák. Mindegyikük vagy elrejt egy pénzdarabot a markában vagy nem. Ezután mindegyik játékos megpróbálja kitalálni, hogy kettejük kezében összesen hány pénzdarab van. A lehetséges stratégiák a következők:

- üres marok, az összeg 0;
- üres marok, az összeg 1;



c) van pénz a markában, az összeg 1;  
 d) van pénz a markában, az összeg 2.  
 Legyen a nyereség 0, ha a játszma döntetlen, 1, ha Kék nyer,  $-1$ , ha Piros nyer. Így a nyereségmátrix:

|     |   | Piros |      |      |      |
|-----|---|-------|------|------|------|
|     |   | 1     | 2    | 3    | 4    |
| Kék | 1 | 0     | 1    | $-1$ | 0    |
|     | 2 | $-1$  | 0    | 0    | 1    |
|     | 3 | 1     | 0    | 0    | $-1$ |
|     | 4 | 0     | $-1$ | 1    | 0    |

Nincs nyeregpont, nincs domináns stratégia és az összes stratégiára épülő módszer csupa nulla gyakoriságot ad, tehát bajban vagyunk: olyan részjátékot kell keresnünk, amely az eredeti játéknak is megoldása. A

|     |   | Piros |   |   |      |
|-----|---|-------|---|---|------|
|     |   | 1     | 2 | 3 | 4    |
| Kék | 2 | $-1$  | 0 | 0 | 1    |
|     | 3 | 1     | 0 | 0 | $-1$ |

$2 \times 4$ -es részjáték alapján meghatározhatjuk a megoldást. A Kék 2 és 3 stratégiákat  $1:1$  arányban, Piros stratégiáit pedig  $1:0:0:1$  arányban kell kevernünk. Ez az eredeti játéknak is megoldása.

Nemcsak ezzel a jó kevert stratégiával lehet játszani, hanem azzal is, amelyet a

|     |   | Piros |      |      |   |
|-----|---|-------|------|------|---|
|     |   | 1     | 2    | 3    | 4 |
| Kék | 1 | 0     | 1    | $-1$ | 0 |
|     | 4 | 0     | $-1$ | 1    | 0 |



2×4-es játékból kiindulva kapunk. Ennek megoldása is kielégíti az eredeti játékot. Kéknek 1:0:0:1, Pirosnak 0:1:1:0 arányban kell stratégiáit kevernie.

A játékot tehát kétféleképpen is lehet jól játszani: a játékosoknak vagy az 1 és 4 vagy a 2 és 3 stratégiájukat kell egyenlő arányban keverniük. Világos, hogy tovább is léphetünk, általánosabb megoldást kapunk, ha mindkét kevert stratégiára építünk, vagyis mindegyik tiszta stratégiát alkalmazzuk, de az 1 és 4, ill. a 2 és 3 stratégiát egyforma gyakorisággal. (Pirosra is, Kékre is igaz mindez.) Például, 7:3:3:7 vagy 3:7:7:3 vagy akármilyen más, ehhez hasonló jellegű stratégia-keverék alkalmazható.

Most találkoztunk először azzal a jelenséggel, hogy egy játékban több jó kevert stratégia van. Az olyan játékok körében, amelyekben tiszta stratégia a legjobb, már láttunk ilyet: akkor, amikor hemzsegték a nyeregpontok. Az elv általános és talán magától értetődő is: Ha egy játéknak több megoldása van — lehetnek akár tiszta, akár kevert stratégiák — akkor ezeket tetszés szerinti arányban keverhetjük.

## 28. Példa. „Adminisztratív” dilemma

A gengszterbanda vezére elővette másfél literes pénztárcáját és kinyújtotta kezét, hogy besöpörje jutalékát. Megrémülve látta, hogy a banda új tagja — Ravasz Cecil — valamit előránt zsebéből és kezével együtt az asztal széle alá rejti.

— Mi van, Cecil?

— Éppen gondolkodom, Paul. Azt hiszem, jól tennéd, ha megajándékoznál egypár dollárral! Ne vesztegessük az időt azzal, hogy kitalálod, mi van a kezemben. Csak egy...

Lehet, hogy Cecil azt mondta, „revolver”. Az is lehet, hogy valami ártalmatlan tárgyat nevezett meg, például azt mondta, „pipa”. Bármit is mondott, Paul adminisztratív döntés előtt áll. Milyen lehetőségei vannak?

Paul úgy érezte, hogy a pénz viszonylag kevésbé fontos, élete és tekintélye forog kockán. Lehetőségei a legfélelmetesebbekkel kezdve a következők:

- a) Szembeszállni egy revolverrel, lövést kapni és meghalni.
- b) Meghátrálni egy pipa előtt, amiről Cecil azt mondja, hogy pipa.





c) Meghátálni egy pipa elől, amiről Cecil azt mondja, hogy revolver.  
 d) Meghátálni egy revolver elől, amiről Cecil azt mondja, hogy revolver.  
 e) Meghátálni egy revolver elől, amiről Cecil azt mondja, hogy pipa.  
 f) Szembeszállni egy pipával, amiről Cecil azt mondja, hogy pipa.  
 g) Szembeszállni egy pipával, amiről Cecil azt mondja, hogy revolver.  
 Paul elhatározta, hogy 0 és 10 közti nyereségértékeket ír elő, a borzalmas  
 a) lehetőség értéke 0, a győzelem, a g) lehetőség értéke 10. A közbeeső  
 nyereségek előírása nem tartozik a kellemes és megnyugtató dolgok közé,  
 de ne felejtsük el, hogy Paul sem repes a gyönyörűségtől, hogy ezt a prob-  
 lémát meg kell oldania.\* Úgy dönt, hogy ha teljesen rászédtek, akkor  
 nyeresége 5 egység, a többi lehetőséghez pedig rendre 6, 7, 8 és 9 nyereséget  
 ír elő. Cecilnek négy lehetséges stratégiája van: kezében revolvert tart  
 vagy nem és revolvert mond vagy nem. Paulnak is négy stratégiája van:  
 vagy elhiszi, amit Cecil mond vagy nem, függetlenül attól, hogy mit mond.  
 Továbbá vagy elhiszi a revolvert és nem hiszi el a másikat, végül fordítva.  
 Végül is a következő a játék:

|      |            | Cecil  |        |        |        |
|------|------------|--------|--------|--------|--------|
|      |            | $r, R$ | $r, P$ | $p, R$ | $p, P$ |
|      |            | 1      | 2      | 3      | 4      |
| Paul | $ER, EP$ 1 | 7      | 0      | 6      | 9      |
|      | $ER, NP$ 2 | 7      | 8      | 6      | 5      |
|      | $NR, EP$ 3 | 0      | 0      | 10     | 9      |
|      | $NR, NP$ 4 | 0      | 8      | 10     | 5      |

ahol

$r$  és  $p$  a revolvert és a pipát,

$R$  és  $P$  Cecil kijelentését,

$E$  és  $N$  pedig azt jelöli, hogy Paul elhiszi vagy nem Cecil kijelentését.

Így például Cecil második tiszta stratégiája az, hogy revolver van a kezében és pipát mond. Paul első tiszta stratégiája az, hogy elhiszi Cecil kijelentését — ebben az esetben ez az utolsó cselekedete.

A megoldás szokásos módszereinkkel kapható meg.  $4 \times 4$ -es megoldást keresve csak bajokkal találkozunk, ezért a  $3 \times 3$ -asok között kell megoldás

\* A mérték, a becslés pontosságának kérdésével az V. rész 215. oldalán kezdődő két fejezetben foglalkozunk.



után néznünk. Mivel Cecil 3 és Paul 3 kedvezőtlen stratégiák, próbáljuk elhagyni őket. A megoldás így a következő: Paulnak 7:17:0:4, Cecilnek 0:1:0:2 arányban kell stratégiáit kevernie. (A 7:17:0:4 mellett Paulnak ezek a megoldásai is vannak: 1:3:0:0 és 3:21:4:0.)

Meglepő, hogy Paul számára mennyire előnyös a Paul 2 stratégia, vagyis az, hogy elhiszi a revolvért és nem hiszi el a pipát. Ennek az az oka, hogy a nyereségértékek a presztizshez kapcsolódnak. Ha másképp írjuk elő a nyereségeket — úgy, hogy (0 kivételével) az összes nyereségérték 10-hez közel kerüljön — akkor Paul 2 aránya növekedni fog. Például, ha a nyereségértékek 0, 5, 6, 7, 8, 9 és 10 helyett rendre a

0; 9,5; 9,6; 9,7; 9,8; 9,9 és 10

számok, akkor az egyik megoldás 291:9411:0:192 — közelítőleg 3:94:0:2 — a másik 3:99:0:0, vagyis majdnem vakon a Paul 2 stratégiát kell követnie. Ebben a játékban Cecil stratégiája a 0:4:0:98 keverék, vagyis mindig pipát és többnyire igazat kell mondania.

## 29. Példa. Tökrészeg ezredes

A harci különítmény parancsnoka, aki eddig attól félt, hogy nem lesz alkalmuk a Pirosok megsemmisítésére, most egyszerre megijedt. Megfigyelői azt jelentették, hogy „előretolt helyőrségét” az ellenség 10 percen belül megtámadja.

Amikor elkészítette a hadműveletek tervét, akkor az ellenség csapatát 600 főre becsülte. Az újabb megfigyelések szerint azonban körülbelül 1000 Piros gyalogos (vagyis 5 század) vesz majd részt a hadműveletekben. Így a Kékek a maguk két zászlóaljával (6 század) kedvezőtlenebb helyzetben vannak, mint gondolták. A terv szerint egy Piros század ellen két Kéket tudtak volna kiállítani, így azonban a Kékek alig vannak túlerőben a Pirosakkal szemben. A parancs a következő: „A lehető legkisebb veszteséggel az ellenség lehető legnagyobb részét megsemmisíteni.” Az ezredes, aki a vezérkar megfigyelőjeként tartózkodott a különítménynél, alig tudta elrejteni mosolyát, amikor a parancsnok elolvasta ezt a lehetetlen parancsot.

A Pék és a Kutya fedőnevű századok a parancsnoktól számottevő távolságban északkeletre, ill. északnyugatra álltak. A parancsnok közelében csak a maradék négy század volt. Az előbbieket helyzetének megváltoztatására már nem volt idő, az utóbbiakat mindkét irányban el lehetett küldeni. Amíg beosztottjait tanácskozássra várta, a parancsnok kíváncsi lett mit tenne az ezredes az ő helyében. Az ezredes a hátát vakarta és sűrűn emlegette a jóistent, de fogalma sem volt arról, hogy melyik irányban hány századot érdemes küldeni.

— Hogyan fogsz támadni? Emlékszel a pun háborúkra?



— Emlékezem ugyan, de jobb segédeszközt is tudok. Hallottál már a játékelméletről?

— Sosem hallottam ezt a szót. Különben sem érdekel, mert a háború nem játék.



— A múlt nyáron egy olyan társaságban voltam, ahol többek között sok szó esett a játékelméletről. Ott tudtam meg, hogy a hadviselésben is fel lehet használni az elméletet. Emlékszem egy olyan feladatra, amely éppen a mi helyzetünket írja le. A feladatot — bocsáss meg, de — „Tökrészeg ezredes” címmel szokták elmondani. Lényege, hogy Tökrészeg sokszor találta szembe magát olyan helyzettel, mint a miénk.

— Mit mond az elmélet? Béketárgyalást?

— Rosszabbat. Az elmélet szerint — ismétlem nem az én ötletem — figyeld azt a hangyát, amelyik a térképeden mászkál. Amikor eléri azt a zsírpacnit, akkor nézd meg az órát. Ha a másodpercmutató 6-ot vagy annál kevesebbet mutat, akkor erőnket egyenlő arányban osztjuk el a két támadási pont között. Ha a másodpercmutató 6 és 30 között áll, akkor a tartalékban levő egységeket mind a Pékekhez, ha 30 és 54 között áll, akkor mind a Kutyákhoz küldjük. Ha 54 és 60 között áll a másodpercmutató, akkor másik hangyát hozunk.

— Ostoba elméleted van, de nem bánom, próbáld ki.

Az elemzés a következő: 6 Kék és 5 Piros század van. Az erők lehetséges megosztási módjai Kék esetében az 5:1, 4:2, 3:3, 2:4 vagy 1:5, Piros esetében pedig a 4:1, 3:2, 2:3 vagy 1:4 arányú elosztás. Feltesszük, hogy a részcsatákban ez egyforma csapatok harca döntetlen, a nagyobb csapat viszont teljes egészében megsemmisíti a kisebbet. A nyereséget úgy kapjuk meg, hogy a felszámolt századok számából kivonjuk az elvesztett századok



számát. Feladatunk szövegezéséből nyilvánvaló, hogy a harcot Kék szempontjából vizsgáljuk. A nyereségmátrix:

|     |    | Piros |    |    |    |
|-----|----|-------|----|----|----|
|     |    | 41    | 32 | 23 | 14 |
| Kék | 51 | 4     | 2  | 1  | 0  |
|     | 42 | 1     | 3  | 0  | -1 |
|     | 33 | -2    | 2  | 2  | -2 |
|     | 24 | -1    | 0  | 3  | 1  |
|     | 15 | 0     | 1  | 2  | 4  |

(51 az erők 5:1 arányú megosztását jelöli stb.)

A megoldás sajnos, nem megy simán. Kék negyedik stratégiáját elhagyva, a

|     |    | Piros |    |    |    |
|-----|----|-------|----|----|----|
|     |    | 41    | 32 | 23 | 14 |
| Kék | 51 | 4     | 2  | 1  | 0  |
|     | 42 | 1     | 3  | 0  | -1 |
|     | 33 | -2    | 2  | 2  | -2 |
|     | 15 | 0     | 1  | 2  | 4  |

részjáték alapján juthatunk megoldáshoz. A részjáték összes stratégiájának alkalmazásán alapuló módszerrel meghatározhatjuk a megoldást: az eredeti játék stratégiáinak aránya 4:0:1:0:4, ill. Piros számára 3:48:32:7.

A játék szimmetriája folytán hasonló megoldást kapunk, ha Kék második stratégiáját hagyjuk el. A megoldás Kék számára ebben az esetben is 4:0:1:0:4, Piros számára azonban 7:32:48:3.



Tudjuk, hogy megoldások összege is megoldás, tehát Piros 10:80:80:10, vagyis 1:8:8:1 arányban is keverheti stratégiáit.\* A megoldás tehát így írható:

|              |    | Piros |    |    |    | Kék aránya |
|--------------|----|-------|----|----|----|------------|
|              |    | 41    | 32 | 23 | 14 |            |
| Kék          | 51 | 4     | 2  | 1  | 0  | 4          |
|              | 42 | 1     | 3  | 0  | -1 | 0          |
|              | 33 | -2    | 2  | 2  | -2 | 1          |
|              | 24 | -1    | 0  | 3  | 1  | 0          |
|              | 15 | 0     | 1  | 2  | 4  | 4          |
| Piros aránya |    | 1     | 8  | 8  | 1  |            |

Kéknek tehát 8:1 arányban előnyben kell részesítenie a szélső eseteket az egyenlő arányban való megosztással szemben, a közbülső eseteket pedig el kell kerülnie. Piros számára viszont az a kedvező, ha 3:2 arányban osztja el csapatát.

A játék értéke Kék számára  $\frac{14}{9}$  — egy-vagy két katonai század közti érték. A másodpercmutatóval a fenti módon a 4:1:4 arányt lehet előállítani, éppen azt, amire Kéknek szüksége van.

A példát tovább vizsgálhatjuk. Tegyük fel, hogy a két ütközetet egy harmadik követi, amelyben természetesen az összes megmaradt egység részt vesz. Hogyan kell indulni ahhoz, hogy a csaták végére a lehető legnagyobb legyen a nyereség?

A nyereségértéket most is az előző szabályok szerint állapítjuk meg. A végső csatában a nagyobb csapat megsemmisíti a kisebbet. A győztes csapat teljes nyereségét tehát úgy határozhatjuk meg, hogy az ellenség teljes számából levonjuk az első két csatában elszenvedett veszteséget. Ha az első két csata után a két csapat létszáma egyforma, akkor harmadik ütközetre nem kerül sor. Ezek alapján az eredeti mátrix felhasználásával

\* Lásd a *Több megoldás esete* című fejezetet. (213. oldal).



könnyen felírhatjuk az új nyereségmátrixot:

|              |    | Piros |    |    |    | Kék aránya |
|--------------|----|-------|----|----|----|------------|
|              |    | 41    | 32 | 23 | 14 |            |
| Kék          | 51 | 5     | 4  | 4  | 4  | 10         |
|              | 42 | 5     | 5  | 3  | -1 | 0          |
|              | 33 | -5    | 5  | 5  | -5 | 1          |
|              | 24 | -1    | 3  | 5  | 5  | 0          |
|              | 15 | 4     | 4  | 4  | 5  | 10         |
| Piros aránya |    | 2     | 19 | 19 | 2  |            |

Piros megoldását itt is két megoldás, az 1:7:12:1 és az 1:12:7:1 stratégia-keverék alapján kaptuk. A játék értéke  $\frac{85}{21}$ .

Ha eredményünket az előzőkkel összevetjük, azt látjuk, hogy Kéknek 8:1 helyett 20:1 arányban kell erőit egy pontra koncentrálnia.

### 30. Példa. Morra (nehezebb snóbli)

A következő játék neve Morra. Ez a neve, nem mi találtuk ki, nem tehetünk róla. Ez a játék rámutat elméletünk erejére és hibáira is. Az elmélet erejét az mutatja, hogy a játékelmélet ismerete nélkül nem valószínű, hogy a játékosok eltalálják a legjobb stratégiát. Az elmélet gyengeségének mondhatjuk viszont azt, hogy a jó stratégia kiszámítása néha rettenetesen nehéz.

A játék a következő: Két játékos néhány egyforma pénzdarabot (például tízcenteseket) rejt el a markában és ki kell találniuk, hogy a másik markában hány pénzdarab van. A játékosok 1, 2 vagy 3 pénzdarabot rejthetnek el. Ha az *egyik* játékos eltalálja, hogy hány pénzdarab van a társa markában, akkor nyereségét az *összes* elővett pénzdarab száma adja meg. Egyébként a nyereség nulla. Például, ha Kék 3 pénzdarabot tart a kezében és 1 pénzdarabot mond, Piros 1-et tart, 2-t mond, akkor Kék nyer, mivel neki volt igaza. A nyereség 4 pénzdarab.



Mindegyik játékos 1, 2 vagy 3 pénzdarabot rejthet el és 1, 2 vagy 3 pénzdarabot sejteth partnere markában. Így mindegyiküknek kilenc lehetősége, vagyis kilenc tiszta stratégiája van. A stratégiákat kétjegyű számokkal jelöljük. Az első számjegy az elrejtett pénzdarabok számát, a második a játékos sejtését fogja jelölni. A nyereségmátrix felírása egyszerű, de sok időt igénylő. Íme az eredmény:

|     |    | Piros |    |    |    |    |    |    |    |    |
|-----|----|-------|----|----|----|----|----|----|----|----|
|     |    | 11    | 12 | 13 | 21 | 22 | 23 | 31 | 32 | 33 |
| Kék | 11 | 0     | 2  | 2  | -3 | 0  | 0  | -4 | 0  | 0  |
|     | 12 | -2    | 0  | 0  | 0  | 3  | 3  | -4 | 0  | 0  |
|     | 13 | -2    | 0  | 0  | -3 | 0  | 0  | 0  | 4  | 4  |
|     | 21 | 3     | 0  | 3  | 0  | -4 | 0  | 0  | -5 | 0  |
|     | 22 | 0     | -3 | 0  | 4  | 0  | 4  | 0  | -5 | 0  |
|     | 23 | 0     | -3 | 0  | 0  | -4 | 0  | 5  | 0  | 5  |
|     | 31 | 4     | 4  | 0  | 0  | 0  | -5 | 0  | 0  | -6 |
|     | 32 | 0     | 0  | -4 | 5  | 5  | 0  | 0  | 0  | -6 |
|     | 33 | 0     | 0  | -4 | 0  | 0  | -5 | 6  | 6  | 0  |

Most jön az elmélet gyengesége, a hosszas számolás. Módszerünk a  $9 \times 9$ -es játék összes stratégiájára nulla gyakoriságot ad, ha mátrixunkat változtatlanul hagyjuk. Ez azt jelenti, hogy bizonyos tiszta stratégiákat el kell hagyni a mátrixból és az így kapott redukált játékot kell megoldani. Sajnos,  $8 \times 8$ -asból 9 (81 volna, de a szimmetria miatt csak 9 különbözöt kell vizsgálnunk),  $7 \times 7$ -esből 36 és  $6 \times 6$ -osból 84 játékot kell megvizsgálnunk. Ezt itt nem csináljuk végig.

Fordítsuk figyelmünket a 126 darab  $5 \times 5$ -ös játék közül azokra, amelyek szimmetrikusak. Harmadik próbálkozásra találtunk is ezek között egy



megfelelőt — azt, amelyiket az első, negyedik, hatodik és kilencedik stratégia elhagyásával kapunk:

|     |    | Piros |    |    |    |    |
|-----|----|-------|----|----|----|----|
|     |    | 12    | 13 | 22 | 31 | 32 |
| Kék | 12 | 0     | 0  | 3  | -4 | 0  |
|     | 13 | 0     | 0  | 0  | 0  | 4  |
|     | 22 | -3    | 0  | 0  | 0  | -5 |
|     | 31 | 4     | 0  | 0  | 0  | 0  |
|     | 32 | 0     | -4 | 5  | 0  | 0  |

Erre az  $5 \times 5$ -ös játékra alkalmazva az összes stratégia használatán alapuló módszert (a közös tényezőkkel végigosztva), a

$$0:5:4:3:0$$

arányt kapjuk. Ez kielégíti az  $5 \times 5$ -ös és a  $9 \times 9$ -es játékot is, tehát a Morra játékot a következőképpen kell játszani:

Stratégia: 11 12 13 21 22 23 31 32 33

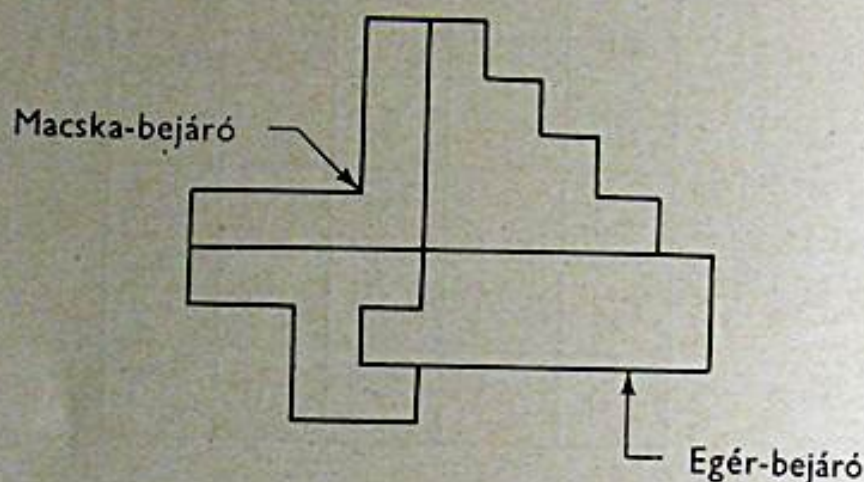
Arány: 0 : 0 : 5 : 0 : 4 : 0 : 3 : 0 : 0

A stratégiák közül csak az alábbiakat kell alkalmazni: 1) 1-et elrejt, 3-at sejt, 2) 2-t elrejt, 2-t sejt, 3) 3-at elrejt, 1-et sejt. Ezeket a stratégiákat 5:4:3 arányban kell keverni. A játék értéke nulla, tehát a játék igazságos. A megoldás megjegyzése egyszerű, de az elmélet nélkül nehéz volna rájönni. Ezért a játékelmélet ismerete lényeges előnyt jelent a játékosok számára.



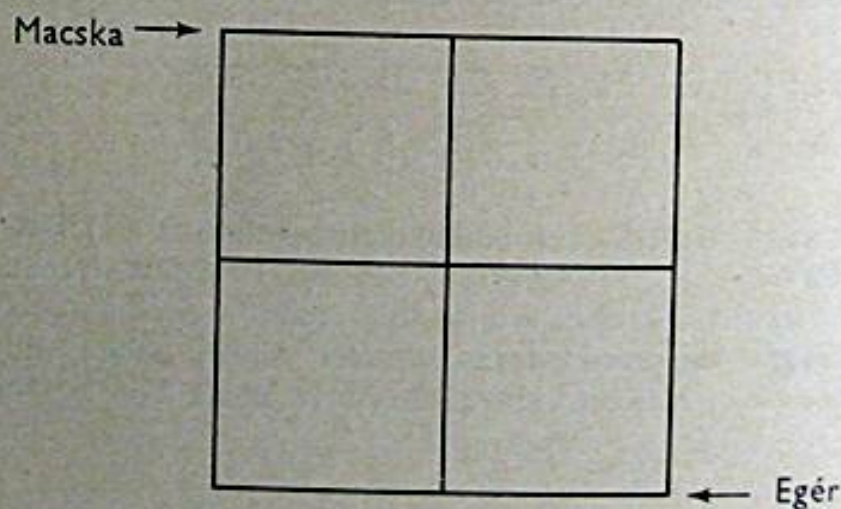
### 31. Példa. A labirintus

Az alábbi labirintusba egy egeret és egy macskát engedünk be. Az állatok a sarkoknál fordulhatnak, de visszafordulni nem tudnak. Egyforma sebességgel haladnak. Annyi idő áll rendelkezésünkre, amennyi alatt a labirintus



egynegyedét be tudják futni. Ha ez alatt az idő alatt a macska nem fogja el az egeret, akkor kivesszük őket a labirintusból. Milyen stratégiákat kell alkalmazniuk?

A fenti labirintus nyilván ekvivalens a



labirintussal és így a lehetséges tiszta stratégiákat az alábbi táblázat adja meg:



Stratégiák száma

Macska

Egér

Stratégiák száma

Macska

Egér

1



5



2



6



3



7



4



8



Ha a macska megfogja az egeret, akkor a nyereség 1, ha nem, akkor a nyereség 0. A macska azt szeretné elérni, hogy a játék értéke a lehető legnagyobb legyen. Az egér érdekei nyilván ezzel ellentétesek. A különféle tiszta stratégiákat összehasonlítva a következő nyereségmátrixot kapjuk:

Egér

1 2 3 4 5 6 7 8

Macska

|   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 5 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 6 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 7 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 8 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |



Macska 5 domináns Macska 1, 2, 3, 6 és 7 felett, Macska 4 domináns Macska 8 felett. Egér 5 domináns Egér 1 felett, Egér 4 pedig Egér 8 felett. Egér 2, 3, 6 és 7 is valószínűtlen. A játékból tehát csak ennyi marad:

|        |   | Egér |   |   |
|--------|---|------|---|---|
|        |   | 1    | 2 | 3 |
| Macska | 4 | 1    | 1 | 0 |
|        | 5 | 0    | 1 | 1 |

A megoldás egyszerű: a macskának egyenlő arányban kell a Macska 4 és 5 stratégiákat kevernie, az egér legjobb stratégiája pedig az, ha az Egér 1 és 8 stratégiákat egyenlő arányban alkalmazza.

A tiszta stratégiák rajzáról láthatjuk, hogy a macskának kis hurokban, az egérnek a labirintus szélén kell haladnia.

### 32. Példa. Merlin

— Segíts rajtam — kezdte Guinevere. — Annak a pimasz Yseultnak van egy rejtélyes kendője és mindig az a lovag győz, akit ő választ, és az én lovagom gyakran kerül a földre. Ez sérti a lovagi tornák rendjét. Segíts, hogy végét vegyem ennek.

Merlin bal keze hirtelen varangyosbékává változott és brekegni kezdett. Az öreg lassan a kisasszony felé fordult és beszélni kezdett.

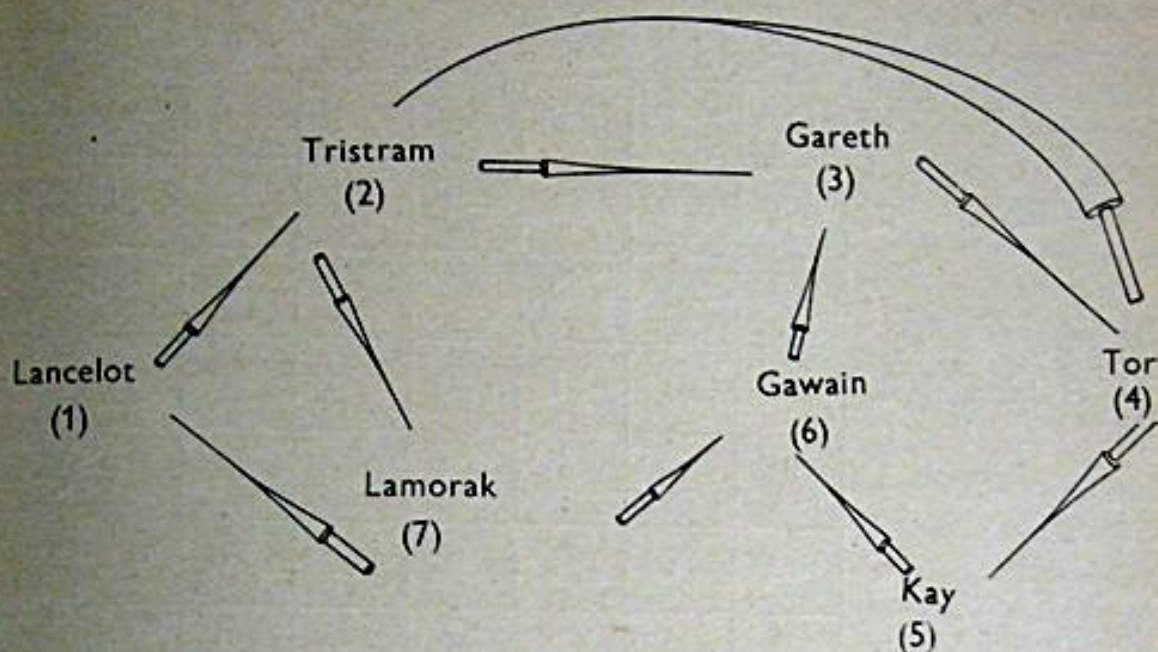
— Bocsáss meg drágám, egy pillanatra elkalandoztam... Igen, a lovagi torna. Az utóbbi időben nem is törődtem vele. Kik vesznek most részt a versenyeken?

— Nagyon bonyolult a helyzet — siránkozott Guinevere — Igaz, hogy az utóbbi időben csak hét lovag vesz részt a versenyeken, de a párviadatok legtöbbször kimenetele kétes. Csak néhány viadalról tudom megmondani, hogy ki győz. Lancelot legyőzi Tristramot, Tristram legyőzi Garethet és Lamorakot, Lamorak legyőzi Gawaint és (isten úgy segéljen) Lancelotot, Gareth legyőzi Tort, Tor legyőzi Sir Kayt és Tristramot és végül Gawain legyőzi Garethet. Bosszantó, hogy bár némely tekintetben következetesek, de...

— De nem tranzitívok — mormogta Merlin. Megmutatta jegyzetét



a hölgynek:



— A Tor—Tristram viadal nem valami ügyes, de azért jó. Gwen, helyezd magad néhány percre kényelembe. A feladat nehéz. Gondolkodnom kell.

Merlin becsukta a szemét és hirtelen belepottyant az egyik székbe. Lady Guinevere néma csendben ült és meredten figyelte a Merlin hajában fészkelő kis bagoly szeméit.

Az öreg egyszerre csak megszólalt.

— Kedvesem! A huszadik században jártam. Kimerítő utazás volt — bár nem tartott soká —, de megtaláltam, amit kerestem. Nem akarlak untatni a részletekkel, csak annyit mondok, hogy a lovagi tornák elméletét hoztam magammal. Válaszom a következő: Vegyél néhány követ, jelöld meg őket a lovagok színeivel. Tedd a köveket egy urnába — ha nincs urnád, egyszarvú kürt is megfelel. Ne tedd bele Kay és Gawain követ. Ha lovagot akarsz választani, akkor rázd meg az urnát, vess két bukfencet — egyet előre, egyet hátra — és húzz ki egy követ. Így legalább olyan jó helyzetbe kerülsz majd, mint Yseult.

— Ez csodálatos, Merlin. Hogyan hálálhatnám meg fáradságodat? Mondd, mit kívánsz?

— Amire szükségem van, azt megszerzem magamnak — mondta Merlin és a levegőbe nyúlva egy sültgalamb akadt a kezébe, amit jóízűen rágszálni kezdett. — Nekem az volt az ajándék, hogy eljöttél hozzám.

Az eldöntetlen párviadalokat 0-nak, a Guinevere számára győzelmet jelentőket 1-nek, a veszteséget jelentőket — 1-nek számlálva a nyereség-



mátrix a következő:\*

|           |   | Yseult |    |    |    |    |    |    |
|-----------|---|--------|----|----|----|----|----|----|
|           |   | 1      | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  |
| Guinevere | 1 | 0      | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | -1 |
|           | 2 | -1     | 0  | 1  | -1 | 0  | 0  | 1  |
|           | 3 | 0      | -1 | 0  | 1  | 0  | -1 | 0  |
|           | 4 | 0      | 1  | -1 | 0  | 1  | 0  | 0  |
|           | 5 | 0      | 0  | 0  | -1 | 0  | 1  | 0  |
|           | 6 | 0      | 0  | 1  | 0  | -1 | 0  | -1 |
|           | 7 | 1      | -1 | 0  | 0  | 0  | 1  | 0  |

A stratégiák száma az egyes lovagokat jelenti.

A  $7 \times 7$ -es és a  $6 \times 6$ -os játékok kimerítő és eredménytelen vizsgálata után az 1, 2, 3, 4 és 7 számú lovagokat tartalmazó  $5 \times 5$ -ös játék megoldása végre sikerrel jár. Az  $5 \times 5$ -ös megoldása az, hogy az öt lovagot egyenlő arányban kell keverni. Ez az eredetinek is megoldása, és így mindkét hölgynek kevert stratégiát kell alkalmaznia. 1:1:1:1:0:0:1 arányban kell lovagot választaniuk.



\* Ha mindkét hölgy ugyanazt a lovagot választja, az eredmény döntetlen. A határozatlan kimenetelű párviadaloknál a két fél győzelme egyformán valószínű, így 0-értékűnek vesszük őket. (A lektor.)



## A $4 \times m$ -ES MÓDSZER ÖSSZEFOGLALÁSA

$4 \times 4$ -es és nagyobb játékok esetén eljárásunk a következő: Először nyeregpontot keresünk. Ha van nyeregpont, akkor a nyeregpontnak megfelelő stratégia a legjobb. Ha nincs nyeregpont, akkor domináns stratégiák felhasználásával megpróbáljuk egyszerűbbé tenni a játékot. Lehet, hogy nem találunk domináns stratégiákat — így van ez abban az esetben is, amikor bizonyos tiszta stratégiák *kombinációja* és valamelyik tiszta stratégia között van domináns kapcsolat. Akárhogy is van, miután legjobb tudásunk szerint megtisztítottuk a mátrixot a felesleges stratégiáktól, feltesszük, hogy a legjobb kevert stratégiában az összes stratégia szerepel. Ennek alapján egy világos és biztos eljárással meghatározhatjuk a legjobb keveréket. Sajnos, a módszer gyakran nem vezet eredményhez, hála az utat körülvevő kelep-céknek.

Milyen álrúhában jelenhet meg a hiba? Valójában elég változatos a ruha-tára, sőt állszakállt is viselhet. Már korábban, a  $3 \times 3$ -as játékoknál találkoztunk ilyen hibával, akkor amikor Kék összes stratégiájára nulla gyakoriságot, vagyis biztosan hamis eredményt kaptunk. A megoldást ki tudtuk javítani úgy, hogy bizonyos stratégiák gyakorisága nulla maradt, de másoké nem. Jó ellenőrzési lehetőség az, hogy (a közös tényezőkkel való osztás előtt) Kék stratégiáinak gyakoriságait összeadva ugyanazt az eredményt kell kapnunk, mint Piros gyakoriságait összeadva. Ha a két összeg különböző, akkor vagy hibás a módszer, vagy rosszul számoltunk. Mivel nem tudjuk, melyik eset áll fenn, az utóbbit gondos számolással ellenőrizni kell. Akkor vehetjük biztosra, hogy a módszerben volt a hiba, amikor az egyik játékos legjobb stratégiáját a másik különböző tiszta stratégiái ellen alkalmazva különböző eredményeket kapunk — valamelyik játékos többet nyerhet vagy veszíthet, mint amennyire helyes játékot feltételezve joga van.

Ha baj van és a számolás kifogástalan, akkor minden esetben ugyanaz az orvosság: hagyjunk el bizonyos stratégiákat, oldjuk meg a megmaradt játékot és próbáljuk ki a megoldást az eredeti játékon. Az orvosság elég kellemetlen, mert nagyobb játékoknál a gyors megoldáshoz éles elmére és még inkább szerencsére van szükség. A helyzet a részjátékok nagy száma miatt kétségbeejtően nehezen tekinthető át.

Előfordulhat, hogy az eredeti vagy a domináns stratégiák alapján redukált játékban az egyik játékosnak több stratégiája van, mint a másiknak. A megoldáshoz csak annyit kell tudni, hogy a játékosok legjobb kevert stratégiájában legfeljebb annyi stratégia szerepelhet, amennyi a kevesebb stratégiával rendelkező játékosnak van. Ebből következik, hogy az összes stratégia alkalmazásán alapuló módszer felhasználásához a több stratégiával rendelkező játékos stratégiái közül el kell hagynunk annyit, hogy a játék négyzet alakú legyen. Például, egy  $5 \times 10$ -es játékot  $5 \times 5$ -ös,  $4 \times 4$ -es vagy még



kisebb játékká kell átalakítanunk ahhoz, hogy meghatározhassuk a megoldást. Mivel a lehetőségek száma nagy, az eljárás rendkívül unalmas.

Kérjük az Olvasót, miután felfegyvereztük az előző két bekezdés bátorító megjegyzéseivel, próbálkozzon meg az alábbi játékok megoldásával.

### Feladatok

Határozzuk meg a következő játékok gyakoriságait és értékét.

1.

Piros

|     |   |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|---|
|     |   | 1 | 2 | 3 | 4 |
|     | 1 | 7 | 6 | 0 | 2 |
|     | 2 | 3 | 8 | 2 | 5 |
| Kék | 3 | 1 | 0 | 2 | 2 |
|     | 4 | 3 | 0 | 1 | 3 |

2.

Piros

|     |   |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|---|
|     |   | 1 | 2 | 3 | 4 |
|     | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|     | 2 | 8 | 7 | 6 | 5 |
| Kék | 3 | 7 | 6 | 5 | 4 |
|     | 4 | 0 | 1 | 2 | 3 |

3.

Piros

|     |   |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|---|
|     |   | 1 | 2 | 3 | 4 |
|     | 1 | 3 | 5 | 4 | 3 |
|     | 2 | 3 | 4 | 2 | 1 |
| Kék | 3 | 1 | 1 | 3 | 4 |
|     | 4 | 0 | 5 | 2 | 2 |

Kék

4.

Piros

|     |   |   |   |    |   |    |
|-----|---|---|---|----|---|----|
|     |   | 1 | 2 | 3  | 4 | 5  |
|     | 1 | 2 | 2 | 0  | 1 | 0  |
|     | 2 | 1 | 0 | -1 | 1 | -2 |
| Kék | 3 | 1 | 3 | -1 | 4 | -1 |
|     | 4 | 4 | 2 | 0  | 1 | 0  |



5.

Piros

|   | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 1 | 4 |
| 2 | 1 | 2 | 5 | 4 |
| 3 | 2 | 3 | 4 | 1 |
| 4 | 4 | 2 | 2 | 2 |

Kék

6.

Piros

|   | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 7 | 0 | 3 |
| 2 | 0 | 0 | 3 | 5 |
| 3 | 1 | 2 | 3 | 0 |
| 4 | 6 | 0 | 2 | 0 |

Kék

7.

Piros

|   | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 0 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 3 | 4 | 8 |
| 3 | 1 | 5 | 9 | 2 |
| 4 | 3 | 6 | 3 | 1 |

Kék

8.

Piros

|   | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 4 | 0 | 3 |
| 2 | 5 | 0 | 2 | 5 |
| 3 | 7 | 3 | 9 | 5 |
| 4 | 4 | 6 | 8 | 7 |

Kék

9.

Piros

|   | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 3 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 5 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 2 | 0 |
| 4 | 1 | 1 | 7 | 3 |
| 5 | 1 | 1 | 0 | 7 |
| 6 | 0 | 0 | 2 | 0 |

Kék



10.

Piros

|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1     | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 6 | 0 | 0 |
| 2     | 7 | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | 5 |
| Kék 3 | 0 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 |
| 4     | 3 | 0 | 8 | 5 | 0 | 0 | 4 | 1 |

11.

Piros

|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------|---|---|---|---|---|
| 1     | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 |
| 2     | 3 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| Kék 3 | 0 | 0 | 2 | 1 | 2 |
| 4     | 1 | 3 | 0 | 0 | 1 |
| 5     | 1 | 2 | 3 | 1 | 0 |

12.

Piros

|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------|---|---|---|---|---|
| 1     | 3 | 3 | 4 | 4 | 8 |
| 2     | 8 | 0 | 6 | 8 | 7 |
| Kék 3 | 1 | 5 | 9 | 5 | 2 |
| 4     | 3 | 6 | 3 | 1 | 1 |
| 5     | 5 | 5 | 0 | 3 | 0 |



13.

Piros

|       | 1 | 2  | 3 | 4 | 5 |
|-------|---|----|---|---|---|
| 1     | 0 | 4  | 8 | 4 | 1 |
| 2     | 2 | 5  | 2 | 0 | 0 |
| Kék 3 | 1 | 4  | 0 | 8 | 4 |
| 4     | 7 | -1 | 5 | 7 | 6 |
| 5     | 2 | 2  | 3 | 3 | 7 |

14.

Piros

|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------|---|---|---|---|---|
| 1     | 2 | 7 | 7 | 6 | 7 |
| 2     | 6 | 6 | 6 | 9 | 2 |
| Kék 3 | 9 | 4 | 5 | 5 | 9 |
| 4     | 4 | 9 | 3 | 8 | 6 |
| 5     | 7 | 7 | 9 | 3 | 6 |

15.

Piros

|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------|---|---|---|---|---|
| 1     | 3 | 4 | 0 | 3 | 0 |
| 2     | 5 | 0 | 2 | 5 | 9 |
| Kék 3 | 7 | 3 | 9 | 5 | 9 |
| 4     | 4 | 6 | 8 | 7 | 4 |
| 5     | 6 | 0 | 8 | 8 | 3 |



16.

Piros

|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------|---|---|---|---|---|
| 1     | 2 | 2 | 5 | 1 | 3 |
| 2     | 0 | 0 | 4 | 3 | 4 |
| Kék 3 | 1 | 2 | 1 | 0 | 6 |
| 4     | 5 | 4 | 5 | 0 | 5 |
| 5     | 3 | 1 | 1 | 6 | 6 |

17.

Piros

|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------|---|---|---|---|---|
| 1     | 5 | 5 | 4 | 5 | 2 |
| 2     | 5 | 4 | 7 | 1 | 6 |
| Kék 3 | 2 | 3 | 4 | 1 | 7 |
| 4     | 3 | 6 | 7 | 3 | 2 |
| 5     | 4 | 4 | 3 | 0 | 2 |

18.

Piros

|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------|---|---|---|---|---|
| 1     | 6 | 4 | 9 | 3 | 7 |
| 2     | 0 | 2 | 9 | 8 | 5 |
| Kék 3 | 5 | 3 | 4 | 2 | 4 |
| 4     | 1 | 6 | 2 | 1 | 8 |
| 5     | 1 | 6 | 1 | 3 | 6 |



19.

Piros

|   | 1 | 2  | 3  | 4  | 5 | 6  |
|---|---|----|----|----|---|----|
| 1 | 6 | 4  | -2 | 4  | 0 | 5  |
| 2 | 1 | 4  | 1  | 2  | 4 | 6  |
| 3 | 1 | 1  | 4  | 1  | 2 | -1 |
| 4 | 0 | 0  | 3  | -1 | 1 | 3  |
| 5 | 3 | 2  | 3  | -2 | 3 | -2 |
| 6 | 1 | -1 | -1 | 4  | 4 | -2 |

Kék

20.

Piros

|   | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  |
|---|----|----|----|----|----|
| 1 | -2 | 3  | -1 | -1 | -1 |
| 2 | -1 | -3 | 1  | 3  | 0  |
| 3 | 0  | 3  | -3 | -1 | 1  |
| 4 | 3  | -3 | 1  | -1 | 0  |

Kék



21.

Piros

|   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 3 | 1 | 3 | 2 | 5 | 3 |
| 2 | 6 | 6 | 0 | 0 | 2 | 4 | 1 |
| 3 | 0 | 3 | 5 | 6 | 6 | 7 | 6 |
| 4 | 6 | 4 | 9 | 3 | 1 | 0 | 6 |
| 5 | 1 | 6 | 4 | 4 | 3 | 5 | 6 |
| 6 | 7 | 8 | 2 | 1 | 5 | 0 | 0 |

Kék

22.

Piros

|   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 1 | 4 | 1 | 6 |
| 2 | 6 | 3 | 1 | 4 | 1 |
| 3 | 1 | 6 | 3 | 1 | 4 |
| 4 | 4 | 1 | 6 | 3 | 1 |
| 5 | 1 | 4 | 1 | 6 | 3 |

Kék



*Vegyes megjegyzések*

Ebben a részben sokféléről lesz szó, játékmegoldási fogásokról és segéd-eszközöktől kezdve egészen az olyan, — a könyv keretein túlmutató — témáig, mint a tárgy teljes elemzésének rövid áttekintése. Néhányat a korábbiakban már érintettük, rendszerint olyan helyzetekben, amikor nem lett volna tanácsos bővebben kitérni ezekre a homályos részekre.

KÖZELÍTŐ MEGOLDÁSI  
MÓDSZEREK

Könyvünk eddigi részeiben sorban egyre nagyobb játékokhoz kerestünk megoldási módszert és így végül eljutottunk oda, hogy akármilyen nagy játékot meg tudunk oldani. Kicsit pontosabban szólva, az olyan játékok megoldását tudjuk módszereinkkel meghatározni, amelyeknek összes stratégiáját és összes nyereségértékét ismerjük. Ez azonban már elegendő ahhoz, hogy kölcsönösen gratulálhassunk egymásnak.

Ezek után nyugodtan bevallhatjuk, hogy általános feltételeink siralmasak. Helyeztünk annak a hivatalnoknak a helyzetéhez hasonlítható, aki — annak ellenére, hogy egyesével tud számlálni és másodpercenként mond ki egy számot — vállalkozik a nemzeti adósság kifizetésére egy dolláros címletekben. Hivatalnokunk munkája így — negyvenórás munkahetet, szabadságot,





betegségeket figyelembe véve — negyvenezer évig tartana. Esetünkben már a négy és tíz közti játékoknál — azoknál, amelyek megoldásakor csak intuíciónkra és szerencsénkre támaszkodhatunk — bámulatosan nagy a lehetőségek száma. Például egy  $10 \times 10$ -es játékban 40 000  $4 \times 4$ -es részjáték van.

E nehézségek szempontjából a  $10 \times 10$ -es játékok még az élet napos oldalához tartoznak. Nagyobb,  $10 \times 10$ -es és  $100 \times 100$ -as közti játékok látán néha még a játékelmélettel foglalkozó tudósok is elsápadnak. A jelenség valóban elrémisztő: egy  $130 \times 130$ -as játék részjátékainak száma 79-jegyű szám. Eddington becslése szerint ennyi proton van az egész világegyetemben együttvéve.

Nyilvánvaló, hogy bizonyos szempontból túlságosan sokat kívánunk. Egy tudományos elmélettől többet várunk, mint azt, hogy lehetetlen feladatok, az összes részjáték megvizsgálása elé állítson minket. Vagy hatásosabb elemzési módszerre, vagy kisebb követelményekre van szükség. Mivel a matematikusok gyávák, maradjunk meg az utóbbi mellett.\* Helyzetünk lényegesen javítható, ha egzakt megoldás helyett közelítő megoldással elégszünk meg.



A közelítő megoldási módszerek a matematikában nem jelentenek újdonságot. Hasznosságukat a következő példa mutatja: Valaki azt a feladatot kapja, hogy a rendelkezésére álló fűrész és mérőszalag segítségével fűrészel-

\* Tíz évvel később már hatásosabb módszert is mutathatunk (lásd a VI. részt). A játék nagyságától és a játékmegoldó rendelkezésére álló számolási segédeszközöktől függő közelítő módszer azonban most is érdekes.



betegségeket figyelembe véve — negyvenezer évig tartana. Esetünkben már a négy és tíz közti játékoknál — azoknál, amelyek megoldásakor csak intuíciónkra és szerencsénkre támaszkodhatunk — bámulatosan nagy a lehetőségek száma. Például egy  $10 \times 10$ -es játékban 40 000  $4 \times 4$ -es részjáték van.

E nehézségek szempontjából a  $10 \times 10$ -es játékok még az élet napos oldalához tartoznak. Nagyobb,  $10 \times 10$ -es és  $100 \times 100$ -as közti játékok látán néha még a játékelmélettel foglalkozó tudósok is elsápadnak. A jelenség valóban elrémisztő: egy  $130 \times 130$ -as játék részjátékainak száma 79-jegyű szám. Eddington becslése szerint ennyi proton van az egész világegyetemben együttvéve.

Nyilvánvaló, hogy bizonyos szempontból túlságosan sokat kívánunk. Egy tudományos elmélettől többet várunk, mint azt, hogy lehetetlen feladatok, az összes részjáték megvizsgálása elé állítson minket. Vagy hatásosabb elemzési módszerre, vagy kisebb követelményekre van szükség. Mivel a matematikusok gyávák, maradjunk meg az utóbbi mellett.\* Helyzetünk lényegesen javítható, ha egzakt megoldás helyett közelítő megoldással elégszünk meg.



A közelítő megoldási módszerek a matematikában nem jelentenek újdonságot. Hasznosságukat a következő példa mutatja: Valaki azt a feladatot kapja, hogy a rendelkezésére álló fűrész és mérőszalag segítségével fűrészel-

\* Tíz évvel később már hatásosabb módszert is mutathatunk (lásd a VI. részt). A játék nagyságától és a játékmegoldó rendelkezésére álló számolási segédeszközöktől függő közelítő módszer azonban most is érdekes.



jen fel egy lécezt öt darabra úgy, hogy azokból egy négyzetet és annak egy átlóját lehessen összeállítani. Ha emberünk matematikus, akkor kétségbeesik, hiszen az átló hossza az oldal hosszának  $\sqrt{2}$ -szerese és ez a távolság nem található meg a mérőszalagon. Ha azonban lemondunk az egzakt pontosságról, akkor a feladatot a mérőszalag segítségével gyakorlatilag kielégítő pontossággal meg tudjuk oldani.

A közelítésekhez közeledve előzetesen el kell döntenünk egy kérdést. Szükséges-e, hogy a közelítő stratégiák alakra hasonlítsanak a legjobb stratégiákhoz? Nem szükségképpen. A szép külalak erény, de legfőbb érdekünk a játék értékének — legalábbis közelítő — elérése. Ez a beállítottság némi szabadságot jelent, ugyanis nagyon sok stratégia eredményez viszonylag kedvező nyereséget. A stratégiák számát csak az korlátozza, hogy egyrészt jobban szeretjük a szép stratégiákat, mint az ijesztőeket, másrészt — és főképp — könnyebb egy megoldást találni, mint többet.

Hatásos és matematikailag elfogadható közelítő eljárást fogunk ismertetni. Képzeljük el, hogy sok játszmat játszunk egymás után. Mindegyik játszmában azt a stratégiát alkalmazzuk, amelyik — az ellenfél előző játszmában használt stratégiáját figyelembe véve — számunkra a legkedvezőbb. Az egyszerűség kedvéért egy példán mutatjuk be a módszert, de az elv teljesen általános, akármilyen mátrixra hasonlóan alkalmazható. Tekintsük a következő játékot:

|     |   | Piros |   |   |   |
|-----|---|-------|---|---|---|
|     |   | 1     | 2 | 3 | 4 |
| Kék | 1 | 2     | 3 | 1 | 4 |
|     | 2 | 1     | 2 | 5 | 4 |
|     | 3 | 2     | 3 | 4 | 1 |
|     | 4 | 4     | 2 | 2 | 2 |

Induljunk ki akármelyik *sorból*, mondjuk az elsőből. Jelöljük meg ezt a sort csillaggal. Másoljuk le a mátrix alá ezt a sort és jelöljük meg a benne sze-



replő legkisebb számot:

|   |   |    |   |   |
|---|---|----|---|---|
| 2 | 3 | 1  | 4 | * |
| 1 | 2 | 5  | 4 |   |
| 2 | 3 | 4  | 1 |   |
| 4 | 2 | 2  | 2 |   |
| 2 | 3 | 1* | 4 |   |

Ez a közelítő eljárás első lépése. A következő lépés során a csillaggal megjelölt szám, az 1\* oszlopát másoljuk ki a mátrix jobb oldalára. Jelöljük meg csillaggal ennek legnagyobb elemét, az 5-öt:

|   |   |    |   |   |    |
|---|---|----|---|---|----|
| 2 | 3 | 1  | 4 | * | 1  |
| 1 | 2 | 5  | 4 |   | 5* |
| 2 | 3 | 4  | 1 |   | 4  |
| 4 | 2 | 2  | 2 |   | 2  |
| 2 | 3 | 1* | 4 |   |    |

Az 5\* a második sorban van; adjuk hozzá elemről elemre a második sort ahhoz a sorhoz, ami már a mátrix alatt van. Jelöljük meg csillaggal az így kapott új sor legkisebb elemét, a 3-at:

|    |   |    |   |   |    |
|----|---|----|---|---|----|
| 2  | 3 | 1  | 4 | * | 1  |
| 1  | 2 | 5  | 4 |   | 5* |
| 2  | 3 | 4  | 1 |   | 4  |
| 4  | 2 | 2  | 2 |   | 2  |
| 2  | 3 | 1* | 4 |   |    |
| 3* | 5 | 6  | 8 |   |    |



Ez volt a második lépés. A következő lépés során, mivel a 3\* az első oszlopban volt, hozzáadjuk az első oszlopot a mátrix jobb oldalához írt oszlophoz:

|    |   |    |   |   |    |    |
|----|---|----|---|---|----|----|
| 2  | 3 | 1  | 4 | * | 1  | 3  |
| 1  | 2 | 5  | 4 |   | 5* | 6* |
| 2  | 3 | 4  | 1 |   | 4  | 6  |
| 4  | 2 | 2  | 2 |   | 2  | 6  |
| 2  | 3 | 1* | 4 |   |    |    |
| 3* | 5 | 6  | 8 |   |    |    |

A legnagyobb számot, a 6-ot most is csillaggal jelöltük meg. (Itt több szám versengett a megtisztelő „legnagyobb” szerepéért. Mindegy, hogy közülük melyiket választjuk.) Mivel 6\* a második sorban van, a mátrix második sorát hozzáadjuk a mátrix alján levő utolsó sorhoz. Ez volt a harmadik lépés. Az eljárást tíz lépésen át folytatjuk, hogy jobban lássuk majd, miről van szó. (Megjegyezzük, hogy az utolsó oszlopban egy csillag sem szerepel.)

|   |   |   |   |   |    |    |     |     |     |     |     |     |     |    |
|---|---|---|---|---|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|
| 2 | 3 | 1 | 4 | * | 1  | 3  | 5   | 7   | 10  | 13  | 16  | 19  | 22  | 25 |
| 1 | 2 | 5 | 4 |   | 5* | 6* | 7   | 8   | 10  | 12  | 14  | 16  | 18  | 20 |
| 2 | 3 | 4 | 1 |   | 4  | 6  | 8   | 10  | 13  | 16  | 19  | 22* | 25* | 28 |
| 4 | 2 | 2 | 2 |   | 2  | 6  | 10* | 14* | 16* | 18* | 20* | 22  | 24  | 26 |

|    |     |    |    |
|----|-----|----|----|
| 2  | 3   | 1* | 4  |
| 3* | 5   | 6  | 8  |
| 4* | 7   | 11 | 12 |
| 8* | 9   | 13 | 14 |
| 12 | 11* | 15 | 16 |
| 16 | 13* | 17 | 18 |
| 20 | 15* | 19 | 20 |
| 24 | 17* | 21 | 22 |
| 26 | 20* | 25 | 23 |
| 28 | 23* | 29 | 24 |



Felmerülhet az a kérdés, hogy mire jó ez az egyszerű, mechanikus eljárás, amit akármelyik gyerek meg tud csinálni? Mindjárt kiderül! Számláljuk meg soronként és oszloponként a csillagokat és írjuk fel ezeket az összegeket a mátrix megfelelő helyeire. Az összegek a játékosok stratégiájára vonatkozó becslések.

|              |   | Piros |   |   |   | Kék aránya |  |
|--------------|---|-------|---|---|---|------------|--|
|              |   | 1     | 2 | 3 | 4 |            |  |
| Kék          | 1 | 2     | 3 | 1 | 4 | 1          |  |
|              | 2 | 1     | 2 | 5 | 4 | 2          |  |
|              | 3 | 2     | 3 | 4 | 1 | 2          |  |
|              | 4 | 4     | 2 | 2 | 2 | 5          |  |
| Piros aránya |   | 3     | 6 | 1 | 0 |            |  |

Példánkban Kéknek 1:2:2:5, Pirosnak 3:6:1:0 arányban kell stratégiáit kevernie.

Milyen jók becsléseink? Ezt úgy bírálhatjuk el, hogy megnézzük, milyen rossz dolgok történhetnek a játékosokkal, ha ezeket a kevert stratégiákat alkalmazzák. Visszatérve a számításokhoz, látjuk (az alsó sorból), hogy a tíz játékban Kék legalább 23 egységet nyer, tehát átlagos nyeresége játszmánként legalább 2,3 egység. Hasonlóképpen a jobb szélső oszlop alapján meggyőződhetünk arról, hogy Pirosnak legfeljebb 28 egységbe kerülhet a tíz játszma, játszmánként átlagosan tehát legfeljebb 2,8 egységet veszíthet.

A két érték eltérése jelzi, hogy a stratégiák nem tökéletesek. Ha a játékosok a legjobb kevert stratégiával dolgoznak, akkor a nyereség valamilyen 2,3 és 2,8 közti érték lenne.

A 2,3 és 2,8 között bizonytalansági határ körülbelül a nyereség 20 %-a. Ha a közelítő eljárást folytatjuk, akkor jobb közelítést kapunk. Az eljárás



következő tíz lépése ez:

|   |   |   |   |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |    |
|---|---|---|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|
| 2 | 3 | 1 | 4 | 25  | 29* | 32* | 35* | 38* | 39  | 41  | 43  | 45  | 49  | 53 |
| 1 | 2 | 5 | 4 | 20  | 24  | 26  | 28  | 30  | 35  | 36  | 37  | 38  | 42  | 46 |
| 2 | 3 | 4 | 1 | 28* | 29  | 32  | 35  | 38  | 42* | 44* | 46* | 48* | 49  | 50 |
| 4 | 2 | 2 | 2 | 26  | 28  | 30  | 32  | 34  | 36  | 40  | 44  | 48  | 50* | 52 |

|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| 28  | 23  | 29  | 24  |
| 30  | 26  | 33  | 25* |
| 32  | 29* | 34  | 29  |
| 34  | 32* | 35  | 33  |
| 36  | 35* | 36  | 37  |
| 38  | 38  | 37* | 41  |
| 40* | 41  | 41  | 42  |
| 42* | 44  | 45  | 43  |
| 44* | 47  | 49  | 44  |
| 46  | 50  | 53  | 45* |
| 50  | 52  | 55  | 47* |

Ennek alapján Kéknek 5:2:7:6, Pirosnak 6:9:2:3 arányban kell stratégiáit kevernie. Az átlagos nyereség, ill. veszteség most  $\frac{47}{20}$  és  $\frac{53}{20}$ , vagyis 2,35 és 2,65 között lehet. Ily módon, a nyereség bizonytalanságát 20 %-ról 12 %-ra szorítottuk le.

Lehet, hogy ez már kielégítő, lehet, hogy nem. Ha nem, akkor folytathatjuk az eljárást. A lépések számának növekedésével a bizonytalanság csökken, egyre közelebb kerülünk a játék igazi értékéhez.

Példánkban az egzakt megoldás Kék számára 8:3:7:9, Piros számára 5:7:3:3, a játék értéke  $2\frac{5}{9}$ .

Ha a nyereségmátrix kis egész számokból áll, akkor módszerünk segítségével játszva megbirkózhatunk  $10 \times 10$ -es, sőt, még nagyobb játékokkal is. Semmi másra nincs szükség ehhez, mint papírra, ceruzára és időre.



## A DOMINÁNS STRATÉGIÁKRÓL

A domináns stratégiák fogalmát az előző fejezetekben meglehetősen vázlatosan ismertettük. Ezzel az volt a szándékunk, hogy ne zavarjuk meg a könyv fő gondolatmenetét. A hiányt most pótoljuk. Ezután is mindig a Kék szempontjából vizsgáljuk a kérdést. Bízunk abban, hogy az Olvasó számára nem okoz már nehézséget, hogy a szükséges kis változtatásokat végrehajtva eredményeinket Piros stratégiáira alkalmazza.

Tudjuk, hogy ha egy stratégia domináns egy másik felett, vagyis ha az egyik stratégia nyereségértékei *elemről elemre* mind nagyobbak, mint a másik nyereségértékei, akkor az utóbbit egyszerűen elhagyhatjuk a mátrixból. Ezt akkor is megtehetjük, ha a nyereségértékek között némelyik pár egyenlő. Ha mindegyik kisebb, akkor *szigorú* értelemben vett dominanciáról, ha vannak közöttük egyenlők, akkor *nem szigorú* értelemben vett dominanciáról beszélünk. Azért érdemes ezt a két típust megkülönböztetni egymástól, mert ha nem szigorú értelemben vett dominancia alapján tüntetünk el egy sort, akkor a játék egy kicsit megváltozik. Az új játéknak kevesebb megoldása lesz, mint a réGINEK volt. Mivel eddig figyelmünket rendszerint arra fordítottuk, hogy legalább egy megoldást találjunk, és nem arra, hogy az összeset megkeressük, nem volt szükségünk a kétféle dominancia megkülönböztetésére.

Arról is volt már szó, hogy bizonyos sorok alkalmas kombinációja is domináns lehet egy sor felett, például a

|     |   | Piros |   |   |   |   |
|-----|---|-------|---|---|---|---|
|     |   | 1     | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Kék | 1 | 2     | 3 | 7 | 0 | 2 |
|     | 2 | 3     | 5 | 7 | 1 | 1 |
|     | 3 | 2     | 2 | 7 | 2 | 4 |

játékban az egy rész (azaz egy súlyrész) Kék 2 és egy rész Kék 3 stratégiából álló keverék domináns két rész Kék 1 felett.\*

Továbbá, ha egy sor olyan stratégiakeverék felett domináns, amelyben a stratégiák egyenlő arányban szerepelnek, akkor a keverék egyik stratégiája elhagyható.

Az ilyen helyzetekre vonatkozóan nincsenek szabályaink, felismerésük is

\* A második és harmadik sorban levő elemek összegét kettővel osztva a kapott számok rendre nagyobbak (vagy egyenlők), mint az első sor megfelelő elemei. (A lektor.)



gyakran nehézséget okoz. Valójában nem is várhatunk egyszerű szabályt, hiszen a probléma a jó kevert stratégia keresésének problémájához hasonló. Kicsit körülnézni azonban gyakran érdemes. Így például a 16. példában (Az örökös, 122. oldal) könnyen észre lehet venni, hogy a második és harmadik sor  $\frac{1}{2}:\frac{1}{2}$  arányú keveréke domináns az első sor felett. Így az első sort elhagyhatjuk a mátrixból.

Végül megemlítjük a dominancia egy végső típusát — a mátrix dominanciát — amely szellemében hasonlít a nyeregpont gondolatához, valójában annak általánosítása. Tekintsünk egy meglehetősen barátságtalan mátrixot:

|    |    |    |    |   |
|----|----|----|----|---|
| 1  | 3  | 1  | 4  | 6 |
| 2  | 0  | 3  | 3  | 1 |
| 3  | 1  | 3  | 5  | 4 |
| -1 | -1 | 6  | -1 | 2 |
| 0  | -4 | 0  | 3  | 4 |
| 2  | -1 | 10 | 1  | 2 |
| -3 | 0  | 3  | 4  | 5 |

Osszuk fel a mátrixot négy részre az alábbiak szerint:

|    |    |   |   |   |
|----|----|---|---|---|
| 1  | 3  | 1 | 4 | 6 |
| 2  | 0  | 3 | 3 | 1 |
| 3  | 1  | 3 | 5 | 4 |
| -1 | -1 |   |   |   |
| 0  | -4 |   |   |   |
| 2  | -1 |   |   |   |
| -3 | 0  |   |   |   |



A vonalkázott mátrixnak a következő fontos tulajdonsága van: a mátrix jobb oldalán levő *összes* oszlop domináns a vonalkázott mátrix *valamelyik* oszlopa felett és az árnyékolt mátrix *valamelyik* sora domináns a mátrix alsó részének *mindegyik* sora felett. Ha az árnyékolt mátrix rendelkezik a felsorolt tulajdonságokkal, akkor a megmaradó mátrix számainak nincs szerepe. Mindegy, hogy mik állnak ott, ezért nem is pazaroljuk időnket arra, hogy kitöltsük azt a részt. Valójában az árnyékolt részen kívüli számoknak egyáltalában nincs jelentősége, ezért a teljes mátrixot az árnyékolt mátrix által leírt játékra redukálhatjuk:

|   |   |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | 0 |
| 3 | 1 |

Ilyenfajta dominanciát nyilván érdemes keresni. A keresésben segítséget jelent az, hogy a mátrix sorait, ill. oszlopait szabadon felcserélhetjük. Bár a trükköt érdemes ismerni, nem mindig vezet eredményre. Néha jó, ha elvetjük a szokásos módszereket és nem pazaroljuk az időt mindenféle nagy mátrixokra, amelyek körében — ha nincs szerencsénk — nem találunk megoldást.

## EGYSZERŰ MEGOLDÁSOK

Eddig rendszerint óvakodtunk attól, hogy olyan szabályokat állítsunk fel, amelyek csak nagyon speciális játékokra érvényesek. Mégis, ezen a fokon szükségesnek tartjuk, hogy egy-két ilyen szabályt bevezessünk és reméljük, hogy ez nem okoz majd zavart.

Azt mondjuk, hogy egy játéknak *egyszerű* megoldása van, ha mindkét játékos büntetlenül alkalmazhatja *mindegyik* tiszta stratégiáját az ellenfél legjobb kevert stratégiájával szemben. Az ilyen játék speciális esete az, amikor a játékosok legjobb kevert stratégiája összes tiszta stratégiájukat tartalmazza; a javasolt legjobb stratégia elbírálására természetesen felhasználhatjuk a büntetlenség elvét. Az egyszerű megoldás fogalma általánosabb, mint az összes stratégia pozitív súllyal való alkalmazásán alapuló megoldás fogalma. Az előbbibe ui. az az eset is beletartozik, amelyben némelyik stratégiát nulla gyakorisággal alkalmazunk.



Például, az alábbi játéknak van egyszerű megoldása, mivel a játékosok akármelyik tiszta stratégiájukat alkalmazhatják az ellenfél legjobb kevert stratégiája ellen, ugyanakkor nem minden stratégiát használhatunk pozitív súllyal.

|              |   | Piros |     |   | Kék aránya |
|--------------|---|-------|-----|---|------------|
|              |   | 1     | 2   | 3 |            |
| Kék          | 1 | 6     | -10 | 3 | 0          |
|              | 2 | 4     | 4   | 4 | 1          |
|              | 3 | 2     | 11  | 5 | 0          |
| Piros aránya |   | 1     | 0   | 2 |            |

Az átlagos nyereség mindig 4 egység.

Mint mindig, most sincs holtbiztos módszerünk arra, hogy előre eldöntsük egy játékról, van-e egyszerű megoldása. Vannak azonban olyan esetek, amelyekben előre látható, hogy van egyszerű megoldás. Erre példa a következő:

A nyereségértékek összege minden sorban és minden oszlopban ugyanannyi. Például a

|     |   | Piros |    |   |   |
|-----|---|-------|----|---|---|
|     |   | 1     | 2  | 3 | 4 |
| Kék | 1 | 1     | 4  | 2 | 1 |
|     | 2 | -2    | 4  | 2 | 4 |
|     | 3 | 7     | -2 | 2 | 1 |

játékban minden sor összege 8, minden oszlop összege 6. Az ilyen játékoknak van egyszerű megoldása és könnyen meg is található: a megoldás az összes stratégia egyenlő arányban való alkalmazása, vagyis Kék számára az 1:1:1, Piros számára az 1:1:1:1 arányú stratégiakeverék. A játék értékét úgy határozhatjuk meg, hogy a sorok összegét elosztjuk Kék stratégiáinak számával, vagy az oszlopok összegét elosztjuk Piros stratégiáinak számával. Példánkban a játék értéke  $\frac{6}{3}$  vagyis  $\frac{8}{4}$ .



Van még egy olyan eset, amelyben előre látható, hogy van egyszerű megoldás, de ez az írótól is, az olvasótól is erőfeszítéseket kíván, ugyanis meg kell ismerkednünk a *diagonális mátrix* és a *szeperált átló* fogalmával.

Egy mátrix, mondjuk a

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 3 | 0 | 2 | 8 |
| 9 | 2 | 3 | 0 |
| 0 | 7 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 6 | 2 |

mátrix átlóit úgy lehet könnyen megtalálni, hogy kétszer egymás alá leírjuk a mátrixot és az alábbiak szerint ferde vonalakat húzunk:

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 3 | 0 | 2 | 8 |
| 9 | 2 | 3 | 0 |
| 0 | 7 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 6 | 2 |

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 3 | 0 | 2 | 8 |
| 9 | 2 | 3 | 0 |
| 0 | 7 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 6 | 2 |

(Ha már értjük, hogyan történik, nem kell kétszer leírni a mátrixot.)



Azt mondjuk, hogy egy átló *szeperált* a mátrix többi részétől, ha kivételesen nagy számokból áll: legkisebb eleme is nagyobb, mint a mátrix megmaradt részének legnagyobb eleme.

Szükségünk van ezenkívül egy bűvös számra, amit  $B$ -vel jelölünk és úgy kapunk, hogy a mátrix sorainak számát megszorozzuk a szeperált átló elhagyása után megmaradó elemek közül a legnagyobbikkal. Ezzel az előkészítő munkálatok végéhez értünk.

Ha egy mátrixnak van szeperált átlója és a nyereségértékek összege minden sorban *vagy* minden oszlopban legalább akkora, mint a  $B$  bűvös szám, akkor a játéknak van egyszerű megoldása.

Példánkban a 9-7-6-8 átló szeperált. A sorok száma 4, a megmaradt rész legnagyobb nyereségértéke 3, tehát  $B = 4 \cdot 3 = 12$ . A sorok és az oszlopok nyereségértékeinek összege rendre 13, 14, 12, 13, ill. 14, 12, 13, 13 — mindegyik legalább akkora, mint a bűvös szám. A sorokra és oszlopokra is teljesül a feltétel! Ez több, mint amit kívántunk). Így a játéknak van egyszerű megoldása. Ez csak egyszerű, ugye?

## TÖBB MEGOLDÁS ESETE

Az eddigiekben rendszerint arra törekedtünk, hogy a játékoknak legalább egy megoldását megtaláljuk. Nyilvánvaló, hogy egy játéknak több megoldása is lehet.

Pontosabban: egy játéknak vagy pontosan egy, vagy végtelen sok megoldása van. Bár könyvünkben legtöbb kijelentésünket nem bizonyítottuk, ennek bizonyítása olyan egyszerű, hogy nincs szívünk Olvasóinkat megfosztani tőle. Tegyük fel, hogy egy játéknak legalább két megoldása, vagyis legalább két jó kevert stratégiája van. Ezeket azonban, mint tudjuk, tetszés szerinti arányban keverve újra jó kevert stratégiát kapunk. Mivel végtelen sokféle arány van, a megoldások száma is végtelen.

Úgy látszik ebből, hogy a megoldások összeszámlálása nem valami kellemes időtöltés. Az összeszámlálásnak van azonban egy értelmes módja: az *alpmegoldások* összeszámlálása.

Az alpmegoldásokat a következőképpen definiáljuk: Ha egy négyzetes részmátrixnak (vagyis részjátéknak) egyértelmű egyszerű megoldása van — azaz mindegyik játékosnak van egy olyan kevert stratégiája, ami ellen az ellenfél bármely tiszta stratégiáját alkalmazva sem kapunk felesleges veszteséget és ha ez az egyszerű megoldás az eredeti játéknak is megoldása, akkor alpmegoldásnak nevezzük. Minden játéknak véges számú négyzetes részmátrixa van (és ezek közül nem is biztos, hogy mindegyiknek van egyszerű megoldása), tehát az alpmegoldások száma is véges. A megoldások összességét az alpmegoldások összes lehetséges keverékeként kapjuk meg.



Íme egy példa:

|     |   | Piros |   |   |
|-----|---|-------|---|---|
|     |   | 1     | 2 | 3 |
| Kék | 1 | 2     | 6 | 0 |
|     | 2 | 5     | 3 | 6 |
|     | 3 | 4     | 4 | 3 |

Nincs nyeregpont (ami pedig alapmegoldás lenne). A kilenc  $2 \times 2$ -es részmátrix közül az alábbi kettőnek van

|   |   |
|---|---|
| 2 | 6 |
| 5 | 3 |

|   |   |
|---|---|
| 6 | 0 |
| 3 | 6 |

olyan teljesen kevert (és ezért egyszerű) megoldása, amelyik az eredeti játékot is kielégíti. A megoldások a következők: Kék 2:4:0 Piros 3:3:0 ellen, ill. Kék 3:6:0 Piros 0:6:3 ellen. (A közös tényezőket az egyszerűség kedvéért meghagytuk.) A  $3 \times 3$ -as mátrixnak is van egyszerű megoldása és mivel ez maga az eredeti mátrix, az egyszerű megoldás alapmegoldás. Ez a megoldás azonban véletlenül megegyezik az egyik korábbi alapmegoldással (az elsővel). Így a játéknak két különböző alapmegoldása van. A közös tényezőkkel végigosztva ezeket a következőképpen írhatjuk fel:

Kék 1:2:0 Piros 1:1:0 ellen

és

Kék 1:2:0 Piros 0:2:1 ellen.

Így Kék legjobb stratégiája egyértelmű, nevezetesen az 1:2:0 stratégiakeverék. Piros viszont az 1:1:0 vagy a 0:2:1 kevert stratégiákat vagy ezek bármilyen arányú keverékét alkalmazhatja. Például, ha Piros az első alapmegoldást 3 súllyal, a másodikat 5 súllyal alkalmazza, akkor a 3:3:0 és 0:10:5 keverékek összeadásával a 3:13:5 jó kevert stratégiát kapjuk.

Az elmondottak alapján nem okozhat nehézséget a következő játék alapmegoldásainak megkeresése. Segítségül eláruljuk, hogy Kéknek öt, Pirosnak egy alapmegoldása van. A feladat megoldása a könyv végén megtalálható.



## Feladat

|     |   | Piros |    |     |    |
|-----|---|-------|----|-----|----|
|     |   | 1     | 2  | 3   | 4  |
| Kék | 1 | 16    | -8 | 9   | -3 |
|     | 2 | -20   | 4  | 9   | -3 |
|     | 3 | 25    | 1  | 18  | -6 |
|     | 4 | -11   | 13 | -18 | 6  |

## A MÉRTÉKRŐL

A játékelmélet egyik nyilvánvaló nehézsége, hogy olyan dolgokhoz is mértéket kell előírunk, amikhez nem lehet biztos alapon mértéket hozzárendelni. Ez egyrészt nagy nehézséget jelent, amit nem szabad lebecsülni, másrészt könnyen túlbecsülhetjük, ha helytelenül ítéljük meg azt a folyamatot, amellyel a mértékek meghatározzák a játék stratégiáit és kimenetelét. Ebben a fejezetben felelevenítjük és némileg kiterjesztjük a mértékekkel kapcsolatos ismereteinket.

A dominanciával kapcsolatos elemzésekből nyilvánvalóan következik, hogy bizonyos helyzetekben nem minden eseményhez kell pontos mértéket hozzárendelnünk. Néha pontos mérés (pl. mennyiségi összehasonlítás) nélkül is el tudjuk dönteni bizonyos sorokból, oszlopokról és részmátrixokról, hogy elhagyhatók. Lehet, hogy olyan elemeket hagyunk el, amelyekhez pontos mértéket nehezen tudtunk volna hozzárendelni. Felesleges az erdő összes fáját megmérni ahhoz, hogy megtaláljuk a legmagasabbat.

Már tanulmányaink elején megfigyeltük, hogy a játékosok legjobb stratégiája nem változik meg, ha a játék mátrixának minden eleméhez hozzáadunk egy állandó értéket. Így például, ha valamilyen elrendezésben négy különböző szám — mondjuk 1, 7, 11 és 1066 — szerepel a mátrixban, akkor nem követünk el hibát azzal, hogy mindegyik nyereségértéket egyforma mértékben elhibázzuk, például mindegyik helyett 533-mal kevesebbet veszünk, és így a -532, -526, -522 és 533 nyereségértékeket alkalmazzuk. Azt is megfigyeltük, hogy a játékok játszási módját az állandó pozitív számmal való szorzás sem változtatja meg. Így például az előző számhalmaz helyett  $\frac{1}{13}$ -dal szorozva a  $-40\frac{12}{13}$ ,  $-40\frac{6}{13}$ ,  $-40\frac{2}{13}$  és 14 nyereségértékeket is vehetjük. Tetszés szerinti sorrendben, akárhányszor változtatjuk meg a fenti módon a mátrix elemeit. Például a legutolsó számhalmaz minden eleméhez



hozzáadhatunk még 40-et és biztosak lehetünk abban, hogy az

|      |   |      |
|------|---|------|
| 1    | 7 | 1    |
| 11   | 1 | 1066 |
| 1066 | 1 | 7    |

és a

|                  |                  |                  |
|------------------|------------------|------------------|
| $-1\frac{2}{13}$ | $-\frac{6}{13}$  | $-1\frac{2}{13}$ |
| $-\frac{2}{13}$  | $-1\frac{2}{13}$ | 81               |
| 81               | $-1\frac{2}{13}$ | $-\frac{6}{13}$  |

játékok játszási módja azonos.

Világos, hogy a játék stratégiáinak konstans hozzáadásával és konstanssal szorzással szembeni változatlansága bizonyos tekintetben elősegíti a mérték pontos előírását. Ennek jelentőségét akkor ítéljük meg igazán, ha olyan nyereségmátrixot vizsgálunk, amelyben csak három különböző nyereségérték van. Mindegy, hogy milyen számot rendelünk a legkevésbé kedvező és a legkedvezőbb eseményhez, minden ezeknek a számoknak a harmadikhoz való relatív helyzetétől függ.

Továbbá, ne feledkezzünk meg arról, hogy bár a fenti átalakítások a játszási módot nem változtatják meg, a játék értéke megváltozik. Fontos megjegyezni, hogy a játék értéke lehet 20 helyett 10, vagy 10 helyett 20, bár mindig ugyanaz a jó stratégia biztosítja a különböző nyereségek elérését. Ha a játékosok szabadon dönthetnek arról, hogy játsszanak-e, akkor a játék értékének változása befolyásolhatja döntésüket.

Így a játékok stratégiái a szélső nyereségértékek között, a középső tartományban érzékenyek lehetnek a mérési hibákra. A nagy és a kis elemek fenti módon történő megváltoztatása nem okoz változást a legjobb stratégia kiválasztásában, ha a többi értéket is megfelelően változtatjuk. A mérték hibái, a stratégiák és a játék értékének kapcsolatát egy skálaváltoztatási kísérlettel mutatjuk be:

Tekintsük a következő  $3 \times 3$ -as játékot:

|     |   |       |   |    |
|-----|---|-------|---|----|
|     |   | Piros |   |    |
|     |   | 1     | 2 | 3  |
| Kék | 1 | 6     | 2 | 0  |
|     | 2 | 4     | 8 | 4  |
|     | 3 | 3     | 3 | 10 |

A nyereségek 0 és 10 közötti számok. Az itt következőkben minden játékot ezek közé a határok közé fogunk szorítani, így bizonyos skálahibákat –



konstans hozzáadását, konstanssal való szorzást — ki tudunk küszöbölni a játék értékéből. A mérték hibáit azzal fogjuk szimulálni, hogy a mátrix elemeit egymástól függetlenül a következő szabályok szerint változtatjuk: Egyforma valószínűséggel  $-1$ -et,  $0$ -t vagy  $+1$ -et adunk a mátrix elemeihez, ezzel egységes véletlen hibát szimulálunk. Kivételt képeznek a szélső esetek: az eredeti  $0$ -t és  $10$ -et sohasem változtatjuk meg és elvetjük az olyan változtatásokat, amelyek következtében bizonyos nyereségértékek ezen a határon kívülre kerülnének. Célunk az, hogy a nyereségértékek az eredeti határok között maradjanak. A véletlen számtáblázat segítségével úgy adódott, hogy játékunk az alábbi játékká alakult át:

|     |   | Piros |   |    |
|-----|---|-------|---|----|
|     |   | 1     | 2 | 3  |
| Kék | 1 | 7     | 2 | 0  |
|     | 2 | 4     | 7 | 5  |
|     | 3 | 2     | 4 | 10 |

Az eljárást folytatni lehet, ezt a mátrixot is alávethetjük az előbb leírt véletlen átalakításoknak. Így újabb mátrixhoz jutunk, amely valószínűleg kevésbé szoros kapcsolatban van az eredetivel, mint a második stb. Fel foghatjuk a dolgot úgy is, hogy a harmadik mátrix az eredeti és abból vezettük le az első két véletlen lépéssel. A továbbiakban meglátjuk majd a nézőpont előnyeit.

Kérdésünk a következő: Tegyük fel, hogy azt gondoljuk, az egyik játék — mondjuk az első — a helyes, de a valóságban egy másikat — mondjuk a másodikat vagy a harmadikat — játszunk. Milyen súlyos következményei vannak tévedésünknek? A kérdést Kék szempontjából vizsgáljuk.

A második (helyes) játékban Kéknek  $22:26:16$  arányban kell stratégiáit kevernie, ami  $4\frac{17}{32}$  nyereséget, a játék értékét biztosítja számára. Feltevésünk szerint azonban Kék tévesen az első játékra alapozza stratégiáját és ezért a  $7:7:6$  kevert stratégiának megfelelően játszik. A következmények attól függnék, hogy Piros hogyan játszik. Ha Piros a Piros 1, 2, ill. 3 stratégiákat alkalmazza, akkor Kék nyeresége rendre  $4\frac{9}{20}$ ,  $4\frac{7}{20}$ , ill.  $4\frac{15}{20}$ . Kék a legkedvezőtlenebb esetben  $4\frac{7}{20}$  egységet nyer, ami  $0,18$  egységgel kevesebb  $4\frac{17}{32}$ -nél, annál, amit az igazi mátrix ismeretében nyerhetett volna.

Kísérletünk az alábbiak szerint zajlott le. Az eredeti mátrixot 14, egymás utáni lépésben kapott mátrix követi:



1.

|   |   |    |
|---|---|----|
| 6 | 2 | 0  |
| 4 | 8 | 4  |
| 3 | 3 | 10 |

2.

|   |   |    |
|---|---|----|
| 7 | 2 | 0  |
| 4 | 7 | 5  |
| 2 | 4 | 10 |

3.

|   |   |    |
|---|---|----|
| 6 | 2 | 0  |
| 3 | 6 | 4  |
| 1 | 3 | 10 |

4.

|   |   |    |
|---|---|----|
| 7 | 1 | 0  |
| 4 | 7 | 3  |
| 0 | 4 | 10 |

5.

|   |   |    |
|---|---|----|
| 6 | 2 | 0  |
| 3 | 7 | 3  |
| 1 | 5 | 10 |

6.

|   |   |    |
|---|---|----|
| 5 | 3 | 0  |
| 3 | 7 | 4  |
| 1 | 4 | 10 |

7.

|   |   |    |
|---|---|----|
| 4 | 3 | 0  |
| 3 | 7 | 3  |
| 2 | 3 | 10 |

8.

|   |   |    |
|---|---|----|
| 3 | 3 | 0  |
| 2 | 8 | 4  |
| 2 | 4 | 10 |

9.

|   |   |    |
|---|---|----|
| 2 | 3 | 0  |
| 1 | 8 | 4  |
| 3 | 3 | 10 |

10.

|   |   |    |
|---|---|----|
| 1 | 2 | 0  |
| 1 | 8 | 4  |
| 3 | 4 | 10 |

11.

|   |   |    |
|---|---|----|
| 1 | 1 | 0  |
| 0 | 8 | 4  |
| 2 | 5 | 10 |

12.

|   |   |    |
|---|---|----|
| 1 | 2 | 0  |
| 0 | 8 | 3  |
| 1 | 4 | 10 |

13.

|   |   |    |
|---|---|----|
| 0 | 3 | 0  |
| 1 | 8 | 4  |
| 2 | 3 | 10 |

14.

|   |   |    |
|---|---|----|
| 0 | 2 | 0  |
| 1 | 7 | 3  |
| 1 | 3 | 10 |

15.

|   |   |    |
|---|---|----|
| 0 | 3 | 0  |
| 2 | 7 | 4  |
| 0 | 4 | 10 |



Az utolsó tíz játék mindegyike az öt megelőző öt játéknak megfelelő helyes játékként kezelhető.

A játékok legjobb stratégiái:

| Játék | Kék      | Piros    | Érték            |
|-------|----------|----------|------------------|
| 1     | 7:7:6    | 14:2:4   | 4%               |
| 2     | 22:26:16 | 40:5:19  | $4\frac{1}{2}\%$ |
| 3     | 25:24:14 | 36:10:17 | $3\frac{1}{3}\%$ |
| 4     | 34:32:27 | 51:9:33  | $3\frac{2}{3}\%$ |
| 5     | 36:12:24 | 41:15:16 | 3%               |
| 6     | 33:3:18  | 36:4:14  | 3%               |
| 7     | 4:0:2    | 5:0:1    | $3\frac{1}{3}\%$ |
| 8     | 8:0:3    | 10:0:1   | $2\frac{2}{3}\%$ |
| 9     | 0:0:1    | 1:0:0    | 3                |
| 10    | 0:0:1    | 1:0:0    | 3                |
| 11    | 0:0:1    | 1:0:0    | 2                |
| 12    | 0:0:1    | 1:0:0    | 1                |
| 13    | 0:0:1    | 1:0:0    | 2                |
| 14    | 0:0:1    | 2:0:0    | 1                |
| 15    | 0:1:0    | 1:0:0    | 2                |

A közös tényezőkkel nem osztottuk, így Kék, ill. Piros aránya számainak összege soronként azonos.

Ezekkel az információkkal a számítások áttekinthetőbbé váltak.

*Kék átlagosan ennyit veszít nyereségéből:*

A játék véletlen hibalépéseinek száma:

|                                          |    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    |
|------------------------------------------|----|------|------|------|------|------|
| Melyik játékon alapszik Kék stratégiája? | 1  | 0,18 | 0,30 | 0,09 | 0,38 | 0,46 |
|                                          | 2  | 0,21 | 0,22 | 0,30 | 0,37 | 0,24 |
|                                          | 3  | 0,57 | 0,47 | 0,21 | 0,16 | 0,33 |
|                                          | 4  | 0,32 | 0,41 | 0,26 | 0,36 | 1,05 |
|                                          | 5  | 0,22 | 0,17 | 0,23 | 0,83 | 1,33 |
|                                          | 6  | 0,06 | 0,12 | 0,72 | 1,33 | 0,72 |
|                                          | 7  | 0,06 | 0,67 | 1,33 | 0,67 | 0,00 |
|                                          | 8  | 0,73 | 1,45 | 0,73 | 0,00 | 1,45 |
|                                          | 9  | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
|                                          | 10 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 2,00 |



A táblázat azt mutatja, hogy Kék nyereménye mennyivel süllyedt a játék értéke alá, ha stratégiája nem azon a mátrixon alapul, amelyik szerint a játékot játsszák. A táblázatban a legnagyobb eltéréseket tüntettük fel. Kedvező esetben Kék kisebb büntetést fizet hibájáért.

A táblázatban jobbra haladva a számok általában növekednek. Minél jobban eltérünk a helyes játéktól, annál nagyobb lesz a hiba. A hibák növekedésének tendenciáját mutatja az is, hogy az egyes oszlopok átlagértékei jobbra haladva egyre nagyobbak, az öt oszlop átlagértéke rendre 0,24, 0,38, 0,39, 0,41 és 0,76.

Kísérletünkből az a tanulság, hogy a mátrix véletlen hibája — bár nem kívánatos — nem szükségképpen katasztrofális. Az eseteknek mintegy felében a hiba 0,30-nál kisebb, ami — tekintve hogy a nyereségértékek 3,00 és 4,00 között változnak — durván 10% hibát jelent.

A helyzet a maga teljességében — legalábbis a szerző számára — azt jelenti, hogy a mérték előírása körüli hiányosságok ellenére az elméletől lényeges eredményeket várhatunk.

## KVALITATÍV NYERESÉGEK

Az előző fejezet tárgyának természetesen adódó folytatása a kvalitatív nyereségek bevezetése.

Fejezetünkben megismerkedünk a mérték előírásának egy nagyon gyenge formájával, az ún. *rendezéssel*. A rendezés azt jelenti, hogy a nyereségeket egyszerűen valamilyen sorrendbe állítjuk. Az alábbi dolgokat például hőmérsékletük szerint rendezhetjük: egy jégdarab, egy fehéren izzó fémrúd, egy csésze tea, az emberi vér és a Nap.

A játékelmélet szempontjából nem reménytelenek az olyan helyzetek sem, amelyekben csak kvalitatív nyereségeket tudunk megadni, vagyis amelyekben számszerű nyereségértékek helyett kénytelenek vagyunk a nyereségek valamilyen szempont szerinti felsorolásával megelégedni. Vannak ugyanis olyan játékok, amelyekben a nyereségek rendezése elégséges alapot nyújt a legjobb stratégiák kiválasztására és a játék értékének meghatározására.

Tegyük fel, hogy egy játékban a következő nyereségértékek lehetségesek: rossz (*r*), igazságos (*i*), jó (*j*) és nagyszerű (*n*). A megoldás módszere ugyanaz, mintha a nyereségértékek számok volnának. Először nyeregpontot keresünk.

A sorminimumok legnagyobbika (a maximin) megegyezik az oszlopmaximumok legkisebbikével (a minimaxszal). Így Kéknek a Kék 2, Pirosnak a Piros 1 tiszta stratégiát kell alkalmaznia. A játék értéke Kék számára *igazságos*.



Lényegtelen, hogy mekkora a mátrix és melyik helyén van a csillaggal megjelölt elem.

A nyeregpont definíciója szerint a csillag *oszlopában* a csillaggal megjelölt szám a *legnagyobb*. Nyilvánvaló, hogy ha az oszlopban szereplő többi számot úgy változtatjuk meg, hogy továbbra is a csillaggal jelölt szám legyen a legnagyobb, akkor az eredmény nem változik.

Hasonlóképpen, a csillag *sorában* a csillaggal megjelölt szám a *legkisebb*. Amíg ez a szám marad a legkisebb, addig a sor többi elemét akárhogyan megváltoztathatjuk.

Végül azok az elemek, amelyek a csillag során és oszlopán *kívül* helyezkednek el, egyáltalában nem befolyásolják a játékot. Ezek a játék játszási módja és értéke szempontjából közömbösek.

A játék értéke a csillag értékén kívül semmi mástól nem függ, így a játék értékét olyan pontossággal tudjuk meghatározni, amilyenel a csillag helyén álló nyereségértéket ismerjük.

A következő játékokban bizonyos megállapításokat teszünk azzal kapcsolatban, hogy mi a játék legjobb játszási módja.

|                |   | Piros |     |       | Sorminimum |
|----------------|---|-------|-----|-------|------------|
|                |   | 1     | 2   | 3     |            |
| Kék            | 1 | $r$   | $n$ | $i$   | $r$        |
|                | 2 | $j$   | $i$ | $j$   | $i^*$      |
|                | 3 | $r$   | $j$ | $r$   | $r$        |
| Oszlop maximum |   | $j^*$ | $n$ | $j^*$ |            |

A maximin *igazságos*, a minimax *jó*, tehát a játéknak nincs nyeregpontja. Annyit azonban tudunk, hogy a játék értéke ilyen esetben valahol az *igazságos* és a *jó* között van.

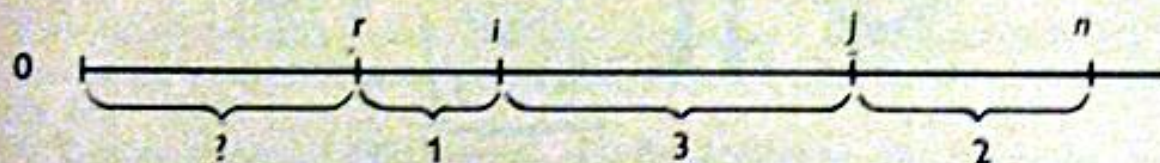
Továbbá, Kék 1 dominálja Kék 3-at, Piros 3 dominálja Piros 1-et, így játékunkat az alábbi, egyszerűbb alakban írhatjuk fel:

|     |   | Piros |     |
|-----|---|-------|-----|
|     |   | 1     | 2   |
| Kék | 1 | $r$   | $n$ |
|     | 2 | $j$   | $i$ |



A Kék 1 stratégia alkalmazásának gyakoriságát a *jó* és az *igazságos* közti különbséggel, a Kék 2 stratégia gyakoriságát a *nagyszerű* és a *rossz* közötti különbséggel mérhetjük. Ily módon attól függetlenül, hogy milyen számértékeket rendelünk ezekhez a szavakhoz, nyilvánvaló, hogy Kéknek a Kék 2 stratégiát sokkal gyakrabban kell alkalmaznia, mint a Kék 1-et és a Kék 3 stratégiát sohasem szabad használnia.

Piros helyzete nem ilyen egyszerű. A Piros 1 stratégia gyakoriságát a *nagyszerű* és az *igazságos* különbsége, a Piros 2 stratégia gyakoriságát a *jó* és a *rossz* különbsége adja meg. Nem lehet egyértelműen megmondani, hogy a két különbség közül melyik a nagyobb. Piros legjobb kevert stratégiájáról így csak annyit mondhatunk, hogy Piros 1-et és Piros 2-t kell kevernie, kevésbé szélsőséges arányban, mint ahogy Kéknek kell stratégiáit kevernie. Ezen azt értjük, hogy Piros keverékében az arányok sokkal közelebb állnak egymáshoz, mint Kék stratégiáinak arányai. Erről konkrét számpéldával győződhetünk meg. Ha a nyereségértékeket például az alábbiak szerint



adjuk meg, akkor Kéknek 3:6, Pirosnak 5:4 arányban kell stratégiáit kevernie.

### 33. Példa. Portia

Shakespeare *A velencei kalmár* című színművében a modern üzleti játék egy korai példáját fedezhetjük fel.

Portia, a gazdag hölgy nem választhatja férjéül azt, akit szeret és nem utasíthatja vissza azt, akit nem szeret. Atyjának végakarata ugyanis az volt, hogy aki lánya kezére és saját szerencséjére pályázik, annak a következőket kell tennie. Minden kérő elé odatesznek 3 ládikót, amelyik egyikében Portia képe van. A kérőnek valamelyiket fel kell nyitnia. Portia azé lesz, aki megtalálja képmását. Az üzleti játéktól eltérően, ahol a borsót oda helyezik, ahol érdeklődnek iránta, Portia atyja akármelyik ládába tehette a képet. Mivel az atya erényes ember volt, a kérők nem tudhatták, hogy halála előtt milyen sugallat hatására helyezte el a ládában a képet.

A játékban bizonyos kellemetlen mellékfeltételek is vannak. A kérőket esküjük három dologra kötelezi: először is, senkinek sem szabad elmondaniuk, hogy melyik ládát választották. Ezzel Portia, ill. Portia apja a kérők közötti koalíciót akadályozza meg. Másodszor, aki hibásan választ, az többé senkinek a kezét sem kérheti meg. Végül annak, akinek választása nem sze-



renesés, tüstént búcsúznia kell. A ládikókon hasznos tanácsok olvashatók. Az első ládikó aranyból van, felirata: „Bennem nyered el azt, amit sokan kívánnak”. A második ezüst, felirata: „Bennem nyered el azt, amit meg-



érdemelsz”. A harmadik ólom, felirata: „Engem választ, aki mindent kockára tesz”.\* Portia kérői majdnem mind rosszul választottak. A játék nyilván az alábbi típusú  $3 \times 3$ -as játék:

Portia atyja az  
arany ezüst ólom ládát választja

|        |       |     |     |     |
|--------|-------|-----|-----|-----|
| A kérő | arany | $P$ | $a$ | $a$ |
|        | ezüst | $a$ | $P$ | $a$ |
|        | ólom  | $a$ | $a$ | $P$ |

A mátrixban  $P$  Portia elnyerését,  $a$  az agglegénységet jelenti. Az előbbinek a kérők nyilván pozitív értéket tulajdonítanak.

A kérő vagy nulla összegű játéknak tekinti ezt, vagy megpróbál belehelyezkedni az atya gondolkodásába. Mivel az atya nyilvánvalóan nem

\* Vas István fordítása. (A fordító.)



tartozott a szokásos típusú gondolkodók közé, az utóbbi megközelítés nem biztat sok reménnyel.

A mátrix szimmetriája következtében nyilvánvaló, hogy az aranyat, ezüstöt és ólmot egyenlő arányban kell keverni. A játék értéke

$$\frac{P+2a}{3}.$$

A kérőnek akkor érdemes játszania, ha  $P+2a$  pozitív.  $P$  biztosan pozitív,  $a$  valószínűleg negatív. Így a kérőnek az alábbiak szerint kell eldöntenie, hogy játsszon-e (feltéve, hogy játékelméleti értelemben ésszerűen viselkedik): legalább kétszer olyan becsesnek kell lennie számára Portiának, mint amennyire nem kívánatosnak tartja az aggregénységet. Ez az információ a döntést ugyan nem könnyíti meg, de világosabbá teszi a helyzetet.

#### 34. Példa. A hölgy vagy a tigris

Következő példánk Frank Stockton története, „A hölgy vagy a tigris”. A történetet kissé módosítottuk és így az eredeti  $2 \times 2$ -es játékból  $2 \times 3$ -as játék lett.

A királykisasszony beleszeretett egy fiatalemberbe, akire a király ezért megneheztelt. Arra ítélte, hogy két ajtó közül ki kell nyitnia egyet. Az egyik ajtó mögött egy gyönyörű szép fiatal hölgy, a másik mögött egy gyönyörű szép fiatal tigris várakozott az elvetemült fiatalemberre. (Ha a hölgyhöz vezető ajtót nyitja ki, akkor feleségül kell vennie őt.)

Azt gondolhatnánk, hogy ebben a helyzetben nem várhatunk sokat az elemzéstől. A fiatalember, akinek helyzete a miénknél rosszabb volt, azonban rájött arra, hogy a király több szabaságot adott neki, mint ahogy szándékában állt: ugyanis, ha a két ajtót egyszerre kinyitja, akkor az ebből adódó felfordulás közepette elmenekülhet.

Időközben a királylány megtudta a király minden tervét, kivéve azt, hogy atyja nem óhajtotta titkolni előle szándékait. Figyelmeztette a fiatalembert, közölte vele, hogy melyik ajtót kell kinyitnia.

A fiatalembernek így már sok mindent meg kellett gondolnia. Ha a királylány valóban szereti őt, akkor megmenti, ha viszont csak kevéssé szereti vagy nagyon szereti, akkor azt tartja előnyösebbnek, ha élete hátralevő részét a tigris társaságában éli le. A királylánynak két stratégiája van: a hölgyhöz vagy a tigrishez küldheti a fiatalembert. A fiatalembernek viszont három stratégiája van: vagy követi a királylány tanácsát, vagy annak ellenkezőjét teszi, végül megpróbálhatja a tigrist a hölgygel kielégíteni.

Ahelyett, hogy a fiatalember helyébe képzelve magunkat a lehetséges esetekhez pontos nyereségértékeket rendelnénk, megvizsgáljuk a probléma szerkezetét azzal a grafikus módszerrel, amelyet a II. részben ismertünk meg.

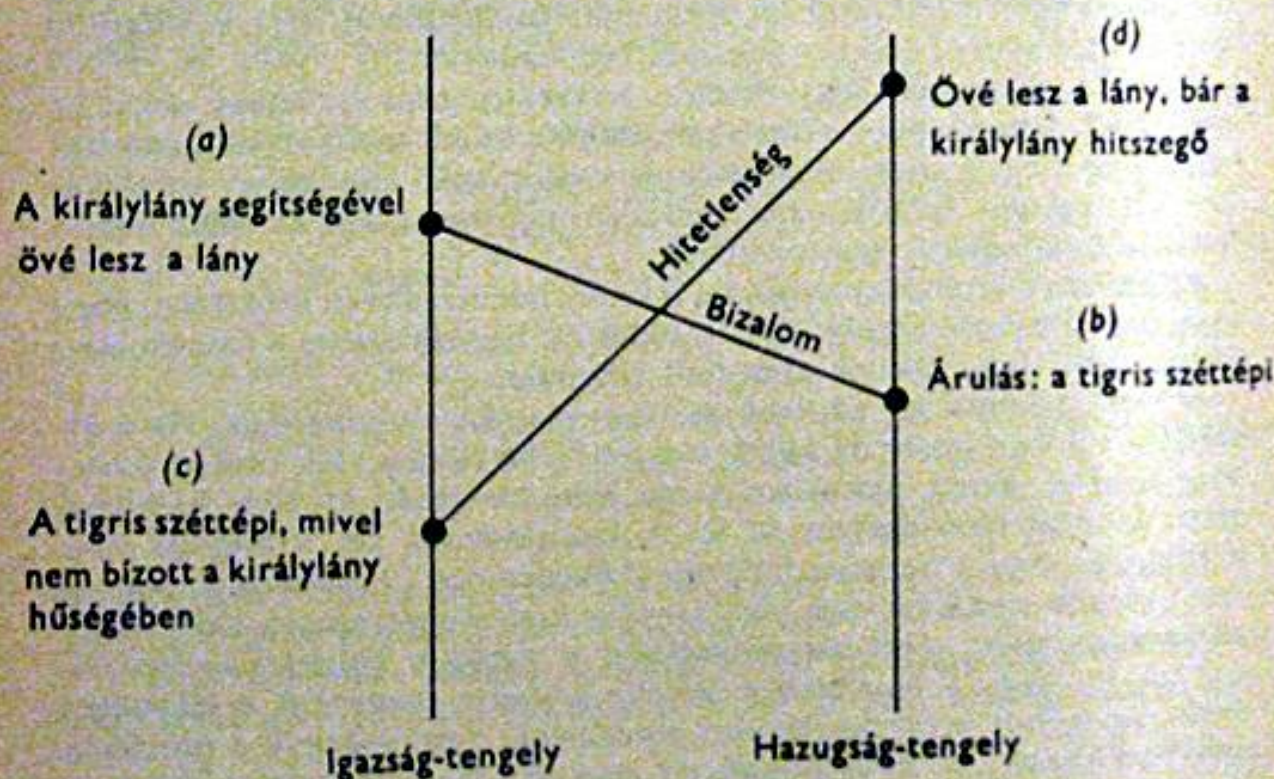


A nyereségértékeket az ábécé betűivel jelöljük, hogy később hivatkozni tudjunk rájuk.

### A kiráylány tanácsa

|                                           |             | Igaz     | Hamis    |
|-------------------------------------------|-------------|----------|----------|
| A fiatalember<br>viselkedésének<br>alapja | Bizalom     | <i>a</i> | <i>b</i> |
|                                           | Hitetlenség | <i>c</i> | <i>d</i> |
|                                           | Kétség      | <i>e</i> | <i>f</i> |

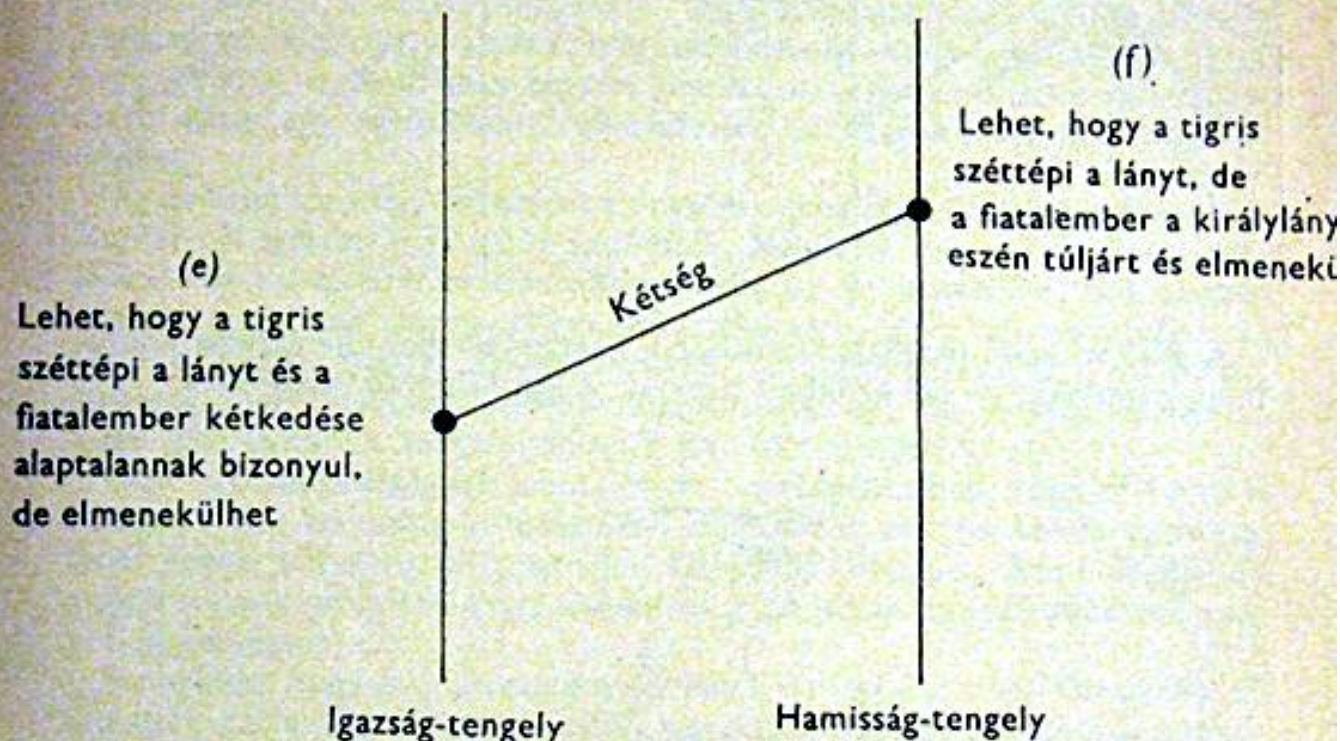
Rajzoljuk fel a kiráylány két stratégiájának megfelelően a két tengelyt (egyet az Igaz, egyet a Hamis stratégiáknak). Az, hogy az egyes események a tengelyeken milyen magasan helyezkednek el, attól függ, hogy milyen értékeket adunk azoknak. Az *a*, *b*, *c* és *d* esetek kvalitatív elhelyezése nyilvánvaló:





A Bizalom és a Hitetlenség stratégiákra szorítkozva a rajzról világosan látható, hogy kevert stratégiát kell alkalmazni, hiszen az összekötőszakaszok metszik egymást. (Kvalitatív szinten nem változik a helyzet akkor sem, ha  $a$ -t  $d$ -nél nagyobbra vesszük.)

Tekintsük most a másik két lehetőséget. Ezt az előző rajz tengelyeire valahogy így lehet ráhelyezni:

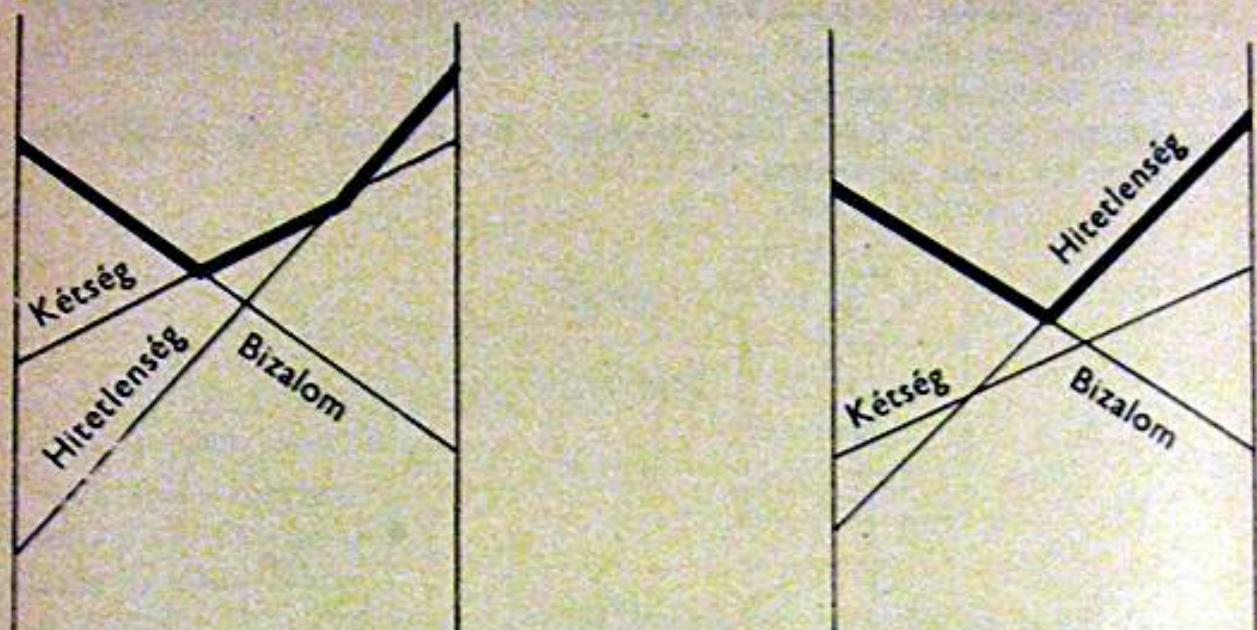


Bármilyen magasan is vannak ezek az értékek, biztos hogy (az Igaztól a Hamis felé haladva) a szakasz felfelé megy.

A nehézségek akkor kezdődnek, amikor a két rajzot egymásra akarjuk helyezni. Az a probléma, hogy a Kétség vonala a Bizalom és a Hitetlenség metszéspontja felett vagy alatt halad-e. Ha felül van, akkor a Bizalmat, a Kétséget és a Hitetlenséget, ha alul, akkor a Bizalmat és a Hitetlenséget kell keverni. A vonalak meredekségétől, a Kétség és a metszéspont távolságától függetlenül a fentiek egészen addig érvényesek, amíg a Kétség nem kerül olyan magasra, hogy egyik vonalat sem metszi. Ebben az esetben a játéknak nyeregpont megoldása van; a Kétség. A két alaphelyzet rajzban



a következő:



A gyakoriságok meghatározásához a fiatalember helyébe kellene képzel-  
nünk magunkat — ezt azonban hagyjuk, hadd bűnhődjön egyedül.





## EGY JÁTSZMÁBÓL ÁLLÓ JÁTEKOK

Hogy a most tárgyalandó kérdést az eddigiekben nem érintettük, a hivatásos és a laikus Olvasók számára egyaránt boldogtalanságot jelenthetett — igaz, pontosan ellentétes okból. Úgy véljük, hogy a kérdéssel foglalkoznunk kell, még akkor is, ha Olvasóink számára ez nem jelent különösebb örömet.

A laikus Olvasók úgy gondolhatják, hogy a játékelmélet nyilvánvalóan nem alkalmazható olyan játékokra, amelyeket csak egyszer játszanak, hiszen a kevert stratégia fogalma — legalábbis látszólag — több játszma játszására épül. Azzal érvelnek, hogy példáink némelyike, például „A hölgy vagy a tigris” nyilván csak egyszer játszható. Talán ki is nevetnek minket azért, mert úgy vélik, hogy lelkesedésünk túlságosan messzire juttatott minket.

Az is érthető, hogy hivatásos Olvasóink is igénylik a kérdés elemzését. Ámbár ők egészen más miatt aggódnak. Nekik az nem tetszik, hogy nem jelentettük ki: az elmélet kimondottan csak az egy játszmából álló, egyszer játszott játékokra alkalmazható. Ők bizonyára görbe szemmel nézik az olyan példákat, mint a „Daiquiri koktél” (és méginkább „Az utcai árus”), amelyek nyilvánvalóan többször lejátszhatók. Így ők is azon nevetnek, hogy lelkesedésünk milyen messzire juttatott minket.

Nem kell jóstehetségnek lenni annak megállapításához, hogy ez a terület nem alkalmas hosszabb kirándulások megtételére, mivel a kérdés természeténél fogva könnyen átléphetnénk könyvünk keretein. Ezért éppencsak annyit fogunk mondani, hogy Olvasóink a ködön át megpillanthassák a távoli hegycsúcsokat.

Reméljük, hogy a matematika területén kevésbé járatos Olvasóink elfogadják azt a tényt, hogy szigorúan matematikai szempontból a játékelméletet a játékok egyszeri játszására dolgozták ki. Ha ezt a tényt elfogadjuk, akkor többé nem okozhat nehézséget annak elismerése, hogy az elmélet alkalmazható az egy játszmából álló játékokra. A játékelméletet ebben a könyvben úgy építettük fel, hogy mondanivalónkat megismételhető eseményekkel kapcsolatos következtetésekre alapoztuk. Eljárásunkat egyszerűsége mellett az teszi helytállóvá, hogy matematikailag is elfogadható, bár nem az egyedüli lehetséges út, ugyanis az elmélet felépítéséhez a gyakorlat fogalma nem feltétlenül szükséges.

A fentiek miatt szükséges, hogy az Olvasó legalább valamennyire bizonnyal a szerző előadásmódjának hitelességében. Figyeljük meg a következő típusú okoskodást: Tekintsünk egy olyan, nem ismételtető játékot, amely borzasztóan fontos számunkra és amelyben ellenfelünk minden értelemben teljesen intelligens. Tegyük fel, hogy számunkra végzetes, ha ellenfelünk tudja, hogy melyik stratégiát fogjuk alkalmazni. Egyetlen reményünk az, hogy véletlen események felhasználásával döntve megfosztjuk ellenfelünket



biztos ismereteitől. Előfordulhat persze, hogy szerencséje van és eltalálja, hogy melyik stratégiával játszunk, de mi is tudjuk, hogy a játék kockázatos. A játékelmélet egyszerűen csak arra ad választ, hogy milyen véletlen események felhasználásával kell döntenünk.

Elfogadhatjuk azt a szemléletet is, hogy a bölcsőtől a sírig sok, egyszer játszható játékot játszunk, amelyek nem mind végzetesek számunkra és kevert stratégiák alkalmazásával a játékhalmazban elért átlageredményünket javíthatjuk.

A játékelmélettel foglalkozó matematikusok két szempontja érdekelhet itt minket. Az egyik az, hogy mivel az elméletet a játékok egyszeri játszására dolgozták ki, nem biztos, hogy ugyanezt az elméletet kell alkalmaznunk akkor is, ha például tizenegy játszmát játszunk. A szerző úgy véli, hogy bár ez a beállítottság tudományos felfogásra vall, gyakorlati szempontból mégis feleslegesen szigorú, hiszen az elméletet alkalmazó szakemberek nem várhatják meg azt, amíg kidolgozzuk a tizenegy játszmából álló játékok elméletét.

Más a helyzet a Természet elleni játékoknál. Itt nem intézhetjük el a kérdést egy vállrándítással, hiszen a játszm sorozat már lejátszott játszmái alapján egyre többet tudunk a Természet stratégiájáról. A játékelmélet itt keveredik a statisztikával, amely a tudományos trükkök gazdag tárházával befolyásolja problémánkat.

## SZIMMETRIKUS JÁTÉKOK

Különleges tulajdonságokkal rendelkeznek a szimmetrikus játékok is. Egy játékot akkor mondunk szimmetrikusnak, ha mátrixának sorai és oszlopai között az alábbi kapcsolat áll fenn: mindegyik sor nyereségértékeinek sorozata megegyezik a megfelelő oszlop nyereségértékeinek sorozatával, de a nyereségek előjele ellentétes. A definíció alapján nyilvánvaló, hogy a főátlóban levő elemek mind nullák. Így például a

|    |   |    |
|----|---|----|
| 0  | 2 | 3  |
| -2 | 0 | -6 |
| -3 | 6 | 0  |

játék szimmetrikus, hiszen sorai és oszlopai rendelkeznek a kívánt tulajdonsággal, például a harmadik sor elemei a  $-3$ ,  $6$ ,  $0$ , a harmadik oszlop elemei a  $3$ ,  $-6$ ,  $0$  számok.



A szimmetrikus játékokkal kapcsolatban hasznos megjegyeznünk a következőket. Először: a szimmetrikus játékok igazságosak, és mivel tudjuk, hogy értékük nulla, nem kell azt kiszámítanunk. Másodszor: a két játékosnak azonos a legjobb kevert stratégiája.

Minden játék átalakítható nagyobb, de szimmetrikus játékká. Az átalakítás azért lehet előnyös, mert szimmetrikus játékokkal egyszerűbb számolni. Az átalakításhoz csak az szükséges, hogy az eredeti játék értéke pozitív legyen, ezt konstans hozzáadásával azonban mindig elérhetjük. Konstans hozzáadása a játszási módot nem változtatja meg, a stratégiák arányának meghatározása után a hozzáadott konstansokat kivonással eltüntethetjük.

A módszert egy példán mutatjuk be. A játék mátrixán kívül szükségünk lesz két, csupa egyesből álló mátrixra is:

|     |   | Piros |   |   |   |
|-----|---|-------|---|---|---|
|     |   | 1     | 2 | 3 |   |
| Kék | 1 | 5     | 1 | 3 | 1 |
|     | 2 | 2     | 4 | 1 | 1 |
|     |   | 1     | 1 | 1 |   |

Nevezzük ezeket a mátrixokat a „játék”, „vízszintes” és „függőleges” szavaknak megfelelően  $J$ ,  $V$ , ill.  $F$  mátrixoknak. Építsük fel a következő szupermátrixot:

|        |      |       |
|--------|------|-------|
| 0      | $J$  | $-F$  |
| $-J^*$ | 0    | $V^*$ |
| $F^*$  | $-V$ | 0     |

A csillag azt jelenti, hogy a sorokat és oszlopokat fel kell cserélni, a negatív előjel pedig azt, hogy minden elem előjelét meg kell változtatni. A 0 csupa nullából álló mátrixot jelöl. A jelek helyére a megfelelő mátrixokat be-



helyettesítve végül is a

|      |   | Piros* |    |    |    |    |    |
|------|---|--------|----|----|----|----|----|
|      |   | 1      | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |
| Kék* | 1 | 0      | 0  | 5  | 1  | 3  | -1 |
|      | 2 | 0      | 0  | 2  | 4  | 1  | -1 |
|      | 3 | -5     | -2 | 0  | 0  | 0  | 1  |
|      | 4 | -1     | -4 | 0  | 0  | 0  | 1  |
|      | 5 | -3     | -1 | 0  | 0  | 0  | 1  |
|      | 6 | 1      | 1  | -1 | -1 | -1 | 0  |

mátrix adódik, ami szimmetrikus játék. A  $6 \times 6$ -os játék mindkét „játékosának” ugyanaz a legjobb stratégiája. (A Kék\* és a Piros\* csillagai különböztetik meg ezeket a fiktív játékosokat az eredeti játék valódi játékosaitól.)

Ennek a játéknak — mely mátrixának utolsó oszlopa a lehetséges tiszta stratégiák egyike — a megoldása az eredetiével a következő kapcsolatban van:

| Az eredeti játék<br>stratégiái     | Kék |   |   | Piros |   |   | A játék<br>értéke |
|------------------------------------|-----|---|---|-------|---|---|-------------------|
|                                    | 1   | 2 | 3 | 4     | 5 | 6 |                   |
| A szimmetrikus<br>játék stratégiái | 1   | 2 | 3 | 4     | 5 | 6 |                   |

Vagyis: az eredeti játék egyes tiszta stratégiáinak gyakoriságát a szimmetrikus játék első két csoportjában levő tiszta stratégiák gyakorisága adja meg, a játék értéke pedig egyenlő az utolsó oszlop gyakoriságának, és az egyik játékos stratégiagyakoriságai összegének hányadosával. Példánkban a szimmetrikus játék megoldása  $3:2:0:2:3:11$ , tehát az eredeti játékban



a következő arányban kell alkalmazni a stratégiákat:

|                 |   | Piros |   |   | Kék<br>aránya |
|-----------------|---|-------|---|---|---------------|
|                 |   | 1     | 2 | 3 |               |
| Kék             | 1 | 5     | 1 | 3 | 3             |
|                 | 2 | 2     | 4 | 1 | 2             |
| Piros<br>aránya |   | 0     | 2 | 3 |               |

## LINEÁRIS PROGRAMOZÁS

A könyvben szereplő példák alapján megállapíthatjuk, hogy a játékelmélet az emberi tevékenység igen változatos fajtáival kapcsolatos. Ily módon nem meglepő, hogy a játékelmélet nem független a tudományos ismeretek különféle területeinek fejlődésétől. A kapcsolat néha fogalmi szintű, néha tisztán formális azokban az esetekben, amelyekben ugyanazokat a matematikai módszereket kell alkalmazni. Az ilyen kapcsolatok mindig hasznosak, mivel a fogalmak és a módszerek kölcsönhatása mindegyik terület fejlődését elősegítheti.

Az egyszerűség kedvéért egy, a lineáris programozással kapcsolatos példán mutatjuk be ennek a kölcsönhatásnak a szerepét. Az Egyesült Államok légierije ezen a területen úttörő munkát végzett: megkísérelték, hogy ésszerűen olyan szkémát tervezzenek, amely most is, a jövőben is minden esetben a leggazdaságosabban alkalmazható. Számítástechnikailag — amint ezt következő példánk is mutatja — az ilyen típusú problémák játékelméleti problémáknak tekinthetők.

### 35. Példa. Diéta

John elhatározta, hogy diétázni fog. Terve szerint ezentúl főleg húst eszik. Az elfogyasztott zsír és sovány hús helyes aránya John szerint 1:3, vagyis 1 uncia\* zsírhoz 3 uncia színhúst szeretne fogyasztani. Mivel a hús drága, táplálkozását a lehető legolcsóbban akarja megoldani. Szeretné eldönteni, hogyan vásárolhat a legolcsóbban zsírt és színhúst, úgy hogy legalább 40 uncia zsírja és legalább 120 uncia színhúsa legyen.

\* 1 font = 16 uncia. (A fordító.)





Dantzig mézárszékén három olyan húsféle van, ami John szempontjából szóba jöhet. Ezek fontonként 1, 5, ill. 10 uncia zsírt tartalmaznak, áruk sorra 1,35, 0,85, ill. 0,65 dollár.\* Adatainkat a következő mátrixokban foglalhatjuk össze (egységeink: uncia, ill. cent):

|       |   | Zsír | Színhús | Ár  |
|-------|---|------|---------|-----|
| Húsok | 1 | 1    | 15      | 135 |
|       | 2 | 5    | 11      | 85  |
|       | 3 | 10   | 6       | 65  |

|                     |    |     |
|---------------------|----|-----|
| Kivánt<br>mennyiség | 40 | 120 |
|---------------------|----|-----|

A rövidség kedvéért jelöljük ezeket a mátrixokat (a „hús”, „ár” és „mennyiség” szavaknak megfelelően)  $H$ ,  $A$  és  $M$  betűkkel.

\* Általában lineáris programozási feladatokban az ismeretlenek súlyozott összegére egyenlőtlenségek vannak megadva, miközben egy más súlyokkal képzett összeget akarunk minimalizálni (vagy maximalizálni). Itt ha  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ -mal jelöljük a háromféle húsmennyiséget, akkor az egyenlőtlenségek a következők:

$$1x_1 + 5x_2 + 10x_3 \geq 40$$

$$15x_1 + 11x_2 + 6x_3 \geq 120.$$

A minimalizálandó kifejezés:  $135x_1 + 85x_2 + 65x_3$ . (A lektor.)



Alkossunk a fenti mátrixokból az alábbiak szerint egy mátrix-óriást:

|     |    |    |
|-----|----|----|
| 0   | H  | —Á |
| A*  | 0  | —M |
| —H* | M* | 0  |

A negatív előjel azt jelenti, hogy a részmátrix minden elemének előjelét meg kell változtatni, a csillag a részmátrix sorainak és oszlopainak cseréjére utal, a 0 pedig csupa nullából álló mátrixot jelöl. A  $H$ ,  $\bar{A}$  és  $M$  mátrixok elemeit a mátrix-óriásba beírva az alábbi mátrixot kapjuk:

|     |   |       |     |     |     |      |      |
|-----|---|-------|-----|-----|-----|------|------|
|     |   | Piros |     |     |     |      |      |
|     |   | 1     | 2   | 3   | 4   | 5    | 6    |
| Kék | 1 | 0     | 0   | 0   | 1   | 15   | —135 |
|     | 2 | 0     | 0   | 0   | 5   | 11   | —85  |
|     | 3 | 0     | 0   | 0   | 10  | 6    | —65  |
|     | 4 | —1    | —5  | —10 | 0   | 0    | 40   |
|     | 5 | —15   | —11 | —6  | 0   | 0    | 120  |
|     | 6 | 135   | 85  | 65  | —40 | —120 | 0    |

Ilyennel már találkoztunk: első pillantásra látjuk, hogy játékhoz jutottunk — már csak azért is, mert minden mátrixot játéknak tekinthetünk. Ez a játék  $6 \times 6$ -os és szerencsénkre szimmetrikus, ami biztosítja egyrészt a játék igazságosságát, másrészt azt, hogy a játékosok legjobb stratégiája azonos. Talán van, aki nem látja előre azt, hogy a megoldás milyen kapcsolatban lesz a diétáról szóló feladattal.

A játékok mind megoldhatók, a lineáris programozással kapcsolatos problémák azonban nem. Ha a lineáris programozási feladat megoldható,



akkor a játék egyik legjobb kevert stratégiájában az utolsó sornak (illetve oszlopnak) aktív szerepe van, azaz gyakorisága nem nulla. Ha ez fennáll, akkor a lineáris programozási feladat megoldását úgy kaphatjuk meg, hogy a tiszta stratégiák első csoportja — itt az 1, 2, 3 stratégiákból álló csoport — minden egyes stratégiájának gyakoriságát elosztjuk az utolsó stratégia — példánkban a 6-os — gyakoriságával.

Ebben a példában a  $0:120:0:0:85:11$  arány a játék helyes játszási módja. Az utolsó gyakoriságérték 11 — ami nem nulla — tehát a lineáris programozási problémának van megoldása.

Így Johnnak sorra  $\frac{1}{11}$ ,  $\frac{120}{11}$ , ill.  $\frac{0}{11}$  fontot kell vásárolnia a három húsfajtából, vagyis a 0,85 dolláros húsból  $10\frac{10}{11}$  fontot, a többiből semmit sem kell vennie. Így kb. 9,27 dollárért 120 uncia színhúshoz és 57 uncia zsírhoz jut. A 40 uncia feletti, felesleges zsírmennyiség szükségszerű pazarlás: több pénzébe került volna, ha pontosan a helyes keveréket veszi. (Figyelem! Semilyen díjat nem ajánlunk fel e speciális diéta-probléma egyszerűbb megoldására.)

## NEM NULLA ÖSSZEGŰ JÁTÉKOK

Csupán arra szorítkozunk, hogy röviden vázoljuk, milyen természetűek ezek a játékok. Ennél többet nem teszünk, mert a matematika számunkra sötétebb területeire kerülnénk, sőt éles szakmai vitákkal volnánk kénytelenek foglalkozni.

A nulla összegű játékokban a nyereségértékek egyszerűen a vagyonok cseréjét jelentik: az egyik játékos nyereménye megegyezik a másik veszteségével. Lényegében ennek az elvnek a megtartása mellett a Természet elleni játékokban (amelyeket imitt-amott példaként helyeztünk el) azzal a feltevéssel számítottuk ki a játészó személy stratégiáját, hogy ellenfele, a Természet is a nyereségmátrix vizsgálata alapján, értelmes módon határozza meg stratégiáját. A játészó személy szempontjából azonban az így kiszámított stratégia nem a legjobb: a konok butaság ellen nagyobb nyereséget is elérhet. Elvben ezt megnyugtató módon kihasználhatja: egyszerűen fel kell fedeznie a Természet stratégiáját (ez minden konkrét esetben lehetséges). A játékos így kamatoztathatja a Természet módszerének gyengeségét.

A nem nulla összegű játékokban van egy, a Természethez hasonló elem. Ezekben a játékokban az egyik játékos nyereménye nem szükségképpen egyezik meg a másik játékos veszteségével. Lehet, hogy mindketten nyernek vagy mindketten veszítenek. Hogy eddigi elemzési módszerünkől valamennyit megtarthassunk, úgy fogjuk fel a játékot, hogy abban a Természet



is játszik, ő nyeli el a játékosok veszteségét, ő fizeti azok nyereségét. Az ilyen játékokat két mátrixszal írhatjuk le. Íme egy példa:

|     |   | Természet ( $P$ ) |   |   |
|-----|---|-------------------|---|---|
|     |   | 1                 | 2 | 3 |
| Kék | 1 | 1                 | 6 | 2 |
|     | 2 | 3                 | 0 | 3 |
|     | 3 | 4                 | 2 | 0 |

|                   |   | Piros |   |   |
|-------------------|---|-------|---|---|
|                   |   | 1     | 2 | 3 |
| Természet ( $K$ ) | 1 | 6     | 0 | 3 |
|                   | 2 | 5     | 4 | 3 |
|                   | 3 | 0     | 1 | 4 |

Így a Természet itt kettős személyiség: másképp viselkedik Kékkel, mint Pirossal szemben. Ha Kék csak az első mátrixot vizsgálja és úgy tekinti, hogy az szokásos, kétszemélyes, nulla összegű játék, akkor a 4:6:1 stratégiát fogja alkalmazni, amivel átlagosan  $2\frac{4}{11}$  egységet nyer. Nyereségét a Természet ( $P$ ) fizeti ki neki. Hasonlóképpen a jobb oldali mátrix alapján Piros arra a következtetésre jut, hogy a 0:1:3 kevert stratégiát kell alkalmaznia és játszománként  $3\frac{1}{4}$  egységet kell fizetnie a Természet ( $K$ ) javára. Ha úgy tetszik, azt mondhatjuk, hogy a Természet ( $K$ ) és a Természet ( $P$ ) közös alapba gyűjtik a nyereségeket és a veszteségeket.

Az egyszemélyes, Természet elleni játékban Kék  $2\frac{4}{11}$ -nél jobb eredményt érhet el, hiszen tanulmányozhatja a Természet viselkedését és így szerzett ismereteit kamatoztathatja. Ebben a játékban más a helyzet: a Természet ( $P$ ) most kecskebőrbe bújt farkas, aki mögött ellenőrként állandóan ott bújkál Piros. Piros és a Természet ( $P$ ) között voltaképpen olyan koalíció van, amelyben Piros az elnök, Természet ( $P$ ) a bankár. Kék és Természet ( $K$ ) között hasonló a kapcsolat. Ha Kék nagyobb nyereségre törekedve eltér a 4:6:1 stratégiától, Piros figyelmessége ellenére is célt érhet.

Sokkal több is igaz: Tegyük fel, hogy Kék az 1:0:0, Piros a 0:1:0 stratégiát választja. Így Kék nyeresége  $2\frac{4}{11}$  helyett 6 egység, Piros vesztesége  $3\frac{1}{4}$  helyett 0 egység lesz. Mindketten sokkal jobban jártak, Kék olyan sokat nyer, amennyit csak lehet és Piros olyan keveset veszít, amennyit csak lehet. Nyilvánvaló tehát, hogy Kék és Piros a Természet ellen számottevő haszonnal alkothat koalíciót; elérhetik, hogy annyit nyerjenek el a Természettől, amennyit csak lehet.

Így mindenképpen komoly nehézségekkel találkozunk. Problémánk ahhoz hasonló, hogy hogyan osztozkodnak meg a tolvajok a zsákmányon. Hogyan osszák el a játékosok egymás közt a hasznát, ha koalíciót alkotva



kedvezőbb nyereséget érnek el, mint ha egymástól függetlenül játszanak? Vagy: mekkora összegű kártérítésben kell megállapodniuk ahhoz, hogy biztosítsák a koalíció eredményességét, tehát azt, hogy a jövedelem nagy legyen és a játékosok ne csapják be egymást? Milyen feltételek mellett érdemes az egyik játékosnak a másikat büntetnie, ha közben saját nyeresége is csökken? A matematikusok nagyon sokat tettek annak érdekében, hogy a minden szempontból tökéletes viselkedésmód józan stratégiáit — a játék stratégiáit és a kártérítési rendszert — megkeressék. Az általános módszer nagymértékben épít a gyakorlati, a valóságos életből és a laboratóriumi kísérletekből kapott adatokra. A téma igen vonzó, könyvünk tárgykörén azonban nyilván túlmutat.

## ÖSSZEFOGLALÁS

Most már abban a helyzetben vagyunk, hogy elfogadható módon meg tudjuk határozni, mit nevezünk játékelméletnek. Az első részben csak a gravitáció elméletének meghatározására voltunk képesek. Sok szakki-fejezést megismertünk, megbarátkoztunk az elmélet módszereivel és a problémák megfogalmazásának módjaival. Ezek segítségével képesek leszünk arra, hogy különösebb nehézség nélkül leírjuk, mivel foglalkozik a játékelmélet.

Az elmélet tárgyának itt következő leírása csak a könyvben tárgyalt anyag-részeket öleli fel. A könyvben szereplő egyes fogalmak általánosíthatók, így végtelen játékokról, nem nulla összegű játékokról,  $n$  személyes játékokról is lehetne beszélni.

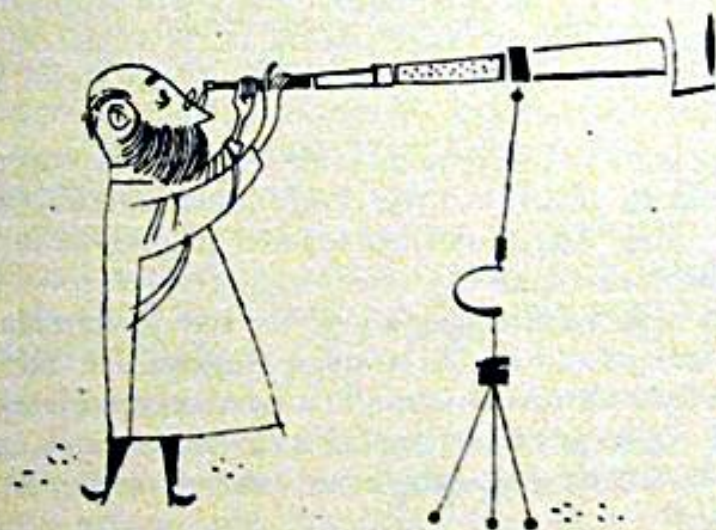
A játékelmélet a különféle konfliktusok elemzésének a következő absztrakción alapuló modellje: Konfliktusnak az olyan helyzeteket nevezzük, amelyekben két, ellentétes érdekeltségű csoport áll egymással szemben. Az ellentétes érdekeltségű csoportokat játékosoknak nevezzük, a helyzetet a két játékos között játéknak tekintjük. Mindkét játékos a játék mindegyik játszmájában véges sok stratégia alkalmazása között választhat. A játékosok vagyonának összege a játék elején és végén ugyanannyi. Mindkét fél olyan óvatos terv alapján szándékszik stratégiáit megválasztani, amely biztosítja, hogy átlagos haszna a lehető legnagyobb legyen. Ezt az átlagos legnagyobb hasznót, amit a játék értékének nevezünk, ki lehet számítani. Megfelelő játékkal mindegyik játékos biztosíthatja magának, hogy elérje a játék értékét: ehhez stratégiáit megfelelően kell megválasztania. A megfelelő stratégia kiválasztására különféle módszereink vannak. A fentieknek különböző következményei vannak: a játékos eltitkolhatja ellenfele elől, hogy az egyes játszmákban milyen stratégiát választ; a játékosnak sosem kell az éppen játszott játszmára vonatkozó választásánál többet eltitkolnia stb.



A matematikát sokmindennek szokták nevezni. Többek között a tudományok királynőjének és a tudományok szolgálólányának. Látható, hogy bár társadalmi helyzete nem egészen egyértelmű, nemével kapcsolatban a megállapítás általánosnak tekinthető. Voltaképpen minden tudomány meglehetősen nőiesen viselkedik azzal szemben, aki foglalkozni kezd vele: a célt mindenki reménytelenül vonzónak találja és a tudományok története nyilvánvalóan mutatja, hogy az, akinek udvarolnak, változékony és szélsőséges, röviden finom kis nőszemély.

Sőt, rendszerint meglepő módon válaszol az igyekezetre, a tanácsadásra. Szabadon mozog, de gyakran váratlan irányban. Emberek sora töltötte életét teljesen eredménytelenül azzal, hogy megpróbálja egy bizonyos irányban elmozdítani őt. Munkájukat tévedéseknek elkönyvelni azonban szűklátókörűség volna. Mivel a tudomány gyakran nemvárt irányban mozog, ezek a tévedések sokszor a tudományok más területein váratlan eredményekhez vezettek.

Sok példát — közülük több ismertet — tudnánk erre felhozni. Mi egy példát mutatunk be, azt is csak olyan röviden, hogy éppencsak lássuk, hogyan történik mindez. A napfoltok — a Nap felületén észlelhető nagy tűztornádók — periodikusan jelentkeznek. A kibocsátott részecske- és energiaáradat különféle hatásokat gyakorol a Földre, így például befolyásolja a nagy távolságból történő rádióvételeket. Azt sejtették, hogy a napfolttevékenység a Föld időjárását is befolyásolja, bár a befolyásolás módját nem ismerték.



Egy csillagásznak — A. E. Douglassnak — eszébe jutott, hogy a fák évi növekedésének, amely az évgűrűkben tükröződik, kapcsolatban kell lennie az egyes években lehullott csapadékmennyiséggel; és ha az időjárás valóban függ a napfolttevékenységtől, akkor ennek a kapcsolatnak az évgűrűk egymásutánjában kifejeződésre kell jutnia.



Douglass körülbelül negyven évig foglalkozott komolyan a problémával. A fő hatást világosan, nyilvánvalóan mutatták a vizsgálatok, de a részletek olyan összetettek és vitathatóak voltak, hogy az egész elemzést ködössé tették. Mégis, ez a tudós a fák olyan pontos és biztos alapokon nyugvó kronológiáját határozta meg, amelynek segítségével kétezer évre vagy még régebbre visszamenőleg meg lehet állapítani a fák korát. Ennek és az eredeti problémának a kapcsolata már csak esetleges. A fagyűrű-naptár segítségével a régészek nagyon pontosan — néha egy év pontossággal — meg tudják határozni a korai civilizációk bukásának idejét. Elég a vizsgálatához egy épületből fennmaradt fadarab vagy a tábortűzből egy darab faszén.

A játékelmélettel — a matematikusok — először bizonyos közgazdasági problémákra gondolva kezdtek foglalkozni. A közgazdászok kezdeti válasza elutasító volt, a hadviseléssel foglalkozó tudósok azonban gyorsan felismerték a tárgyban rejlő lehetőségeket és elősegítették az elmélet fejlődését. Most viszont már a közgazdászok is érdeklődnek az elmélet iránt és úgy látszik, hogy a játékelmélet más kvantitatív módszerekkel együtt gyors változásokat fog létrehozni a közgazdasági elméletben és gyakorlatban. Az említett más módszerek közül a lineáris programozás a legfontosabb. Ez a tudományág olyan gyorsan vált az ipari tervezés fontos eszközévé, hogy egyes vállalatok már el sem tudják képzelni, hogyan lehettek meg nélküle és számítógépeikkel kapcsolatos költségvetésük nagy részét ennek szentelik. A játékelmélet fogalmai forradalmat jelentettek a statisztikában: egységessé váltak bizonyos, a statisztikán belüli, látszólag különböző fogalmak. Ezután a társadalomtudományokra gyakorolt erős hatást az elmélet: az emberek közötti kapcsolatok közül világított meg bizonyosságokat. Nehéz volna megjósolni, hogy melyik területre hatol be legközelebb a játékelmélet.

Bár a jelenlegi korlátok ellenére az elméletet sok területen alkalmazzák, legnagyobb jelentősége talán abban áll, hogy általános irányítást ad azoknak az embereknek, akik bonyolult problémák megoldásával foglalkoznak. Bár ezeknek a problémáknak egy része szigorúan véve nem oldható meg — most biztosan nem, valószínűleg a jövőben sem — keretet ad az azokkal kapcsolatos vizsgálódásoknak. A stratégia fogalma, a játékosok közötti ellentétek, a véletlen események szerepe, a nyereségek felírása mátrix alakban stb., értékes segítséget jelent azoknak az embereknek, akik bonyolult konfliktusok megoldásával kapcsolatban szeretnének eredményeket elérni.



*Általános játékmegoldási módszer*

A könyvben leírt módszerek — eltekintve az V. rész elején tárgyalt közelítő módszertől — közös gyengesége az, hogy alkalmazhatóságuk a megoldás természetétől függ. Például, van olyan módszerünk, amivel nyeregpont-megoldást tudunk keresni, ha van egyáltalán nyeregpont. Van egy másik módszer, amelyikkel az összes stratégia alkalmazásán alapuló megoldást kereshetjük meg, feltéve, hogy valóban az összes tiszta stratégiát használni kell. Így módszereink mind feltételesek, csak bizonyos esetekben alkalmazhatók. A módszerek és a részjátékok néha rendkívül hosszúra nyúló sorozatán végigfutva biztosan találhatunk megoldást, de amíg megtaláljuk, sok sejtésünk bizonyulhat tévesnek. Világos, hogy kedvezőbb lenne, ha általános játékmegoldási módszerrel rendelkeznénk.

Ebben a részben a tengely-módszerrel foglalkozunk. Ez a játékoknak olyan általános megoldási módszere, amelynek segítségével a játékok összes megoldását megkereshetjük és amely gyakorlati szempontból nézve is jól alkalmazható, vagyis rendszerint viszonylag kis számú lépésben megadja az egzakt megoldást. A módszer sokkal bonyolultabb, mint az eddig vizsgált módszerek, de reméljük, sikerül úgy leírnunk, hogy a gondos Olvasó követni tudja mondanivalónkat.

A játékok megoldásának keresése ahhoz a problémához hasonlítható, hogy hogyan keresheti meg egy mókus a fa legmagasabb pontját. Ha kis lépésekben emelkedik felfelé és minden ágat gondosan megvizsgál, akkor egész biztosan megtalálja a legmagasabb csúcsot. Ha a fa koronája lapos, akkor módszerével mindegyik legmagasabb pontot megkeresheti — ez az olyan játékoknak felel meg, amelyekben egynél több alapmegoldás van. A terv elvben egyszerű, de végrehajtásához nyilvánvalóan sok aprólékos munka szükséges. Másrészt a mókus olyan tervet is készíthet, hogy ugrásokkal jut el a csúcra, ami bonyolultabb ugyan, de részleteiben kevesebb aprómunkát igényel. Lapos koronájú fa esetén azzal toldhatja meg tervét, hogy ha egy-



szer elért az egyik csúcsra, akkor a továbbiakban csúcsról-csúcsra, ugrál. Az általános tervezés szempontjából ez további bonyodalmat jelent, de kevesebb fáradságot igényel, mint a fa többszöri megmászsása. Sőt, mivel lehet, hogy a mókus a korábbi mászások során fontos ágakat hagyott ki és így nem tudja, honnan kezdje a fa újbóli megmászását, kevésbé valószínű, hogy hibát követünk el.

Az általános játékmegoldási módszer aritmetikailag annyira bonyolult, hogy inkább a bölcsekedő mókust követjük: ugrálással megkeresünk egy megoldást és ha szükségünk van a többire is, akkor megoldásról megoldásra ugrálva állítjuk elő az összes megoldást. Így bár fejünket megerőltetjük, túlsófelünket megkíméljük.

## ELSŐ PÉLDA

Tekintsük azt a játékot, amit a 115. oldalon már megoldottunk (mivel ismerős dolgokról van szó, bátran el merjük hagyni a belsejéből a sötétítést):

|     |   | Piros |    |   |
|-----|---|-------|----|---|
|     |   | 1     | 2  | 3 |
| Kék | 1 | 6     | 0  | 3 |
|     | 2 | 8     | -2 | 3 |
|     | 3 | 4     | 6  | 5 |

A játék megoldásakor azt kaptuk, hogy a játék értéke  $4\frac{2}{3}$ , és Kéknek a 0:1:5, Pirosnak a 2:1:0 arányú kevert stratégiát kell alkalmaznia.

**1. lépés.** Az új eljárás első lépése az, hogy az eredeti játék mátrixából eltüntetjük a negatív számokat. Ha a mátrixban van negatív szám, akkor a mátrix minden eleméhez hozzá kell adnunk egy pozitív számot. Mindegy, mekkora pozitív számot adunk a mátrix elemeihez, csupán az a fontos, hogy elég nagy legyen a szám ahhoz, hogy valóban minden negatív szám eltűnjön. Példánkban elég  $+2$ -t hozzáadni a mátrix elemeihez. Ekkor a következő



mátrixot kapjuk:

|     |   | Piros |   |   |
|-----|---|-------|---|---|
|     |   | 1     | 2 | 3 |
| Kék | 1 | 8     | 2 | 5 |
|     | 2 | 10    | 0 | 5 |
|     | 3 | 6     | 8 | 7 |

Emlékeztetjük az Olvasókat arra, hogy konstans hozzáadása nem változtatja meg a stratégiákat, de a játék értékét befolyásolja: a most vizsgált játék értékét az eredetiből a következőképpen kaphatjuk meg:  $4\frac{2}{3} + 2 = 6\frac{2}{3}$ . Nem szabad megfeledkeznünk arról, hogy munkánk végeztével a most vizsgált játék értékéből 2-t ki kell vonnunk ahhoz, hogy megkapjuk az eredeti játék értékét.

2. lépés. A második lépésben 1-esekkel, -1-esekkel és 0-val szegélyezzük az előbb kapott mátrixot és bevezetünk egy segédszámot, amit  $D$ -vel jelölünk (és értékét kezdetben 1-nek vesszük). Mindezt az alább látható módon kell megtennünk:

### Első szkéma

Ezt általánosságban szkémának nevezzük, eljárásunk során ez lesz az Első Szkéma. A csillag jelentését mindjárt megmagyarázzuk.

|     |   | Piros |    |    |   |
|-----|---|-------|----|----|---|
|     |   | 1     | 2  | 3  |   |
| Kék | 1 | 8     | 2  | 5  | 1 |
|     | 2 | 10    | 0  | 5  | 1 |
|     | 3 | 6     | 8  | 7* | 1 |
|     |   | -1    | -1 | -1 | 0 |

$D = 1$







Az Első Szkémában mindegyik  $\sigma$  negatív, tehát az összes, nullától különböző  $t$ -nek meg kell határoznunk a tengelymutató értékét. Mivel az  $\sigma$ -k mind 1-gyel, az  $s$ -ek mind 1-gyel egyenlők, a tengelymutató egyszerűbb alakban írható:

$$-\frac{1 \cdot (-1)}{t} = \frac{1}{t}.$$

Igy számolás nélkül, első pillantásra meghatározhatjuk a legkisebb értékeket. Példánkban a következő mátrixot kell vizsgálnunk:

|                                  |                                 |                                   |  |
|----------------------------------|---------------------------------|-----------------------------------|--|
| $\frac{1}{8}$                    | $\frac{1}{2}$                   | $\frac{1}{5}$                     |  |
| <u><math>\frac{1}{10}</math></u> |                                 | $\frac{1}{5}$                     |  |
| $\frac{1}{6}$                    | <u><math>\frac{1}{8}</math></u> | <u><math>\frac{1}{7}</math></u> * |  |
|                                  |                                 |                                   |  |

Az egyes oszlopokban sorra  $\frac{1}{10}$ ,  $\frac{1}{8}$ , és  $\frac{1}{7}$  a legkisebb érték. Ezek közül az  $\frac{1}{7}$  a legnagyobb, így a mátrix harmadik sorának és harmadik oszlopának metszéspontjában van a tengelyelem és  $T = 7$ .

4. lépés. A következő szkéma számait az alábbiak szerint kell meghatározni:

4.1. lépés. A tengelyelem helyére kerülő új szám az előző szkéma  $D$  értéke.

4.2. lépés. Az a sor, amelyben előbb a tengelyelem volt, a tengelyelem értékének kivételével változatlan marad.

4.3. lépés. Annak az oszlopnak számai, amelyben előbb a tengelyelem volt, a tengelyelem értékének kivételével változatlanok maradnak, előjelük azonban ellenkezőjére változik.

4.4. lépés. A tengelyelem sorától és a tengelyelem oszlopától különböző helyen álló számoknak — jelöljük ezeket  $N$ -nel — megfelelő számok az

$$\frac{N \cdot T - S \cdot O}{D}$$

formula alapján határozhatók meg, ahol  $S$  és  $O$  a  $T$ -vel és  $N$ -nel közös



sorban és oszlopban levő elemek, az alábbiak szerinti elrendezésben:

|           |     |
|-----------|-----|
| $T$ ..... | $S$ |
| $O$ ..... | $N$ |

és  $D$  az előző skémából való.

4. 5. lépés.  $D$  következő értéke az előző skéma  $T$  értéke.

A fenti öt lépés egymásutáni elvégzésével határozzuk meg példánk következő skémáját.

A 4.1. lépés szerint:

|       |  |  |   |       |
|-------|--|--|---|-------|
|       |  |  |   | Piros |
|       |  |  |   | 1 2 3 |
| 1     |  |  |   |       |
| Kék 2 |  |  |   |       |
| 3     |  |  | 1 |       |

A 4.2. lépés szerint:

|       |   |   |   |       |
|-------|---|---|---|-------|
|       |   |   |   | Piros |
|       |   |   |   | 1 2 3 |
| 1     |   |   |   |       |
| Kék 2 |   |   |   |       |
| 3     | 6 | 8 | 1 | 1     |



A 4.3. lépés szerint:

|     |   | Piros |   |    |   |
|-----|---|-------|---|----|---|
|     |   | 1     | 2 | 3  |   |
| Kék | 1 |       |   | -5 |   |
|     | 2 |       |   | -5 |   |
|     | 3 | 6     | 8 | 1  | 1 |
|     |   |       |   | 1  |   |

Végül a 4.4. és a 4.5. lépés alapján a következőt kapjuk:

|     |   | Piros |     |    |   |
|-----|---|-------|-----|----|---|
|     |   | 1     | 2   | 3  |   |
| Kék | 1 | 26    | -26 | -5 | 2 |
|     | 2 | 40    | -40 | -5 | 2 |
|     | 3 | 6     | 8   | 1  | 1 |
|     |   | -1    | 1   | 1  | 1 |

$$D = 7$$

Két esetre részletesen bemutatjuk, hogyan kell a 4.4. lépés formuláját alkalmazni. Az első sor második elemét, a -26-ot a következőképpen kell kiszámítani: a

|  |   |    |  |
|--|---|----|--|
|  | 2 | 5  |  |
|  | 8 | 7* |  |
|  |   |    |  |

$$D = 1$$



számokat formulába behelyettesítve  $-26$ -ot kapunk:

$$\frac{N \cdot T - S \cdot O}{D} = \frac{2 \cdot 7 - 8 \cdot 5}{1} = -26.$$

A negyedik sor első helyén álló  $-1$  a következőképpen adódik:

|    |    |  |
|----|----|--|
|    |    |  |
| 6  | 7* |  |
| -1 | -1 |  |

és ennek alapján

$$\frac{(-1) \cdot 7 - 6 \cdot (-1)}{1} = -1.$$

**5. lépés.** Az Első Szkéma bal- és felső szélé mentén levő számok Kék és Piros stratégiáinak nevei. A tengely-módszer utolsó lépése mindig a következő:

**5.1. lépés.** Cseréljük fel Kék azon stratégiájának sorszámát, amely a tengelyelem sorának bal oldalán áll — ha van ilyen — azzal a névvel, ami a tengelyelem oszlopa alatt áll — ha van ilyen.

**5.2. lépés.** Hasonlóképpen, cseréljük fel Piros azon stratégiájának sorszámát, amely a tengelyelem oszlopa felett áll — ha van ilyen — azzal a sorszámmal, ami a tengelyelem sorának jobb szélé mellett áll — ha van ilyen.

A „ha van ilyen” szavak misztikusnak tűnhetnek azok számára, akik most találkoznak először ilyen szkémákkal, hiszen az Első Szkémában a stratégiák sorszáma egészen biztosan a tengelyelem sorának bal oldala mellett, ill. a tengelyelem oszlopa felett található, sehol máshol. A későbbi szkémákban azonban már nem így lesz. Például, ha olyan szkémánk van, amelyben a tengelyelem a  $T = 25$  szám és a szkéma (többek között) az alábbi tu-



tulajdonságokkal rendelkeznek,

|     |   |       |  |  |
|-----|---|-------|--|--|
|     |   | Piros |  |  |
|     |   | 4     |  |  |
| Kék | 3 | 25    |  |  |
|     |   |       |  |  |
|     |   | 2     |  |  |

$D = 6$

akkor már van szerepük a „ha van ilyen” szavaknak és a következő szkéma (egyebek között) az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

|     |   |       |  |  |
|-----|---|-------|--|--|
|     |   | Piros |  |  |
|     |   | 6     |  |  |
| Kék | 2 |       |  |  |
|     | 3 |       |  |  |

$D = 25$

Példánkban a következő szkéma meghatározása az alábbi eredményhez vezet:

Második szkéma

|     |   |       |     |    |   |
|-----|---|-------|-----|----|---|
|     |   | Piros |     |    |   |
|     |   | 1     | 2   |    |   |
| Kék | 1 | 26    | -26 | -5 | 2 |
|     | 2 | 40    | -40 | -5 | 2 |
|     |   | 6     | 8   | 1  | 1 |
|     |   | -1    | 1   | 1  | 1 |

$D = 7$

3



6. lépés. Vizsgáljuk meg, hogy van-e az új szkéma szegélyező sorában vagy oszlopában negatív szám.

6.1. lépés. Ha a szegély tartalmaz egy vagy több negatív számot, akkor legalább még egy szkémát ki kell számítanunk. Menjünk vissza a 3. lépéshez és csináljuk végig újra a 3., 4., 5. és 6. lépéseket.

6.2. lépés. Ha a szegély nem tartalmaz negatív számot, akkor ez a végső szkéma. Jelentése a következő:

*A szkéma alatt álló számok Kék aktív stratégiáinak nevei.*

*A Kék aktív stratégiáinak megfelelő gyakoriságértékek a stratégiák neve felett, a szegélyben található számok.*

*A szkéma jobb oldala mellett álló számok Piros aktív stratégiáinak nevei.*

*A Piros aktív stratégiáinak megfelelő gyakoriságértékek a stratégiák neve mellett, a szegélyben található számok.*

*A játék értékét úgy kaphatjuk meg, hogy a D segédszámot elosztjuk a szegély jobb alsó sarkában álló számmal.*

Példánkhoz visszatérve azt látjuk, hogy a Második Szkéma szegélye tartalmaz negatív számot, így vissza kell mennünk a 3. lépéshez és újabb tengelyelemet kell keresnünk. Ez lesz a második tengelyelem. Azt a három számot, amelyik tengelyelem lehet és azokat a szegélyszámokat, amelyek a tengelymutatók kiszámításához szükségesek, az alábbi táblázat adja meg:

|    |   |
|----|---|
| 26 | 2 |
| 40 | 2 |
| 6  | 1 |
| -1 |   |

| Piros |    |    |    |
|-------|----|----|----|
| 1     | 2  | 3  | 4  |
| 1     | 7  | -3 | -2 |
| -1    | -2 | -1 | 4  |
| -5    | 2  | 2  | 1  |

A tengelymutatók értékei a következők:

|        |  |
|--------|--|
| 0,077  |  |
| 0,050* |  |
| 0,167  |  |
|        |  |



Látjuk, hogy a 40-nek megfelelő helyen áll a legkisebb érték. Ezért  $T = 40$ . Ezt a Második Szkémában csillaggal jelöltük meg.

A 4. és 5. lépés szabályait alkalmazva a Harmadik Szkémát a következőképpen építhetjük fel:

**Piros**

|       |   |   |   |
|-------|---|---|---|
|       | 1 | 2 |   |
| 1     |   |   |   |
| Kék 2 | 7 |   |   |
|       |   |   | 3 |
|       |   |   |   |
|       |   |   | 3 |

**Piros**

|       |   |     |    |
|-------|---|-----|----|
|       | 1 | 2   |    |
| 1     |   |     |    |
| Kék 2 | 7 | -40 | -5 |
|       |   |     | 2  |
|       |   |     |    |
|       |   |     | 3  |

**Piros**

|       |     |     |    |
|-------|-----|-----|----|
|       | 1   | 2   |    |
| 1     | -26 |     |    |
| Kék 2 | 7   | -40 | -5 |
|       | -6  |     |    |
|       |     |     | 3  |
|       | 1   |     |    |
|       |     |     | 3  |

**Piros**

|       |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|
|       | 1   | 2   |     |
| 1     | -26 | 0   | -10 |
| Kék 2 | 7   | -40 | -5  |
|       | -6  | 80  | 10  |
|       |     |     | 4   |
|       | 1   | 0   | 5   |
|       |     |     | 6   |
|       |     |     | 3   |



### Harmadik szkéma

Piros

2

|     |   |     |     |     |   |   |          |
|-----|---|-----|-----|-----|---|---|----------|
| Kék | 1 | -26 | 0   | -10 | 4 | 1 |          |
|     |   | 7   | -40 | -5  | 2 |   |          |
|     |   | -6  | 80  | 10  | 4 |   | 3        |
|     |   | 1   | 0   | 5   | 6 |   | $D = 40$ |
|     |   | 2   |     | 3   |   |   |          |

Mivel most már az utolsó sorban nincs negatív szám, a 6.2. lépés utasításai alapján kell értelmeznünk ezt a szkémát. Kék egyik legjobb stratégiája a Kék 2 és Kék 3 stratégiák 1:5 arányú keveréke. Pirosnak a Piros 1 és Piros 3 stratégiákat kell alkalmazni, 2:4 vagyis 1:2 arányban. Ezt röviden úgy mondjuk, hogy Kéknek 0:1:5, Pirosnak 1:0:2 arányban kell stratégiáit kevernie. A játék értéke  $\frac{40}{6} = 6\frac{2}{3}$  — éppen annyi, amennyit vártunk: az eredeti játék értékénél, a  $4\frac{2}{3}$ -nál 2-vel nagyobb.

A fentiekben megadott játékmegoldási szabályok a szerző által ismert leg-hatásosabb megoldási módszert alkotják, bár nincs garancia arra, hogy a módszer a legkevesebb számú tengelyelemhez vezet. Példánkban a módszer hatásosnak bizonyult: a két stratégián alapuló megoldást két tengelyelem felhasználásával kaptuk. Sajnos, nem lesz mindig ilyen szerencsénk.

## ALAPMEGOLDÁSOK

A korábbiakban már foglalkoztunk alapmegoldásokkal, de nem volt hatásos módszerünk megkeresésükre. Most már tudunk ilyen módszert adni.

*Az, hogy egy játéknak egynél több alapmegoldása van, abban tükröződik, hogy a végső szkéma szegélyszámai között egy vagy több nulla van. Úgy találhatunk másik alapmegoldást, hogy abban a sorban vagy oszlopban választunk új tengelyelemet, amelynek szegélyszáma nulla.*



*Az összes alapmegoldást úgy találhatjuk meg, hogy a nulla szegélyszámú sorokból és (vagy) oszlopokból álló sorozatok mindegyikének alapján választunk új tengelyelemeket, de az eljárás során egy tengelyelemet sem alkalmazunk többször.*

Így, ha például két oszlop szegélyszáma nulla — jelöljük ezeket az oszlopokat  $A$ -val, ill.  $B$ -vel — akkor az  $A, B, A, B, \dots$  sorozat alapján választunk tengelyelemeket. Mindegyik tengelyművelet során új alapmegoldást kapunk. A  $B, A, B, A, \dots$  sorozatot is kipróbáljuk. Ha egy sorban vagy oszlopban két, egyforma értékű tengelyelem van, akkor először az egyiken, aztán a másikon alapuló sorozatot kell megvizsgálnunk. Ha a szegélyszámok között sok nulla van, akkor a lehetséges sorozatok kimerítő vizsgálata nem könnyű feladat.

*Ha olyan alapmegoldást találunk, amelyik már szerepelt vagy ha már nincs alkalmas tengelyelem, akkor a sorozat végétért.*

*A régi alapmegoldásokat számolás nélkül arról ismerhetjük fel, hogy a szegély mellett Kék és Piros stratégia sorszámainak olyan halmaza áll, ami már egyszer előfordult.*

A szegély mellett stratégiasorszámok helyzete és elrendezése nem lényeges; akkor kapunk régi megoldást, ha a sorszámok azonosak.

**7. lépés.** A tengelyelem-választási szabályok a következők:

**7.1. lépés.** A 0 szegélyszámú oszlopokból azt a  $t$  pozitív elemet választjuk  $T$  tengelyelemnek, amelyre az  $\frac{s}{t}$  hányados a legkisebb.

**7.2. lépés.** A 0 szegélyszámú sorokból azt a  $t$  negatív elemet választjuk  $T$  tengelyelemnek, amelyre az  $\frac{o}{t}$  hányados a legnagyobb (vagyis a legközelebb áll a nullához).

**8. lépés.** Menjünk vissza az 5. lépéshez. Végezzük el a tengelyművelet által megkívánt stratégiasorszám-átviteleket. Hasonlítsuk össze Kék és Piros stratégianeveinek szegélyhalmazát az első (ill. az eddigi összes) alapmegoldás során talált halmazzal.

**8.1. lépés.** Ha Kék és Piros stratégianeveinek most kapott szegélyhalmaza újdonság, akkor a 4. lépés következik: ki kell számítanunk az új szkémát. Ha a  $T$  tengelyelem negatív, akkor a szabályokat a következőképpen kell módosítani: a régi  $D$  értéket alakítsuk át negatívra és változtassuk meg azoknak az elemeknek az előjelét, amelyekről a 4.2. és a 4.3. lépésben van szó.

**8.2. lépés.** Ha Kék és Piros stratégianeveinek most kapott szegélyhalmaza nem újdonság, akkor az alapmegoldások most vizsgált sorozata végéhez ért.

Próbáljuk ki mindezt példánkon. A 252. oldalon megfogalmazott játék egy alapmegoldását a 115. oldalon találtuk meg. Ezt az alapmegoldást a következő szkémával jellemeztük:



Szkéma: 1. megoldás

|     |   |       |     |     |   |
|-----|---|-------|-----|-----|---|
|     |   | Piros |     |     |   |
|     |   | 2     |     |     |   |
| Kék | 1 | -26   | 0   | -10 | 4 |
|     |   | 7     | -40 | -5  | 2 |
|     |   | -6    | 80  | 10  | 4 |
|     |   | 1     | 0   | 5   | 6 |
|     |   | 2     | 3   |     |   |

$D = 40$

Ennek szegélyszámai között a második oszlopban nullát találunk, tehát biztos, hogy a játéknak legalább még egy alapmegoldása van. Az oszlopban csak egy  $T$  pozitív számot találtunk. A 7. lépés szerint ez a tengelyelem, tehát  $T = 80$ . A 8. lépés utasításai alapján a stratégiáneveket átvive a következőhöz jutunk:

|     |   |                                                                                                                                                                                                                |   |   |
|-----|---|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
|     |   | 3                                                                                                                                                                                                              |   |   |
| Kék | 1 | <div style="border: 1px solid black; width: 100px; height: 100px; position: relative;"> <div style="position: absolute; top: 50%; left: 50%; transform: translate(-50%, -50%); font-size: 2em;">*</div> </div> |   | 1 |
|     |   |                                                                                                                                                                                                                |   | 2 |
|     |   | 2                                                                                                                                                                                                              | 3 |   |

A személyneveknek ez a halmaza új (Piros egyik stratégiáneve megváltozott), tehát jó úton haladunk az új alapmegoldás felé. A 8. lépés utasítása szerint az új szkéma hátralévő részét a 4. lépés alapján kell meghatároznunk. Eredményünk:



Szkéma: 2. megoldás

|     |   | Piros |    |     |          |
|-----|---|-------|----|-----|----------|
|     |   | 3     |    |     |          |
| Kék | 1 | -52   | 0  | -20 | 8        |
|     | 2 | 8     | 40 | 0   | 8        |
|     | 3 | -6    | 40 | 10  | 4        |
|     | 4 | 2     | 0  | 10  | 12       |
|     |   | 2     | 3  |     | $D = 80$ |

A 2. megoldás szerint Kéknek 2 és 10, vagyis 1 és 5 gyakorisággal a Kék 2 és Kék 3 stratégiákat, Pirosnak 8 és 4, vagyis 2 és 1 gyakorisággal a Piros 1 és Piros 2 stratégiákat kell alkalmaznia. A 2. megoldást röviden így írhatjuk: Kék 0:1:5, Piros 2:1:0. Az 1. megoldás a Kék 0:1:5, Piros 1:0:2 volt.

Így megállapíthatjuk, hogy Kéknek egy, Pirosnak két alapmegoldása van. Ebből következik, hogy Pirosnak végtelen sok legjobb stratégiája van, hiszen tudjuk, hogy az alapmegoldásokat bármilyen arányban keverhetjük.

## MÁSODIK PÉLDA

Még egy, az előzőnél nehezebb példán mutatjuk be az általános megoldási módszert. A 215. oldalon levő feladat összes alapmegoldását fogjuk a tengely-módszer alkalmazásával megkeresni.

|     |   | Piros |    |     |    |
|-----|---|-------|----|-----|----|
|     |   | 1     | 2  | 3   | 4  |
| Kék | 1 | 16    | -8 | 9   | -3 |
|     | 2 | -20   | 4  | 9   | -3 |
|     | 3 | 25    | 1  | 18  | -6 |
|     | 4 | -11   | 13 | -18 | 6  |



Hogy a negatív számokat eltüntessük, a mátrix minden eleméhez 20-at hozzáadunk. Lássuk el a mátrixot 1-esekből, -1-esekből és 0-ból álló szegéllyel és a  $D = 1$  segéd számmal. Így adódik az első szkéma:

1. szkéma

|     |   | Piros |    |    |     |   |
|-----|---|-------|----|----|-----|---|
|     |   | 1     | 2  | 3  | 4   |   |
| Kék | 1 | 36    | 12 | 29 | 17  | 1 |
|     | 2 | 0     | 24 | 29 | 17  | 1 |
|     | 3 | 45    | 21 | 38 | 14  | 1 |
|     | 4 | 9     | 33 | 2  | 26* | 1 |
|     |   | -1    | -1 | -1 | -1  | 0 |

$D = 1$

Mivel a játékmátrix számai a 0 kivételével mind pozitívak és az alsó szegélyszámok mind negatívak, a 0 kivételével mindegyikükre ki kell számítaniuk a

$$\frac{s \cdot o}{t}$$

tengely-mutató értékét. Mivel az  $s$ -ek és az  $o$ -k mind 1-gyel, ill. -1-gyel egyenlők, ez egyszerűen az

$$\frac{1}{t}$$

értékek meghatározását jelenti.

|                |                |                |                  |
|----------------|----------------|----------------|------------------|
| $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{29}$ | $\frac{1}{17}$   |
|                | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{29}$ | $\frac{1}{17}$   |
| $\frac{1}{45}$ | $\frac{1}{21}$ | $\frac{1}{38}$ | $\frac{1}{14}$   |
| $\frac{1}{9}$  | $\frac{1}{33}$ | $\frac{1}{2}$  | $\frac{1}{26}^*$ |

Mindegyik oszlopban megjelöltük a legkisebb kritériumértéket. Ezek kö-



zül az aláhúzott értékek közül az  $\frac{1}{26}$  a legnagyobb és így ez a tengelyelem:  
 $T = 26$ .

A 2. Szkémához a 4. lépés alapján a következőképpen juthatunk:

|   |    |   |   |     |   |
|---|----|---|---|-----|---|
|   |    |   |   | -17 |   |
|   |    |   |   | -17 |   |
|   |    |   |   | -14 |   |
| 9 | 33 | 2 | 1 | 1   | 1 |
|   |    |   |   | 1   |   |

A tengelyelem helyére itt  $D$  értéke kerül, a tengelyelem oszlopának számai előjelet váltanak, a tengelyelem sorának számai változatlanok maradnak. A többi számot az

$$\frac{N \cdot T - S \cdot O}{D}$$

formula segítségével határozhatjuk meg. Például, az első sor második oszlopában ez a szám

$$\frac{12 \cdot 26 - 33 \cdot 17}{1} = -249$$

Ily módon a teljes szkéma:

2. szkema

Piros

1 2 3

|     |   |      |      |      |     |    |          |
|-----|---|------|------|------|-----|----|----------|
| Kék | 1 | 783  | -249 | 720* | -17 | 9  |          |
|     | 2 | -153 | 63   | 720  | -17 | 9  |          |
|     | 3 | 1044 | 84   | 960  | -14 | 12 |          |
|     |   | 9    | 33   | 2    | 1   | 1  | 4        |
|     |   | -17  | 7    | -24  | 1   | 1  | $D = 26$ |

4



A 2. Szkéma lehetséges tengelyelemei azoknak az oszlopoknak a pozitív számai, amelyeknek szegélyszáma negatív. Ezek a következők:

|      |     |    |
|------|-----|----|
| 783  | 720 | 9  |
|      | 720 | 9  |
| 1044 | 960 | 12 |
| 9    | 2   | 1  |
| -17  | -24 |    |

A szóba jöhető elemeken kívül feltüntettük azokat a szegélyszámokat is, amelyek a

$$-\frac{s \cdot o}{t}$$

tengely mutató értékek meghatározásához szükségesek. Például, az 1044 számhoz a következő tengely-mutató tartozik:

$$-\frac{12 \cdot (-17)}{1044} = 0,20.$$

(Ha a választás pontosságát nem befolyásolja, közelítő számításokkal is megelégedhetünk.)

|      |       |  |
|------|-------|--|
| 0,20 | 0,30* |  |
| —    | —     |  |
|      | 0,30  |  |
|      | —     |  |
| 0,20 | 0,30  |  |
| —    | —     |  |
| 1,9  | 12    |  |
|      |       |  |

Az első oszlopban a legkisebb értékek közelítőleg 0,2-vel, a harmadik oszlopban pontosan 0,3-mal egyenlők. Ezek közül 0,3 a nagyobb, tehát ennek megfelelően kell tengelyelemet választanunk. Példánkban három, egyformán



jó tengelyelem van: a 720, a 720 és a 960. Ezek közül tetszés szerint választunk: válasszuk ki mondjuk az első sor és a harmadik oszlop metszésében álló 720-at. Ezt a 2. Szkémában csillaggal jelöltük meg. A másik két tengelyelemmel nem kell törődnünk, mivel a játék fáját még egyszer megmásszuk majd.

Így eljuthatunk a következő skémához. Íme az eredmény:

3. skéma

|     |   | Piros   |        |      |     |    |           |
|-----|---|---------|--------|------|-----|----|-----------|
|     |   | 1       | 2      |      |     |    |           |
| Kék | 2 | 783     | -249   | 26   | -17 | 9  | 3         |
|     | 3 | -25,920 | 8,640* | -720 | 0   | 0  |           |
|     |   | 0       | 11,520 | -960 | 240 | 0  |           |
|     |   | 189     | 933    | -2   | 29  | 27 | 4         |
|     |   | 252     | -36    | 24   | 12  | 36 | $D = 720$ |
|     |   |         |        | 1    | 4   |    |           |

Mivel a szegélyszámok közül csak a második oszlop alatti szám negatív, a lehetséges tengelyelemek a második oszlop pozitív számai. A szóba jöhető elemek tehát:

|        |    |
|--------|----|
| 8,640  | 0  |
| 11,520 | 0  |
| 933    | 27 |
| -36    |    |



Azokban az esetekben, amelyekben az  $o$  nulla, a

$$-\frac{s \cdot o}{t}$$

tengely-mutató értéke is nulla, így a 8640 és a 11 520 értékek lehetnek tengelyelemek. A két lehetőség közül az elsőt választva számítsuk ki a következő szkéma számait:

4. szkema

(1. megoldás Kék 7:1:0:4 Piros 0:0:1:3)

Piros

1

Kék

3

|         |         |      |       |     |   |
|---------|---------|------|-------|-----|---|
| 432     | 249     | 63   | -204  | 108 | 3 |
| -25 920 | 720     | -720 | 0     | 0   | 2 |
| 414 720 | -11 520 | 0    | 2 880 | 0   |   |
| 35 856  | -933    | 909  | 348   | 324 | 4 |
| 1 728   | 36      | 252  | 144   | 432 |   |

$D = 8\,640$

2

1

4

A szegélyszámok között nincs negatív, tehát megoldáshoz jutottunk.

Látjuk, hogy Kéknek a Kék 1, Kék 2 és Kék 4 stratégiával kell dolgoznia sorra 252, 36 és 144, vagy közös tényezővel, 36-tal osztva 7, 1 és 4 gyakorisággal. Hasonlóképpen Pirosnak a Piros 2, Piros 3 és Piros 4 stratégiákat kell alkalmaznia, sorra 0, 108 és 324, vagyis 0, 1 és 3 gyakorisággal. A játék értéke  $\frac{8640}{423} = 20$ , ami éppen azzal a konstanssal egyenlő, amit a megoldás elején a játék minden nyereségértékéhez hozzáadtunk. Így az eredeti játék igazságos játék.

Valóban megoldás a Kék 7:1:0:4 és Piros 0:0:1:3? Vagy hibáztunk? Könnyen ellenőrizhetjük. Kék 7:1:0:4 arányú stratégiakeverékét Piros 1



ellen alkalmazva (az eredeti mátrix alapján):

$$\frac{16 \cdot 7 + (-20) \cdot 1 + 25 \cdot 0 + (-11) \cdot 4}{7 + 1 + 0 + 4} = \frac{48}{12} = 4$$

egység, Piros 2 ellen alkalmazva:

$$\frac{(-8) \cdot 7 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 13 \cdot 4}{12} = \frac{0}{12} = 0$$

egység, Piros 3 ellen alkalmazva:

$$\frac{9 \cdot 7 + 9 \cdot 1 + 18 \cdot 0 + (-18) \cdot 4}{12} = \frac{0}{12} = 0$$

egység, végül Piros 4 ellen alkalmazva:

$$\frac{(-3) \cdot 7 + (-3) \cdot 1 + (-6) \cdot 0 + 6 \cdot 4}{12} = \frac{0}{12} = 0$$

egység nyereséghez juthatunk. Így Kék vagy eléri a játék értékét, vagy — ha ellenfele hibásan játszik — annál nagyobb nyereséget ér el.

Kék megoldása tehát szemmel láthatóan helyes. Teljes bizonyossággal állíthatjuk ezt? Nem, hiszen elképzelhető az, hogy a játék értékét rosszul számítottuk ki. Ha a játék értéke nem 0 volna, hanem mondjuk  $\frac{1}{2}$ , akkor a fenti számítások félrevezettek volna minket. Ahhoz, hogy meggyőződjünk arról, hogy Kék stratégiáját és a játék értékét valóban helyesen határoztuk meg, a megoldás ellenőrzését Piros javasolt legjobb kevert stratégiájának vizsgálatával teljessé kell tennünk. Piros a 0:0:1:3 kevert stratégia alkalmazásával Kék 1 ellen

$$\frac{16 \cdot 0 + (-8) \cdot 0 + 9 \cdot 1 + (-3) \cdot 3}{0 + 0 + 1 + 3} = 0$$

nyereséget ér el és ugyanezt kapnánk, ha Piros fenti kevert stratégiáját Kék többi stratégiája ellen használnánk. Mivel a javasolt kevert stratégiával mindkét játékos ugyanazt az átlagos nyereséget éri el és bármelyik tiszta stratégia ellen legalább ugyanolyan jó eredményt érnek el, biztosak lehetünk abban, hogy a játék értéke valóban 0 és valóban megoldást találtunk.

Van-e a játéknak más alapmegoldása is? Nyilvánvalóan van, hiszen a szélsőszámok között vannak nullák. Ez bizonyos sorokban — a második és a harmadikban — fordul elő, tehát a 7.2. lépés szerint kell eljárunk: negatív tengelyelemet kell keresnünk és  $D$  előjelét meg kell változtatnunk. Eze-







A szegély széléhez írt stratégianevek Kék és Piros stratégianeveinek új halmazát alkotják, tehát a szkémát kiegészítve új alapmegoldást kapunk. Íme az eredmény:

5. szkéma

(2. megoldás. Kék 17:7:0:12 Piros 0:0:1:3)

|     |   |         |      |          |       |       |                |
|-----|---|---------|------|----------|-------|-------|----------------|
|     |   | Piros   |      |          |       |       |                |
|     |   | 2       |      |          |       |       |                |
| Kék | 3 | 432     | 783  | 153      | 612   | 324   | 3              |
|     |   | -8 640  | -720 | 720      | 0     | 0     | 1              |
|     |   | 414 720 | 0    | -34 560* | 8 640 | 0     |                |
|     |   | 35 856  | 189  | -261     | 1 044 | 972   | 4              |
|     |   | 1 728   | 252  | 612      | 432   | 1 296 | $D = -25\,920$ |
|     |   | 2       | 1    | 4        |       |       |                |

Így Kéknek 612:252:0:432, Pirosnak 0:0:324:972, vagy a közös tényezőkkel osztva Kéknek 17:7:0:12, Pirosnak 0:0:1:3 arányban kell stratégiáit kevernie.

Most az 5. Szkéma harmadik sorában keresünk negatív tengelyelemet. Csak egy lehetőségünk van, a harmadik oszlopban álló  $-34\,560$ . Cseréljük fel a szegély mellett álló stratégianeveket a  $T = -34\,560$  tengelyelemnek megfelelően:

|     |   |       |   |   |  |   |
|-----|---|-------|---|---|--|---|
|     |   | Piros |   |   |  |   |
|     |   | 2     |   |   |  |   |
| Kék | 1 |       |   |   |  | 3 |
|     |   |       |   |   |  | 1 |
|     |   |       |   |   |  | 4 |
|     |   |       |   |   |  |   |
|     |   | 2     | 3 | 4 |  |   |



Ez eltér az 1. és 2. megoldásokban kapott halmazoktól, tehát újabb alap-megoldást fogunk találni. Ezt a 3. Szkéma adja meg:

6. szkéma

(3. megoldás Kék 0:28:51:65 Piros 0:0:1:3)

Piros

|     |   |          |       |         |        |       |               |  |
|-----|---|----------|-------|---------|--------|-------|---------------|--|
|     |   | 2        |       |         |        |       |               |  |
| Kék | 1 | 3,024    | 1,044 | 153     | - 765  | 432   | 3             |  |
|     |   | 0        | -960* | 720     | 240    | 0     | 1             |  |
|     |   | -414,720 | 0     | -25,920 | -8,640 | 0     |               |  |
|     |   | 43,632   | 252   | -261    | 1,305  | 1,296 | 4             |  |
|     |   | 12,096   | 336   | 612     | 780    | 1,728 | $D = -34,560$ |  |
|     |   | 2        | 3     | 4       |        |       |               |  |

Most újra a második sorban kell negatív tengelyelemet keresnünk. Egyetlen lehetőségünk a  $T = -960$ . Hajtsuk végre a szegély melletti stratégiánevek közötti cserét:

|     |   |       |   |   |   |
|-----|---|-------|---|---|---|
|     |   | Piros |   |   |   |
|     |   | 2     | 1 |   |   |
| Kék | 2 | *     |   |   |   |
|     | 1 |       |   |   |   |
|     |   |       |   |   |   |
|     |   |       |   | 3 | 4 |

A stratégia-sorszámok újabb halmazát kaptuk, így a következő szkéma



újabb alapmegoldást ad:

7. szkéma

(4. megoldás Kék 0:0:1:1 Piros 0:0:1:3)

|     |   | Piros    |         |      |      |            |
|-----|---|----------|---------|------|------|------------|
|     |   | 2        | 1       |      |      |            |
| Kék | 2 | 84       | 1 044   | 26   | -14  | 12         |
|     | 1 | 0        | -34 560 | -720 | -240 | 0          |
|     | 1 | -11 520* | 0       | -720 | -240 | 0          |
|     |   | 1 212    | 252     | -2   | 38   | 36         |
|     |   | 336      | 336     | 24   | 24   | 48         |
|     |   |          |         |      |      | $D = -960$ |
|     |   |          |         |      |      | 3 4        |

Újra a harmadik sor következik. Meg kell vizsgálnunk először a lehetséges tengelyelemekre vonatkozó  $o/t$  hányadosokat. Ezek a következők:  $\frac{336}{-11\,520} = -0,029$ ,  $\frac{24}{-720} = -0,033$  és  $\frac{24}{-240} = -0,1$ . Ezek közül az első van legközelebb a nullához és így  $T = -11\,520$ . A szegély mellett álló stratégianevek a következőképpen változnak meg:

|     |   | Piros |   |   |   |
|-----|---|-------|---|---|---|
|     |   | 1     |   |   |   |
| Kék | 2 |       |   |   | 3 |
|     |   | *     |   |   | 2 |
|     |   |       |   |   | 4 |
|     |   | 1     | 3 | 4 |   |



Ez a számhalmaz különbözik az előzőktől, tehát újabb alapmegoldást kapunk. Íme:

8. szkéma

(5. megoldás. Kék 28:0:3:17 Piros 0:0:1:3)

Piros

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|

Újra a második sor következik — ebben a sorozatban utoljára. A három lehetséges tengelyelemre vonatkozó  $\frac{0}{1}$  értékek sorra  $\frac{4032}{-414\,720} = -0,010$ ,

$\frac{36}{-8640} = -0,004$  és  $\frac{204}{-2880} = -0,07$ . Így  $T = -8640$ .

Íly módon a szegély mellett lévő stratégianevek következő halmazához jutunk:

Piros

|  |  |  |  |   |   |  |
|--|--|--|--|---|---|--|
|  |  |  |  | 1 |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   | * |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |
|  |  |  |  |   |   |  |







3. lépés. Válasszuk ki a  $T$  tengelyelemet — vagyis a szkéma játékmátrix részéből egy számot és helyzetet.

3.1. lépés. A lehetséges  $t$  tengelyelemek csak pozitívak lehetnek.

3.2. lépés. A  $t$  alatti szegélyszám — nevezzük ezt  $o$ -nak — negatívnak kell lennie.

3.3. lépés. Jelöljük a  $t$ -től jobbra lévő szegélyszámot  $s$ -sel. Minden  $t$ -re számítsuk ki a

$$-\frac{s \cdot o}{t}$$

tengely-mutatót.

3.4. lépés. Mindegyik oszlopban húzzuk alá a 0-hoz legközelebb eső tengely-mutató értékeket.

3.5. lépés. Jelöljük meg csillaggal az aláhúzott értékek legnagyobbikát. A  $T$  tengely a csillagnak megfelelő helyen álló  $t$  szám.

4. lépés. A következő szkéma számait az alábbiak szerint kell megalkotnunk:

4.1. lépés. A régi tengelyelem helyére a  $D$  számot írjuk.

4.2. lépés. A tengelyelem sorában levő számok  $T$  kivételével változatlanok maradnak.

4.3. lépés. A tengelyelem oszlopában levő számok  $T$  kivételével változatlanok maradnak, de előjelük megváltozik.

4.4. lépés. Az összes többi számot — jelöljük azokat  $N$ -nel — az

$$\frac{N \cdot T - S \cdot O}{D}$$

formula alapján határozzuk meg, ahol  $S$  és  $O$  a  $T$ -vel és  $N$ -nel közös oszlopokban és sorokban álló számok.

4.5. lépés.  $D$  következő értéke  $T$ .

5. lépés. Készítsük el a következő szkémát.

5.1. lépés. Cseréljük fel a tengelyelem sorának bal oldalán álló Kék stratégianevevel azzal a stratégianevevel, amelyik a tengelyelem oszlopa alatt áll.

5.2. lépés. Cseréljük fel a tengelyelem oszlopa alatt álló Piros stratégianevevel azzal a stratégianevevel, amelyik a tengelyelem sorának jobb oldalán áll.

6. lépés. Vizsgáljuk meg, hogy van-e az új szkéma szegélyszámai között negatív szám.

6.1. lépés. Ha a szegélyszámok között egy vagy több negatív szám van, akkor menjünk vissza a 3. lépéshez és csináljuk végig újra a 3., 4., 5. és 6. lépéseket.

6.2. lépés. Ha a szegélyszámok között nincs negatív szám, akkor megtaláltuk a játék egy alapmegoldását: Az aktív stratégiák nevei a szegély mellett



állnak, gyakoriságukat a velük szomszédos szegélyszámok adják meg. A játék értékét úgy kaphatjuk meg, hogy  $D$ -t elosztjuk a jobb alsó sarokban álló szegélyszámmal.

7. lépés. Ha a szegélyszámok között egy vagy több 0 van, akkor több alapmegoldás van. Ezeket úgy határozhatjuk meg, hogy az összes nulla szegélyszámú sorból és oszlopból álló sorozat alapján keresünk további tengelyelemeket. Eljárásunkat esetleg többször kell megismételni. A tengelyelemek keresése a következőképpen történik:

7.1. lépés. Egy 0 szegélyszámú oszlopból úgy választunk  $T$  tengelyelemet, hogy megvizsgáljuk az oszlop pozitív  $t$  elemei közül melyikre legkisebb az  $\frac{s}{t}$  hányados.

7.2. lépés. Egy 0 szegélyszámú sorból úgy választunk  $T$  tengelyelemet, hogy megvizsgáljuk a sor negatív  $t$  elemei közül melyikre van az  $\frac{o}{t}$  hányados legközelebb a nullához.

8. lépés. Cseréljük fel az 5. lépés utasításai alapján a tengelyelem körül a stratégianeveket.

8.1. lépés. Ha Kék és Piros stratégianeveinek szegélyhalmaza újdonság, akkor a 4. lépéshez visszatérve határozzuk meg az új szkémát és az új alapmegoldást. Ha a  $T$  tengelyelem negatív, akkor a szabályokat módosítani kell: változtassuk meg  $D$  régi értékének előjelét és változtassuk meg a 4.2. és a 4.3. lépésben vizsgált elemek előjelét is.

8.2. lépés. Ha Kék és Piros stratégianeveinek olyan szegélyhalmazát kaptuk, ami nem újdonság, akkor a 0-k vizsgált sorozatából elérhető összes alapmegoldást meghatároztuk.

## A MUNKA ELLENŐRZÉSE

Sajnos, a megoldási eljárás során elkövetett hibák téves, de helyesnek látszó válaszhoz vezetnek. Ezért fontos, hogy munkánkat ellenőrizzük.

Teljes ellenőrzés csak a megoldás végén lehetséges: Próbáljuk ki Kék feltételezett legjobb stratégiáját Piros minden egyes tiszta stratégiájával szemben. Ha Kék stratégiája valóban a legjobb, akkor Piros legjobb kevert stratégiájának stratégiái ellen pontosan a játék értékét, Piros többi stratégiája ellen a játék értékét vagy annál nagyobb nyereséget érhetünk el. Hasonló eredményt kell kapnunk akkor, ha Piros feltételezett legjobb stratégiáját alkalmazzuk Kék tiszta stratégiái ellen.

Fejezetünk 1. példájában, a 242. oldalon levő játék megoldására a következőket kaptuk: Kék 0:1:5 és Piros 1:0:2. Kék 0:1:5 Piros 1 ellen

$$\frac{6 \cdot 0 + 8 \cdot 1 + 4 \cdot 5}{0 + 1 + 5} = \frac{28}{6},$$



Piros 2 ellen

$$\frac{0 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 + 6 \cdot 5}{0 + 1 + 5} = \frac{28}{6},$$

Piros 3 ellen

$$\frac{3 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 5}{0 + 1 + 5} = \frac{28}{6}$$

egység nyereséget ér el, vagyis  $4\frac{2}{3}$ -ot, éppen annyit, amennyi a játék értéke. Ezek szerint Kék stratégiája valóban legjobb stratégia.

Piros 1:0:2 Kék 1 ellen

$$\frac{6 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 2}{1 + 0 + 2} = \frac{12}{3},$$

Kék 2 ellen

$$\frac{8 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + 3 \cdot 2}{1 + 0 + 2} = \frac{14}{3},$$

Kék 3 ellen

$$\frac{4 \cdot 1 + 6 \cdot 0 + 5 \cdot 2}{1 + 0 + 2} = \frac{14}{3},$$

egység nyereséget ér el. Kék aktív stratégiái ellen tehát Piros a játék értékét éri el, a többi stratégia ellen viszont jobb eredményt ér el — tudjuk, hogy Piros minél kisebb nyereséget szeretne elérni, tehát számára a  $\frac{12}{3}$  kedvezőbb nyereségérték, mint a játék értéke,  $\frac{14}{3}$ .

Ezzel igazoltuk, hogy jól számoltunk. De mi történne, ha kiderülne, hogy tévedtünk? Újra kellene kezdeni az egész megoldást és lehet, hogy újra elkövetnénk ugyanazt a hibát.

Szerencsére vannak olyan szabályaink, amelyek gyakran már a megoldás közben jelzik a hibát. Az ilyen szabályok közül talán ez a legjobb:

*Ha a játékmátrixban csak egész számok vannak, akkor egy székében sem fordulhat elő törtszám.*

A tengelyelem sorának és oszlopának számaira ez magától értetődő, hiszen azokat — néha az előjelet megváltoztatva — csak másolnunk kell. Nem magától értetődő azonban a többi számra, amelyet az

$$\frac{N \cdot T - S \cdot O}{D}$$

formula alapján kell kiszámítani, azonban szabályunk ezekre is teljesül. Kivéve persze, ha számolási hibát követünk el.



Újabb, minden szkémára alkalmazható ellenőrzési szabály, hogy:  
*Ha Kék azon stratégiáinak gyakoriságait összeadjuk, amelyeknek neve a szegély alatt áll, akkor a szegély jobb alsó sarkában álló számot kapjuk.*

Hasonlóképpen:

*Ha Piros azon stratégiáinak gyakoriságait összeadjuk, amelyeknek neve a szegély mellett áll, akkor a szegély jobb alsó sarkában levő számot kapjuk.*

Újabb vészjel a következő:

*A jobb oldali szegélyszámok nem lehetnek negatívak.*

Ezek tehát csak nullák vagy pozitívak lehetnek. Negatív szám megjelenése azt jelzi, hogy nem megfelelően választottuk meg a tengelyelemet.

Újabb ellenőrzési lehetőség a  $D$  segédszámok és a jobb alsó szegélyszámok hányadosának vizsgálata:

*Ezek a hányadosok szkémáról szkémára haladva nem növekedhetnek.*

Az egymás utáni hányadosok tehát vagy egyre kisebbek, vagy ugyanakkorák. A végső szkémában ez a hányados a játék értékével egyenlő. A hányadosok tehát a sorozatban előre haladva a játék értékéhez közelednek.

A fent említett ellenőrzési módszerek a legtöbb kis játékban és a játékokat megoldók többségének elegendőek. Nagyobb játékoknál azonban szükség lehet további ellenőrzési módszerekre, például a kontroll összegekre.

## KONTROLL-ÖSSZEGEK

A kontroll-összegeket úgy vezethetjük be, hogy az Első Szkémához hozzáteszünk egy sort vagy egy oszlopot, vagy mind a kettőt. Mi sort is, oszlopot is hozzáteszünk. Ezeket a szkéma felső részén, ill. bal oldalán tüntetjük fel. Eljárásunkat a VI. rész első példáján mutatjuk be:

|     |   | Első szkéma |    |    |   |
|-----|---|-------------|----|----|---|
|     |   | Piros       |    |    |   |
|     |   | 1           | 2  | 3  |   |
| Kék | 1 | 8           | 2  | 5  | 1 |
|     | 2 | 10          | 0  | 5  | 1 |
|     | 3 | 6           | 8  | 7* | 1 |
|     |   | -1          | -1 | -1 | 0 |

$D = 1$



Az új oszlop legfelső elemét — jelöljük  $n_1$ -gyel — úgy kell megválasztanunk, hogy az első sor elemeit összeadva  $-1$ -et kapjunk:

$$n_1 + 8 + 2 + 5 + 1 = -1$$

vagyis

$$n_1 = -17.$$

Hasonlóképpen, az új oszlop második elemét úgy kell megválasztanunk, hogy a második sor elemeit összeadva  $-1$ -et kapjunk:

$$n_2 + 10 + 0 + 5 + 1 = -1$$

vagyis

$$n_2 = -17.$$

Az egyezés természetesen véletlen. Az utolsó két oszlopban sorra  $-23$  és  $2$  kerül.

Az új sor  $m_1$  számait úgy kell megválasztanunk, hogy az oszlopösszegek  $+1$ -gyel legyenek egyenlők. Az első számot például így határozhatjuk meg:

$$m_1 + 8 + 10 + 6 - 1 = 1,$$

vagyis

$$m_1 = -22.$$

A többi számok sorra a  $-8$ , a  $-15$  és a  $-2$ . Az Első Szkéma így a következő alakú lesz:

Első szkéma

Piros

|       |     |     |    |     |    |
|-------|-----|-----|----|-----|----|
|       |     | 1   | 2  | 3   |    |
|       |     | -22 | -8 | -15 | -2 |
| 1     | -17 | 8   | 2  | 5   | 1  |
| Kék 2 | -17 | 10  | 0  | 5   | 1  |
| 3     | -23 | 6   | 8  | 7*  | 1  |
|       | 2   | -1  | -1 | -1  | 0  |

$D = 1$

Az elrendezésre az jellemző, hogy a teljes sorok, ill. oszlopok összegei minden szkémában sorra a  $-D$ , ill. a  $D$  számokkal egyenlők.



A tengelyelemekkel kapcsolatos döntéseket úgy kell meghozni, mintha a kontroll-összegek nem volnának jelen. A következő szkéma elemeinek meghatározásakor azonban közönséges szkémaelemeknek kell tekintenünk azokat. Így a 4. és 5. lépés szabályai alapján a Második Szkémát a következőképpen kell kiszámítanunk:

|     |   | Piros |   |   |   |
|-----|---|-------|---|---|---|
|     |   | 1     | 2 | 3 |   |
| Kék | 1 | 15    |   |   |   |
|     | 2 | -5    |   |   |   |
|     | 3 | -5    |   |   |   |
|     | 3 | 6     | 8 | 1 | 1 |
|     |   | 1     |   |   |   |

|     |   | Piros |   |   |  |
|-----|---|-------|---|---|--|
|     |   | 1     | 2 | 3 |  |
| Kék | 1 |       |   |   |  |
|     | 2 |       |   |   |  |
|     | 3 | 1     |   |   |  |
|     | 3 |       |   |   |  |



|     |   |       |     |     |     |          |
|-----|---|-------|-----|-----|-----|----------|
|     |   | Piros |     |     |     |          |
|     |   | 2     |     |     |     |          |
|     |   |       | 64  | 0   | 40  | 24       |
| Kék | 1 | -8    | -26 | 0   | -10 | 4        |
|     |   | -4    | 7   | -40 | -5  | 2        |
|     |   | -128  | -6  | 80  | 10  | 4        |
|     |   | -52   | 1   | 0   | 5   | 6        |
|     |   | 2     |     | 3   |     | $D = 40$ |

Az összegek mind megfelelnek várakozásunknak. Például a második sorban

$$-4 + 40 - 40 - 5 + 2 = -7,$$

a második oszlopban

$$64 - 26 - 40 + 8 + 1 = 7$$

az összeg, ami sorra megegyezik  $-D$ -vel, ill  $D$ -vel, tehát elkezdhetjük a következő tengelyműveletet. A következő tengelyelemet, a 40-et, amelyet az ismert módszerrel kaptunk az előző szkémán csillaggal jelöltünk meg.

A Harmadik Szkéma a következő:

|     |   |                |     |     |    |         |
|-----|---|----------------|-----|-----|----|---------|
|     |   | Második szkéma |     |     |    |         |
|     |   | Piros          |     |     |    |         |
|     |   | 1              | 2   |     |    |         |
|     |   |                | -64 | 64  | 15 | 1       |
| Kék | 1 | -4             | 26  | -26 | -5 | 2       |
|     | 2 | -4             | 40* | -40 | -5 | 2       |
|     |   | -23            | 6   | 8   | 1  | 1       |
|     |   | -9             | -1  | 1   | 1  | 1       |
|     |   |                |     | 3   |    | $D = 7$ |



# FÜGGELÉK

## Véletlen számok táblázata



|                |                |                |                |
|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 11 16 43 63 18 | 75 06 13 76 74 | 40 60 31 61 52 | 83 23 53 73 61 |
| 21 21 59 17 91 | 76 83 15 86 78 | 40 94 15 35 85 | 69 95 86 09 16 |
| 10 43 84 44 82 | 66 55 83 76 49 | 73 50 58 34 72 | 55 95 31 79 57 |
| 36 79 22 62 36 | 33 26 66 65 83 | 39 41 21 60 13 | 11 44 28 93 20 |
| 73 94 40 47 73 | 12 03 25 14 14 | 57 99 47 67 48 | 54 62 74 85 11 |
| 49 56 31 28 72 | 14 06 39 31 04 | 61 83 45 91 99 | 15 46 98 22 85 |
| 64 20 84 82 37 | 41 70 17 31 17 | 91 40 27 72 27 | 79 51 62 10 07 |
| 51 48 67 28 75 | 38 60 52 93 41 | 58 29 98 38 80 | 20 12 51 07 94 |
| 99 75 62 63 60 | 64 51 61 79 71 | 40 68 49 99 48 | 33 88 07 64 13 |
| 71 32 55 52 17 | 13 01 57 29 07 | 75 97 86 42 98 | 08 07 46 20 55 |
| 65 28 59 71 98 | 12 13 85 30 10 | 34 55 63 98 61 | 88 26 77 60 68 |
| 17 26 45 73 27 | 38 22 42 93 01 | 65 99 05 70 48 | 25 06 77 75 71 |
| 95 63 99 97 54 | 31 19 99 25 58 | 16 38 11 50 69 | 25 41 68 78 75 |
| 61 55 57 64 04 | 86 21 01 18 08 | 52 45 88 88 80 | 78 35 26 79 13 |
| 78 13 79 87 68 | 04 68 98 71 30 | 33 00 78 56 07 | 92 00 84 48 97 |
| 62 49 09 92 15 | 84 98 72 87 59 | 38 71 23 15 12 | 08 58 86 14 90 |
| 24 21 66 34 44 | 21 28 30 70 44 | 58 72 20 36 78 | 19 18 66 96 02 |
| 16 97 59 54 28 | 33 22 65 59 03 | 26 18 86 94 97 | 51 35 14 77 99 |
| 59 13 83 95 42 | 71 16 85 76 09 | 12 89 35 40 48 | 07 25 58 61 49 |
| 29 47 85 96 52 | 50 41 43 19 66 | 33 18 68 13 46 | 85 09 53 72 82 |
| 96 15 59 50 09 | 27 42 97 29 18 | 79 89 32 94 48 | 88 39 25 42 11 |
| 29 62 16 65 83 | 62 96 61 24 68 | 48 44 91 51 02 | 44 12 61 94 38 |
| 12 63 97 52 91 | 71 02 01 72 65 | 94 20 50 42 59 | 68 98 35 05 61 |
| 14 54 43 71 34 | 54 71 40 24 01 | 38 64 80 92 78 | 81 31 37 74 00 |
| 83 40 38 88 27 | 09 83 41 13 33 | 04 29 24 60 28 | 75 66 62 69 54 |
| 67 64 20 52 04 | 30 69 74 48 06 | 17 02 64 97 37 | 85 87 51 21 39 |
| 64 04 19 90 11 | 61 04 02 73 09 | 48 07 07 68 48 | 02 53 19 77 37 |
| 17 04 89 45 23 | 97 44 45 99 04 | 30 15 99 54 50 | 83 77 84 61 15 |
| 93 03 98 94 16 | 52 79 51 06 31 | 12 14 89 22 31 | 31 36 16 06 50 |
| 82 24 43 43 92 | 96 60 71 72 20 | 73 83 87 70 67 | 24 86 39 75 76 |
| 96 99 05 52 44 | 70 69 32 52 55 | 73 54 74 37 59 | 95 63 23 95 55 |
| 09 11 97 48 03 | 97 30 38 87 01 | 07 27 79 32 17 | 79 42 12 17 69 |
| 57 66 64 12 04 | 47 58 97 83 64 | 65 12 84 83 34 | 07 49 32 80 98 |
| 46 49 26 15 94 | 26 72 95 82 72 | 38 71 66 13 80 | 60 21 20 50 99 |
| 08 43 31 91 72 | 08 32 02 08 39 | 31 92 17 64 58 | 73 72 00 86 57 |
| 10 01 17 50 04 | 86 05 44 11 90 | 57 23 82 74 64 | 61 48 75 23 29 |
| 92 42 06 54 31 | 16 53 00 55 47 | 24 21 94 10 90 | 08 53 16 15 78 |
| 35 54 25 58 65 | 07 30 44 70 10 | 31 30 94 93 87 | 02 33 00 24 76 |
| 86 59 52 62 47 | 18 55 22 94 91 | 20 75 09 70 24 | 72 61 96 66 28 |
| 72 11 53 49 85 | 58 03 69 91 37 | 28 53 78 43 95 | 26 65 43 78 51 |



|                |                |                |                |
|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 07 42 85 88 63 | 96 02 38 89 36 | 97 92 94 12 20 | 86 43 19 44 85 |
| 35 37 92 79 22 | 28 90 65 50 13 | 40 56 83 32 22 | 40 48 69 11 22 |
| 10 98 22 28 07 | 10 92 02 62 99 | 41 48 39 29 35 | 17 06 17 82 52 |
| 90 12 73 33 41 | 77 80 61 24 46 | 93 04 06 64 76 | 24 99 04 10 99 |
| 63 00 21 29 90 | 23 51 06 87 74 | 76 86 93 93 00 | 84 97 80 75 04 |
| 40 77 98 63 82 | 48 45 46 52 69 | 02 98 25 79 91 | 50 76 59 19 30 |
| 43 21 61 26 08 | 18 16 78 46 31 | 94 47 97 65 00 | 39 17 00 66 29 |
| 96 16 76 43 75 | 74 10 89 36 43 | 52 29 17 58 22 | 95 96 69 09 47 |
| 70 97 56 26 93 | 35 68 47 26 07 | 03 68 40 36 00 | 52 83 15 53 81 |
| 85 81 26 18 75 | 23 57 07 57 54 | 58 93 92 83 66 | 86 76 56 74 65 |
| 37 10 06 24 92 | 63 64 24 76 38 | 54 72 35 65 27 | 53 07 63 82 35 |
| 53 40 61 38 55 | 38 51 92 95 00 | 84 82 88 12 48 | 25 54 83 40 75 |
| 55 17 28 15 56 | 18 85 65 90 43 | 65 79 90 19 14 | 81 36 30 51 73 |
| 40 35 38 48 07 | 47 76 74 68 90 | 87 91 73 85 49 | 48 21 37 17 08 |
| 18 89 90 96 12 | 77 54 15 76 75 | 26 90 78 81 73 | 71 18 92 83 77 |
| 68 14 12 53 40 | 92 55 11 13 26 | 68 05 26 54 22 | 88 46 00 63 52 |
| 51 55 99 11 59 | 81 31 06 32 51 | 42 58 76 81 49 | 88 14 79 97 00 |
| 92 21 43 33 86 | 73 45 97 93 59 | 97 17 65 54 16 | 67 64 20 50 51 |
| 15 08 95 05 57 | 33 16 68 70 94 | 53 29 58 71 33 | 38 26 49 47 08 |
| 96 46 10 06 04 | 11 12 02 22 54 | 23 01 19 41 08 | 29 19 66 51 87 |
| 28 17 74 41 11 | 15 70 57 38 35 | 75 76 84 95 49 | 24 54 36 32 85 |
| 66 95 34 47 37 | 81 12 70 74 93 | 86 66 87 03 41 | 66 46 07 56 48 |
| 19 71 22 72 63 | 84 57 54 98 20 | 56 72 77 20 36 | 50 34 73 35 21 |
| 68 75 66 47 57 | 19 98 79 22 22 | 27 93 67 80 10 | 09 61 70 44 08 |
| 75 02 26 53 32 | 98 60 62 94 51 | 31 99 46 90 72 | 37 35 49 30 25 |
| 11 32 37 00 69 | 90 26 98 92 66 | 02 98 59 53 03 | 15 18 25 01 66 |
| 55 20 86 34 70 | 18 15 82 52 83 | 89 96 51 02 06 | 95 83 09 54 06 |
| 11 47 40 87 86 | 05 59 46 70 45 | 45 58 72 96 11 | 98 57 94 24 81 |
| 81 42 28 68 42 | 60 99 77 96 69 | 01 07 10 85 30 | 74 30 57 75 09 |
| 21 77 17 59 63 | 23 15 19 02 74 | 90 20 96 85 21 | 14 29 33 91 94 |
| 42 27 81 21 60 | 32 57 61 42 78 | 04 98 26 84 70 | 27 87 51 54 80 |
| 17 69 76 01 14 | 63 24 73 20 96 | 19 74 02 46 37 | 97 37 73 21 12 |
| 05 68 63 02 43 | 34 12 40 29 36 | 50 19 77 98 69 | 86 49 76 87 09 |
| 52 99 24 66 50 | 89 91 05 73 95 | 46 95 46 75 36 | 28 96 88 19 36 |
| 94 51 89 39 84 | 81 47 86 77 50 | 82 54 96 26 76 | 31 12 34 98 99 |
| 00 18 47 21 86 | 78 90 67 54 80 | 61 79 88 16 00 | 80 01 88 47 42 |
| 87 46 26 31 65 | 79 81 66 16 30 | 57 66 62 90 55 | 46 51 80 14 87 |
| 88 69 25 87 16 | 12 27 34 81 76 | 29 80 56 49 94 | 66 87 26 22 30 |
| 20 09 44 29 62 | 41 38 21 67 68 | 06 71 13 49 39 | 19 59 97 62 47 |
| 60 93 58 15 04 | 50 52 08 21 53 | 13 93 44 68 85 | 58 31 58 83 66 |



|                |                |                |                |
|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 51 39 28 59 36 | 43 89 85 05 96 | 28 54 99 83 27 | 99 94 32 53 77 |
| 54 23 94 19 18 | 79 52 64 62 74 | 40 87 16 18 03 | 25 76 75 54 84 |
| 57 89 27 33 94 | 07 16 09 02 62 | 47 70 43 83 55 | 71 70 88 01 17 |
| 02 33 07 47 36 | 53 27 44 44 68 | 62 61 11 96 98 | 09 30 42 92 65 |
| 76 11 52 92 47 | 55 34 25 12 99 | 03 04 78 39 81 | 11 91 60 92 67 |
| 63 31 28 18 86 | 29 08 52 01 01 | 26 46 05 05 01 | 31 73 11 89 38 |
| 27 63 22 15 70 | 34 27 45 64 26 | 01 76 42 59 59 | 69 29 38 98 75 |
| 06 33 56 21 11 | 44 01 45 25 67 | 11 76 25 48 06 | 02 65 15 29 12 |
| 64 14 28 76 76 | 21 35 88 87 73 | 31 73 63 16 95 | 11 52 36 42 13 |
| 28 43 62 54 68 | 75 23 57 53 70 | 97 15 54 87 06 | 52 23 92 18 31 |
| 09 52 28 38 55 | 85 97 31 58 88 | 31 18 14 96 72 | 17 23 70 40 24 |
| 93 71 41 54 14 | 93 71 20 27 42 | 32 11 58 26 83 | 67 18 28 90 30 |
| 15 68 15 35 99 | 58 18 57 38 40 | 07 06 87 59 47 | 71 74 36 92 85 |
| 77 71 22 39 14 | 08 90 74 37 68 | 26 62 27 41 84 | 75 16 69 67 48 |
| 78 45 35 48 44 | 61 50 90 12 45 | 02 80 55 26 76 | 22 51 94 78 48 |
| 24 86 06 82 84 | 19 36 72 90 73 | 32 30 15 87 01 | 04 19 33 01 42 |
| 37 28 40 68 44 | 78 88 75 72 76 | 26 33 95 69 09 | 39 33 14 21 01 |
| 35 48 85 24 73 | 37 63 43 25 69 | 95 27 40 95 08 | 81 01 24 24 13 |
| 51 59 55 99 09 | 35 22 34 49 91 | 24 27 53 96 32 | 09 77 79 88 00 |
| 90 66 03 51 71 | 30 02 19 11 20 | 36 11 64 21 28 | 65 40 19 41 99 |
| 47 50 50 20 08 | 20 30 08 71 88 | 96 19 50 70 59 | 13 26 63 13 89 |
| 13 35 00 84 14 | 64 04 99 43 77 | 22 40 89 49 58 | 19 09 55 80 35 |
| 33 00 69 26 90 | 69 24 89 74 43 | 53 89 62 35 08 | 16 22 75 69 29 |
| 55 21 66 38 86 | 06 80 41 18 61 | 22 56 50 24 75 | 00 25 87 90 18 |
| 21 99 12 62 28 | 14 80 11 91 92 | 49 43 82 07 72 | 60 84 66 97 32 |
| 71 02 52 82 12 | 10 47 42 75 22 | 65 62 03 46 84 | 00 21 00 48 63 |
| 65 52 21 52 42 | 84 55 47 45 60 | 20 24 62 69 41 | 41 29 80 47 63 |
| 27 97 55 49 23 | 90 65 00 61 70 | 09 43 30 91 67 | 35 16 63 27 31 |
| 07 30 00 97 04 | 36 09 96 15 77 | 95 55 27 34 56 | 16 57 88 81 40 |
| 54 35 71 36 89 | 19 56 90 38 14 | 76 05 30 51 50 | 69 12 56 94 42 |
| 00 97 70 44 81 | 42 04 40 86 49 | 34 82 23 58 43 | 78 46 88 23 80 |
| 13 92 07 87 61 | 12 31 19 28 08 | 07 75 30 40 73 | 58 52 08 00 22 |
| 08 39 53 70 43 | 37 88 03 41 72 | 04 20 49 44 34 | 62 79 88 19 02 |
| 46 16 66 72 06 | 01 61 94 37 69 | 96 77 01 94 40 | 29 70 04 20 93 |
| 87 76 77 76 07 | 03 74 20 16 13 | 65 98 96 28 43 | 10 91 73 44 58 |
| 29 88 09 52 88 | 21 64 44 65 87 | 06 64 49 47 84 | 66 99 56 18 12 |
| 36 24 83 66 66 | 14 89 45 92 73 | 88 95 04 60 77 | 34 65 11 20 38 |
| 12 38 62 96 56 | 30 47 42 59 64 | 21 48 29 54 22 | 02 00 23 36 71 |
| 52 06 87 38 01 | 52 18 81 94 91 | 55 13 76 10 39 | 02 00 66 99 13 |
| 41 72 75 21 71 | 56 71 90 60 54 | 98 44 18 15 29 | 59 60 76 52 25 |



|                |                |                |                |
|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 49 31 97 45 80 | 57 47 01 46 00 | 57 16 33 04 58 | 23 89 20 78 25 |
| 88 78 67 69 63 | 12 12 72 50 14 | 71 88 66 53 34 | 38 01 30 93 79 |
| 84 86 69 52 02 | 43 98 37 26 55 | 40 41 85 95 04 | 52 38 30 72 32 |
| 11 84 92 64 82 | 20 46 19 94 50 | 28 83 37 66 61 | 47 27 79 29 35 |
| 54 96 61 75 94 | 57 39 37 32 67 | 37 88 36 21 24 | 62 19 94 95 42 |
| 10 95 93 33 49 | 80 71 99 67 51 | 44 88 23 35 92 | 66 23 41 38 21 |
| 22 78 40 77 83 | 35 90 30 00 91 | 19 08 21 38 73 | 07 18 42 15 66 |
| 86 03 76 17 91 | 33 81 56 39 68 | 45 31 62 92 83 | 89 31 85 58 06 |
| 80 03 76 50 89 | 85 91 97 43 91 | 22 78 85 54 33 | 31 18 87 48 82 |
| 72 75 18 43 59 | 15 76 91 36 15 | 08 29 38 61 93 | 05 02 62 12 55 |
| 18 53 20 38 74 | 66 22 07 90 50 | 29 22 37 05 41 | 67 11 58 45 84 |
| 22 93 62 20 58 | 49 17 11 10 27 | 22 68 18 01 10 | 31 59 50 92 46 |
| 66 39 77 65 10 | 81 15 00 07 04 | 74 58 09 03 54 | 43 74 42 21 78 |
| 89 73 02 32 72 | 65 42 03 50 91 | 69 09 37 13 64 | 08 10 79 69 52 |
| 81 82 17 53 23 | 96 06 89 17 24 | 40 45 69 12 34 | 58 09 06 53 42 |
| 94 37 78 25 54 | 53 58 61 14 32 | 72 92 76 73 49 | 83 96 25 89 12 |
| 68 48 54 99 91 | 53 16 51 98 65 | 61 86 93 30 93 | 81 12 90 64 81 |
| 07 33 00 71 84 | 86 78 86 45 77 | 40 04 81 65 20 | 07 63 81 07 97 |
| 10 99 31 49 30 | 35 07 23 64 29 | 68 77 39 76 69 | 28 65 68 99 38 |
| 20 80 11 51 78 | 64 45 38 33 57 | 09 77 43 07 51 | 49 74 01 13 85 |
| 79 24 13 53 47 | 66 85 17 92 47 | 46 13 93 66 89 | 82 58 71 35 86 |
| 43 59 33 95 55 | 97 34 55 84 94 | 26 56 69 53 23 | 32 99 38 99 88 |
| 29 52 26 27 13 | 33 70 11 71 86 | 06 76 55 71 41 | 48 61 71 82 82 |
| 88 83 64 72 90 | 67 27 47 83 62 | 35 38 49 03 80 | 12 31 78 97 02 |
| 65 90 56 62 53 | 91 48 23 06 89 | 49 33 37 84 82 | 36 19 91 13 55 |
| 44 79 86 93 71 | 07 86 59 17 56 | 45 59 51 40 44 | 56 80 69 91 26 |
| 35 51 09 91 39 | 32 03 12 79 25 | 79 81 91 50 54 | 76 17 41 22 06 |
| 50 12 59 32 23 | 64 20 94 97 14 | 11 97 16 22 34 | 74 85 74 64 01 |
| 25 17 39 00 38 | 63 87 14 04 18 | 11 45 28 93 18 | 53 08 42 19 93 |
| 68 45 99 00 94 | 44 99 59 37 18 | 38 74 68 12 71 | 96 26 09 81 37 |
| 93 36 91 30 44 | 69 68 67 81 62 | 66 37 80 29 19 | 34 01 25 00 80 |
| 19 36 05 50 49 | 94 95 17 63 41 | 84 01 93 06 90 | 25 65 67 29 96 |
| 47 79 88 98 90 | 06 89 36 54 83 | 17 70 12 12 92 | 14 88 01 53 86 |
| 69 22 33 20 07 | 03 51 36 11 49 | 32 54 69 20 72 | 62 52 22 15 04 |
| 34 51 15 07 21 | 84 85 03 41 59 | 97 13 86 19 19 | 97 78 92 85 75 |
| 54 03 15 93 29 | 58 96 35 22 20 | 35 29 22 79 24 | 55 46 74 30 36 |
| 66 72 28 55 15 | 04 72 39 24 11 | 02 73 70 81 68 | 30 04 36 34 50 |
| 71 05 90 74 96 | 38 40 41 81 26 | 28 26 13 78 44 | 12 54 31 43 98 |
| 45 47 88 60 66 | 31 13 53 32 43 | 80 57 33 06 06 | 48 64 45 30 08 |
| 97 24 69 11 21 | 89 43 72 03 93 | 77 15 38 85 52 | 26 84 31 28 44 |



|                |                |                |                |
|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 22 98 22 59 36 | 96 41 73 48 45 | 85 14 95 75 04 | 15 05 93 68 49 |
| 48 24 36 29 93 | 47 13 28 52 48 | 35 22 97 28 37 | 36 75 27 16 55 |
| 93 51 41 49 15 | 67 96 08 22 03 | 40 11 72 43 46 | 32 18 98 70 74 |
| 69 70 79 83 03 | 93 06 91 62 16 | 60 87 59 75 45 | 68 65 29 21 60 |
| 87 46 79 17 94 | 70 81 41 27 43 | 03 76 93 25 51 | 74 80 14 16 92 |
| 81 00 68 14 98 | 59 37 53 05 02 | 94 07 79 22 09 | 31 50 66 96 06 |
| 15 45 88 34 81 | 50 18 74 33 75 | 94 37 60 06 66 | 94 14 52 23 99 |
| 33 46 91 25 10 | 23 09 54 80 16 | 42 35 41 13 47 | 90 92 00 38 64 |
| 67 19 80 71 76 | 65 99 61 83 17 | 81 14 94 32 91 | 10 81 74 43 48 |
| 58 03 79 22 61 | 85 50 45 56 90 | 10 63 17 82 38 | 00 15 74 62 59 |
| 84 98 36 83 12 | 25 51 95 61 58 | 86 30 00 76 89 | 14 00 67 77 53 |
| 35 55 40 29 35 | 72 88 96 87 72 | 19 85 03 96 50 | 65 22 21 55 63 |
| 04 36 81 76 32 | 50 96 27 19 08 | 94 46 46 64 32 | 62 24 31 36 74 |
| 81 31 16 04 79 | 69 98 53 09 52 | 23 92 14 97 30 | 21 71 89 23 14 |
| 03 82 38 98 87 | 55 82 87 44 52 | 72 77 52 37 16 | 42 85 37 47 93 |
| 80 42 26 54 37 | 38 79 75 62 61 | 27 81 64 67 04 | 82 73 50 33 39 |
| 61 30 74 94 68 | 43 34 44 37 00 | 20 20 77 70 88 | 17 16 72 45 31 |
| 83 87 38 25 57 | 10 00 28 00 93 | 59 28 30 44 94 | 60 72 52 14 31 |
| 38 11 01 68 55 | 28 92 29 37 58 | 88 73 13 63 76 | 51 38 35 76 19 |
| 43 89 29 11 89 | 87 22 65 69 35 | 84 76 26 79 96 | 75 00 00 17 45 |
| 93 68 30 96 64 | 53 92 74 98 85 | 20 75 49 23 55 | 57 95 51 09 40 |
| 32 74 80 21 21 | 11 97 29 69 14 | 28 06 56 95 64 | 06 83 55 68 45 |
| 49 21 19 29 63 | 38 62 56 53 12 | 62 17 57 33 53 | 84 97 21 77 26 |
| 63 36 56 42 24 | 69 47 55 75 12 | 11 04 45 04 83 | 68 82 19 74 26 |
| 63 57 62 63 73 | 44 61 04 37 48 | 00 33 16 34 22 | 99 62 27 67 57 |
| 41 07 84 70 36 | 65 52 46 84 66 | 67 15 72 64 19 | 37 97 81 65 11 |
| 70 84 68 95 58 | 64 17 31 53 81 | 87 71 35 08 41 | 46 27 02 65 08 |
| 68 80 06 44 92 | 20 16 23 27 07 | 10 28 18 25 25 | 74 15 58 67 49 |
| 44 97 78 95 25 | 51 26 96 37 47 | 91 36 77 40 33 | 67 02 06 90 92 |
| 79 35 46 38 47 | 24 39 55 36 79 | 40 56 03 69 14 | 69 17 63 19 18 |
| 14 95 42 22 99 | 40 15 65 26 85 | 29 22 33 83 83 | 30 31 57 09 99 |
| 01 71 19 84 39 | 09 44 63 39 37 | 49 09 54 02 38 | 81 69 71 24 74 |
| 62 32 85 53 28 | 45 73 89 39 40 | 27 46 62 69 27 | 53 34 51 13 79 |
| 73 00 46 21 09 | 81 90 77 10 77 | 57 46 37 00 45 | 65 12 34 90 70 |
| 34 21 88 94 45 | 05 60 95 23 36 | 50 55 89 22 42 | 52 73 28 15 02 |
| 99 15 90 19 68 | 45 88 68 68 75 | 28 41 39 59 18 | 44 15 64 69 59 |
| 92 85 82 99 49 | 15 81 79 33 72 | 56 65 74 31 93 | 58 13 05 42 73 |
| 27 39 69 74 77 | 65 55 47 16 01 | 13 12 16 88 67 | 95 76 35 96 67 |
| 37 10 34 53 09 | 30 12 94 33 80 | 96 99 68 93 56 | 22 78 46 01 84 |
| 57 34 79 70 12 | 48 42 82 06 06 | 60 74 22 22 26 | 89 99 32 45 97 |



|                |                |                |                |
|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 29 41 72 09 72 | 84 13 42 91 66 | 71 99 34 28 19 | 28 79 91 30 95 |
| 70 18 50 54 60 | 07 35 38 58 55 | 11 83 80 22 91 | 89 88 24 16 13 |
| 06 39 35 20 17 | 21 23 62 05 30 | 14 30 05 53 19 | 47 90 83 92 32 |
| 42 60 59 24 74 | 09 36 14 24 04 | 33 72 24 77 22 | 12 54 72 97 59 |
| 26 48 34 88 73 | 84 26 03 32 85 | 51 27 58 48 21 | 87 44 30 24 91 |
| 93 60 97 74 25 | 57 26 86 93 20 | 13 56 80 08 25 | 80 83 58 36 39 |
| 19 79 00 32 65 | 68 47 42 96 78 | 08 45 60 14 75 | 40 31 77 20 77 |
| 63 43 46 72 51 | 20 51 08 06 27 | 62 61 86 40 27 | 64 47 75 04 32 |
| 76 63 64 27 71 | 12 58 35 63 29 | 59 51 22 52 49 | 42 18 50 96 22 |
| 51 25 87 43 30 | 47 75 15 26 72 | 10 99 59 19 22 | 50 21 71 41 87 |
| 13 26 01 42 38 | 88 39 15 08 58 | 60 73 55 89 65 | 58 49 20 96 66 |
| 31 81 15 09 35 | 89 51 01 55 66 | 22 09 62 63 38 | 30 24 00 43 43 |
| 48 83 26 95 24 | 32 11 34 66 73 | 24 96 59 71 07 | 41 85 68 52 96 |
| 32 36 71 84 57 | 03 31 22 55 64 | 75 10 99 31 42 | 91 95 16 88 94 |
| 90 34 61 74 76 | 71 03 92 14 97 | 64 00 15 42 64 | 71 66 79 42 62 |
| 98 51 30 86 79 | 69 41 38 20 67 | 68 25 07 45 01 | 48 84 60 91 00 |
| 08 48 41 56 17 | 82 79 00 83 24 | 95 09 12 70 82 | 73 94 95 95 33 |
| 60 04 28 75 62 | 49 72 82 64 00 | 10 11 21 06 30 | 82 87 33 93 12 |
| 87 65 38 64 09 | 09 27 73 83 79 | 09 93 45 75 87 | 44 00 52 10 90 |
| 35 71 10 03 98 | 30 49 45 09 23 | 33 30 85 14 41 | 13 80 43 26 09 |
| 46 48 33 27 22 | 74 79 96 02 77 | 09 29 94 26 17 | 94 65 41 13 15 |
| 60 85 80 63 37 | 20 22 03 49 52 | 98 21 86 97 10 | 03 42 79 92 55 |
| 70 78 30 14 52 | 87 66 12 40 28 | 41 83 04 04 72 | 46 04 10 89 52 |
| 65 34 64 30 42 | 62 13 43 22 85 | 35 20 18 56 72 | 66 68 85 39 48 |
| 96 34 95 21 64 | 23 29 87 22 17 | 41 64 06 30 18 | 74 28 09 16 70 |
| 63 46 91 34 59 | 11 09 19 66 46 | 37 84 93 43 89 | 55 97 49 94 43 |
| 60 57 97 54 98 | 97 81 58 61 51 | 60 23 67 57 05 | 83 33 98 49 23 |
| 31 01 87 40 81 | 01 49 40 61 65 | 70 80 28 81 89 | 11 59 41 34 47 |
| 00 04 73 38 02 | 73 34 25 43 38 | 43 35 49 39 50 | 54 76 53 75 53 |
| 55 75 48 69 00 | 87 93 10 12 38 | 15 44 92 88 47 | 82 63 56 85 43 |
| 38 05 83 03 46 | 35 72 27 88 49 | 92 82 54 05 36 | 76 78 04 42 64 |
| 06 90 44 32 00 | 89 09 23 09 74 | 00 70 16 65 89 | 04 62 25 13 54 |
| 48 43 07 91 89 | 59 69 09 38 30 | 59 93 99 51 37 | 65 79 94 11 47 |
| 78 55 65 87 76 | 35 37 02 47 74 | 57 49 08 58 05 | 04 16 80 74 03 |
| 07 66 20 77 12 | 70 41 09 94 28 | 76 51 36 93 39 | 33 70 13 21 84 |
| 98 74 51 23 38 | 11 08 80 54 54 | 06 87 15 01 32 | 50 01 02 40 89 |
| 52 92 38 13 43 | 14 90 82 38 96 | 01 52 90 94 99 | 57 66 00 23 09 |
| 35 16 59 31 08 | 32 06 82 15 47 | 54 73 97 37 96 | 14 28 37 69 59 |
| 65 22 11 22 07 | 66 07 95 94 34 | 94 94 61 72 41 | 82 75 41 80 73 |
| 74 45 35 59 75 | 85 46 39 45 67 | 49 80 03 00 54 | 85 78 02 30 94 |



03 49 66 06 56  
64 25 28 09 87  
49 22 51 16 47  
62 47 61 93 65  
21 11 93 11 66  
35 08 65 00 39  
33 33 07 87 01  
68 34 64 53 55  
55 52 63 17 47  
86 02 05 57 48

69 73 55 50 53  
44 41 63 14 38  
69 73 37 99 39  
16 56 86 25 09  
78 38 51 48 75  
71 25 14 57 69  
88 53 64 13 98  
37 07 24 08 32  
57 30 90 92 38  
08 63 66 37 73

15 39 38 25 29  
26 05 53 00 56  
86 30 53 50 43  
89 14 62 53 24  
86 85 79 94 04  
27 90 84 89 44  
86 41 32 07 09  
33 91 55 38 90  
78 74 26 99 71  
07 22 80 50 82

15 76 08 97 88  
15 22 61 10 81  
66 21 97 48 31  
22 75 93 56 01  
91 54 77 49 34  
09 01 75 43 97  
41 58 96 36 41  
19 88 73 41 08  
30 14 87 26 47  
72 82 19 10 26



## Megoldások

Az Olvasók az itt következő táblázatok alapján ellenőrizhetik, hogy jól oldották-e meg a feladatokat. A megoldásokkal kapcsolatban két fontos megjegyzésünk van:

1. *megjegyzés.* Az arányokat a legegyszerűbb alakban írtuk le, vagyis mindig osztottunk a közös tényezővel. Így például a 8:24:16 arányt itt 1:3:2 alakban közöltük.

2. *megjegyzés.* Bár a könyv elején ezt nem hangsúlyoztuk, sok játéknak egynél több alapsmegoldása van. Az első néhány feladatcsoportban megpróbáltuk a játékok összes alapsmegoldását összegyűjteni. A különböző alapsmegoldásokat (a), (b) stb. betűkkel jelöltük. Megjegyezzük, hogy az alapsmegoldások kombinációi is megoldásokat adnak, táblázatunkban azonban ezek nem szerepelnek.

A  $4 \times 4$ -es és a nagyobb játékokhoz kapcsolódó feladatoknál nem törekedtünk arra, hogy minden alapsmegoldást megadjunk. Úgy véljük, hogy aki megtudja ezeket a játékokat oldani, az a megoldás ellenőrzésére is képes.

A játék értéke mindig egyértelmű, az Olvasó által kapott eredménynek ebben meg kell egyeznie az általunk közölttel.



# II. rész. 1. fejezet

| Feladat | Kék |   | Piros |     | A játék értéke     |
|---------|-----|---|-------|-----|--------------------|
|         | 1   | 2 | 1     | 2   |                    |
| 1       | 1   | 0 | 0     | 1   | 4                  |
| 2       | 0   | 1 | 1     | 0   | 6                  |
| 3       | 0   | 1 | 0     | 1   | -7                 |
| 4       | 0   | 1 | 0     | 1   | 6                  |
| 5       | 0   | 1 | 0     | 1   | 3                  |
| 6       | 0   | 1 | 1     | 0   | 3                  |
| 7       | 1   | 1 | 1     | 3   | $\frac{3}{2}$      |
| 8       | 1   | 1 | 1     | 3   | $\frac{3}{2}$      |
| 9       | 1   | 1 | 1     | 3   | $\frac{1}{2}$      |
| 10      | 1   | 1 | 1     | 3   | 0                  |
| 11      | 1   | 1 | 1     | 1   | 0                  |
| 12      | 1   | 1 | 1     | 1   | $-\frac{1}{2}$     |
| 13      | 1   | 1 | 1     | 1   | $\frac{3}{2}$      |
| 14      | 1   | 1 | 1     | 1   | $9\frac{3}{4}$     |
| 15      | 1   | 1 | 5     | 4   | 0                  |
| 16      | 8   | 9 | 10    | 7   | $\frac{3}{17}$     |
| 17      | 0   | 1 | 0     | 1   | 5                  |
| 18      | 3   | 1 | 1     | 1   | -1                 |
| 19      | 10  | 1 | 10    | 111 | $1010\frac{1}{11}$ |
| 20      | 4   | 3 | 1     | 1   | 0                  |



# II. rész. 2. fejezet

| Feladat | Kék |    | Piros |    |   |    |   |    |   |   | A játék értéke   |
|---------|-----|----|-------|----|---|----|---|----|---|---|------------------|
|         | 1   | 2  | 1     | 2  | 3 | 4  | 5 | 6  | 7 | 8 |                  |
| 1       | 1   | 0  | 0     | 1  | 0 |    |   |    |   |   | 0                |
| 2       | 1   | 0  | 0     | 1  | 0 | 0  |   |    |   |   | -6               |
| 3       | 3   | 1  | 0     | 1  | 7 |    |   |    |   |   | $\frac{7}{4}$    |
| 4       | 7   | 9  | 3     | 0  | 0 | 0  | 0 | 13 | 0 | 0 | $29\frac{3}{16}$ |
| 5       | 1   | 1  | 0     | 1  | 1 | 0  |   |    |   |   | $\frac{5}{2}$    |
| 6       | 10  | 11 | 0     | 0  | 1 | 20 |   |    |   |   | $11\frac{1}{21}$ |
| 7       | 5   | 7  | 7     | 5  | 0 | 0  | 0 |    |   |   | $25\frac{1}{2}$  |
| 8       | 5   | 4  | 5     | 0  | 0 | 1  | 0 |    |   |   | $-\frac{1}{5}$   |
| 9       | 7   | 6  | 0     | 19 | 0 | 0  | 7 |    |   |   | $-\frac{3}{13}$  |
| 10      | 5   | 3  | 0     | 7  | 0 | 9  | 0 |    |   |   | $-\frac{1}{8}$   |
| 11      | 5   | 7  | 0     | 1  | 0 | 1  |   |    |   |   | $\frac{7}{2}$    |
| 12      | 7   | 6  | 0     | 7  | 6 |    |   |    |   |   | $42\frac{1}{3}$  |
| 13(a)   | 1   | 1  | 4     | 5  | 0 | 0  | 0 | 0  |   |   | 5                |
| (b)     |     |    | 3     | 0  | 5 | 0  | 0 | 0  |   |   |                  |
| (c)     |     |    | 2     | 0  | 0 | 5  | 0 | 0  |   |   |                  |
| (d)     |     |    | 0     | 1  | 0 | 0  | 4 | 0  |   |   |                  |
| (e)     |     |    | 0     | 0  | 1 | 0  | 3 | 0  |   |   |                  |
| (f)     |     |    | 0     | 0  | 0 | 1  | 2 | 0  |   |   |                  |
| (g)     |     |    | 0     | 3  | 0 | 0  | 0 | 4  |   |   |                  |
| (h)     |     |    | 0     | 0  | 3 | 0  | 0 | 3  |   |   |                  |
| (i)     |     |    | 0     | 0  | 0 | 3  | 0 | 2  |   |   |                  |

| Feladat | Kék |   |   |   |   |   |   |   | Piros |   | A játék értéke |
|---------|-----|---|---|---|---|---|---|---|-------|---|----------------|
|         | 1   | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 1     | 2 |                |
| 14.     | 0   | 0 | 1 |   |   |   |   |   | 1     | 0 | 9              |
| 15      | 1   | 0 | 0 | 0 | 1 |   |   |   | 1     | 1 | 3              |
| 16      | 1   | 0 | 0 |   |   |   |   |   | 0     | 1 | -3             |
| 17      | 1   | 1 | 0 |   |   |   |   |   | 1     | 1 | $\frac{1}{2}$  |
| 18      | 0   | 0 | 1 |   |   |   |   |   | 1     | 1 | 1              |
| 19      | 1   | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |   |   | 1     | 1 | 2              |
| 20.     | 1   | 0 | 0 | 2 | 0 |   |   |   | 2     | 1 | $1\frac{1}{5}$ |



| Feladat | Kék |    |    | Piros |    |    | A játék értéke   |
|---------|-----|----|----|-------|----|----|------------------|
|         | 1   | 2  | 3  | 1     | 2  | 3  |                  |
| 1(a)    | 0   | 0  | 1  | 1     | 0  | 0  | 4                |
| (b)     |     |    |    | 1     | 0  | 1  |                  |
| 2       | 0   | 0  | 1  | 0     | 0  | 1  | 5                |
| 3       | 0   | 1  | 0  | 1     | 0  | 0  | 2                |
| 4(a)    | 0   | 1  | 0  | 0     | 0  | 1  | 4                |
| (b)     |     |    |    | 1     | 0  | 2  |                  |
| (c)     |     |    |    | 0     | 9  | 7  |                  |
| 5       | 1   | 1  | 1  | 1     | 1  | 1  | $\frac{2}{3}$    |
| 6       | 1   | 1  | 1  | 1     | 1  | 1  | 0                |
| 7       | 2   | 3  | 2  | 2     | 3  | 2  | $\frac{8}{5}$    |
| 8       | 1   | 2  | 4  | 1     | 2  | 4  | $1\frac{3}{4}$   |
| 9       | 18  | 5  | 22 | 25    | 9  | 11 | $14\frac{2}{5}$  |
| 10      | 21  | 19 | 16 | 16    | 31 | 9  | $6\frac{7}{6}$   |
| 11(a)   | 1   | 0  | 1  | 1     | 0  | 1  | 1                |
| (b)     |     |    |    | 0     | 1  | 0  |                  |
| 12(a)   | 1   | 0  | 1  | 1     | 0  | 1  | 3                |
| (b)     | 0   | 1  | 0  |       |    |    |                  |
| 13(a)   | 0   | 1  | 1  | 9     | 21 | 4  | $\frac{3}{2}$    |
| (b)     |     |    |    | 1     | 1  | 0  |                  |
| 14      | 7   | 0  | 1  | 1     | 0  | 3  | $\frac{3}{4}$    |
| 15      | 0   | 7  | 1  | 1     | 0  | 3  | $\frac{3}{4}$    |
| 16      | 1   | 0  | 6  | 3     | 0  | 4  | $3\frac{1}{2}$   |
| 17      | 0   | 1  | 2  | 1     | 0  | 1  | 2                |
| 18      | 2   | 5  | 0  | 0     | 6  | 1  | $1\frac{3}{4}$   |
| 19(a)   | 0   | 5  | 2  | 3     | 4  | 0  | $2\frac{2}{3}$   |
| (b)     |     |    |    | 6     | 1  | 7  |                  |
| 20      | 1   | 1  | 0  | 3     | 1  | 0  | $\frac{5}{2}$    |
| 21      | 36  | 11 | 10 | 10    | 25 | 22 | $22\frac{6}{7}$  |
| 22      | 15  | 19 | 40 | 24    | 35 | 15 | $29\frac{7}{4}$  |
| 23      | 1   | 1  | 1  | 1     | 1  | 1  | $10\frac{1}{3}$  |
| 24      | 1   | 1  | 1  | 8     | 2  | 11 | $50\frac{9}{2}$  |
| 25      | 3   | 0  | 4  | 6     | 0  | 1  | $24\frac{1}{2}$  |
| 26      | 0   | 1  | 9  | 3     | 0  | 2  | $2\frac{3}{5}$   |
| 27      | 4   | 5  | 0  | 8     | 0  | 1  | $40\frac{1}{5}$  |
| 28      | 11  | 9  | 15 | 8     | 14 | 13 | $108\frac{5}{5}$ |
| 29(a)   | 0   | 5  | 3  | 1     | 4  | 3  | $2\frac{3}{8}$   |
| (b)     |     |    |    | 5     | 0  | 3  |                  |
| 30      | 4   | 1  | 0  | 2     | 3  | 0  | $1\frac{3}{5}$   |
| 31      | 1   | 1  | 1  | 1     | 1  | 1  | 3                |



#### IV. résumé

[illegible]



# V. rész

| Kék |    |    |    | Piros |   |   |   | A játék értéke |   |
|-----|----|----|----|-------|---|---|---|----------------|---|
| 1   | 2  | 3  | 4  | 1     | 2 | 3 | 4 |                |   |
| 7   | 1  | 0  | 4  | }     | 0 | 0 | 1 | 3              | 0 |
| 17  | 7  | 0  | 12 |       |   |   |   |                |   |
| 0   | 28 | 51 | 65 |       |   |   |   |                |   |
| 28  | 0  | 3  | 17 |       |   |   |   |                |   |
| 0   | 0  | 1  | 1  |       |   |   |   |                |   |



## *Ajánlott olvasmányok*

- Dresher, M.—Kuhn, H. W.—Tucker, A. W.—Wolfe, P.*: Contributions to the Theory of Games. Vol 3. Annales of Math. Studies No. 39. Princeton 1957.
- Dresher, M.*: Games of Strategy: Theory and Applications. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall, Inc. 1961.
- Karlin, S.*: Mathematical Methods and Theory of Games Programming and Economics. 2 vv. Addison Wesley Publication Comp. Reading, Massachusetts 1959.
- Kuhn, H. W.*: Lectures on the Theory of Games. Annales Math. Studies, No. 37. Princeton 1957.
- Kuhn, H. W.—Tucker, A. W.*: Contributions to the Theory of Games. Vol 1. Annales of Math. Studies, No. 24. Princeton 1950.
- Kuhn, H. W.—Tucker, A. W.*: Contributions to the Theory of Games. Vol 2. Annales of Math. Studies. No. 28. Princeton 1953.
- Kuhn, H. W.—Tucker, A. W.*: Theory of Games. Encyclopaedia Britannica 1956.
- Luce, R. D.—Tucker, A. W.*: Contributions to the of Games. Vol 4. Annales of Math. Studies. No. 40. Princeton 1958.
- MacDonald, J.*: Strategy in Poker. Business and War. Norton, New York 1950.
- McKinsey, J. C. C.*: Introduction to the Theory of Games. McGraw Hill, New York 1952.
- Morgenstern, O.*: The Theory of Games. Scientific American. 180 (1950) 294—308. old.
- Quade, E. S. (ed)*: Analysis for Military Decisions. Chicago; Rand McNally & Company. Amsterdam: North Holland Publishing Company 1964.
- Von Neumann, J.—Morgenstern, O.*: Theory of Games and Economic Behaviour. Princeton 1953.

### *Magyar nyelven*

- Vincze I.*: A játékelméletről. Természettudományi Közlöny, 1963—1964.
- Kaufmann, A.*: Az operációkutatás módszerei és modelljei. Műszaki Könyvkiadó, Bpest 1968. 3. és 6. fejezet.
- Beckenbach, E. F.*: Modern matematika mérnököknek. Műszaki Könyvkiadó Bpest, 201—221. old.
- Kemeny—Snell—Thompson*: A modern matematika alapjai. Műszaki Könyvkiadó Bpest. 1971. VI. rész.



Műszaki vezető: *Tamás László*  
Műszaki szerkesztő: *Petrenka János*  
A borítót tervezte: *Sebes János*  
A könyv formátuma: A5  
Ívterjedelem: 18 1/4 A5 ív  
Példányszám: 3500  
Ábrák száma: 43  
Papír minősége: 100 g delta  
Betűcsalád és méret: New Times monó gm/gm  
Azonosítási szám: 70 022  
MŰ: 1651—I—7173  
Készült a MSZ 5601—59 és 5602—55 szerint  
70-4722 — Szegedi Nyomda



Ara: 32, — Ft